МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ ((x+8)^2+y^2-1)\,(x^2+y^2-4)\leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab \vdots 2^{14}\cdot 7^{10}$

$bc \vdots 2^{17}\cdot 7^{17}$

$ac \vdots 2^{20}\cdot 7^{37}$

abc – наим. – ?

a, b и c должны состоять только из простых множителей 2 и 7, чтобы abc было минимал., т.к. иначе другие множит. не повлияют на выполн. услов. к a, b и c, не повлияют на abc, точнее – увеличат. (т.к. любой прост. множ. > 1)

Лучший вариант: (т.к. ab, bc и $ac \neq 0$, т.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} 1\cdot ab = 2^{14}\cdot 7^{10} \\ 1\cdot bc = 2^{17}\cdot 7^{17} \\ 1\cdot ac = 2^{20}\cdot 7^{37} \end{cases}$$

: (т.к. $b \neq 0$, $a \neq 0$)

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = 2^{3}\cdot 7^{7} \\ ac = 2^{20}\cdot 7^{37} \end{cases}$$

$c^2 = 2^{23}\cdot 7^{44}$

это невозможно т.к. $\sqrt{2^{23}} \notin \mathbb{N}$

5) Представим $\begin{cases} a = 2^x 7^y \\ b = 2^z\cdot 7^f \\ c = 2^e\cdot 7^g \end{cases}$, где $x, y, z, f, e, g \in \mathbb{N}$ или $=0$

$$\begin{cases} 2^x 7^y\cdot 2^z\cdot 7^f = 2^{14}\cdot 7^{10}\cdot 2^k\cdot 7^l \\ 2^z\cdot 7^f\cdot 2^e\cdot 7^g = 2^{17}\cdot 7^{17}\cdot 2^m\cdot 7^n \\ 2^x\cdot 7^y\cdot 2^e\cdot 7^g = 2^{20}\cdot 7^{37}\cdot 2^o\cdot 7^r \end{cases}$$

т.к. лучший вариант невозможен, то для рав-ва домножим на 2 и 7 в нуж. степ., т.к. что $k, l, m, n, o, r \in \mathbb{N}$ или $=0$

$$\begin{cases} x+z = 14+k \\ y+f = 10+l \\ z+e = 17+m \\ f+g = 17+n \\ x+e = 20+o \\ y+g = 37+r \end{cases}$$

, а $abc = 2^x 7^y\cdot 2^z\cdot 7^f\cdot 2^e\cdot 7^g = 2^{x+z+e}\cdot 7^{y+f+g}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 (продолжение)

$$\begin{cases} x+z=14+k \\ y+f=10+l \\ z+e=17+m \\ f+g=17+n \\ x+e=20+o \\ y+g=37+r \end{cases}$$

k, l, m, n, o, r – наименьш. подходящ. числа

Найти

$$2^{x+z+e}\cdot 7^{y+f+g}$$

$$\begin{cases} x+z\geq 14 \\ y+f\geq 10 \\ z+e\geq 17 \\ f+g\geq 17 \\ x+e\geq 20 \\ y+g\geq 37 \end{cases}$$

А как помним, это все $\mathbb{Z}$ числа

$x-z\geq 3$
$x+z\geq 14$
$2x\geq 17$
$x\geq 8{,}5$
$\Rightarrow x=9$ (наим. x)
$9+z\geq 14$
$z\geq 5$
$z=5$ (наим. z)
$5+e\geq 17$
$e\geq 12$
$e=12$ (наим. e)
$x+z+e=14+12=26$

$y-f\geq 20$
$y+f\geq 10$
$2y\geq 30$
$y\geq 15$
$y=15$ (наим.)
$g\geq 37-y$
$g\geq 22$
$g=22$ (наим.)
$f+g\geq 17$
$f\geq -5$
$f=0$ (наим.)

$y+g+f=37$

$\Rightarrow$ Ответ: $2^{26}7^{37}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2

$\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow$ НОД $(a,b)=1$

$a\in\mathbb{N}, b\in\mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

можно сократить на m

$\Rightarrow$ А у нас a и b - взаимно прост., т.к. НОД $(a;b)=1$

$a^2-6ab+b^2=$

$=2a^2-4ab+2b^2-(a^2+2ab+b^2)=$

$=2(a-b)^2-(a+b)^2$

или

$a^2-6ab+b^2=$

$=a^2+2ab+b^2-8ab=(a+b)^2-8ab$

Пусть $a+b=m\cdot x$, где $\boxed{m,x\in\mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \frac{m\cdot x}{(mx)^2-8ab}=\frac{m\cdot x}{m^2\cdot x^2-8ab}$$

$\Rightarrow$ чтобы сократить на m надо, чтобы $8ab \vdots m$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=xm \not\vdots a \\ a+b=xm \not\vdots b \end{cases}$

$\Rightarrow a \not\vdots m$

$b \not\vdots m$

$\Rightarrow 8ab \vdots m$

$\Rightarrow$ макс. $m=8$, т.к. a, b и m не им. общ. простох множит.

$\Rightarrow$ Ответ: $m=8$.

Заметим, что сумма взаимно простых чисел $\not\vdots$ на каждое из них, ведь чтобы сумма дел. $(\vdots)$ на y, надо чтобы каждое слагаемое дел $(\vdots)$ на y.

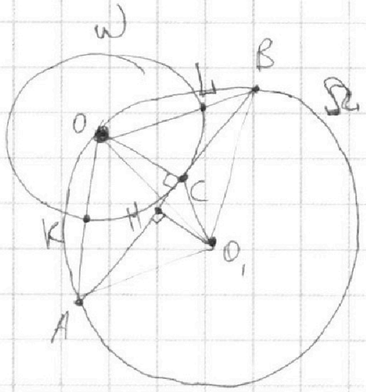
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3



$AC : CB = 7$

т. C – т. касан.

$R_w = 1 = r$

$R_\Omega = 5 = R$

введ. обознач.

AB – ?

Пусть $AO \cap w = $ т. K

$OB \cap w = $ т. L

Тогда по св-ву касат. и секущ.

$AC^2 = AK \cdot (AK + 2r)$

$BC^2 = BL \cdot (BL + 2r)$

$49x^2 = AK^2 + 2AK$

$x^2 = BL^2 + 2BL$

$AK_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 49x^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+49x^2} > 0$

$\Rightarrow AK = -1 + \sqrt{1+49x^2}$

$BL_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4x^2}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+x^2} > 0$

$\Rightarrow BL = -1 + \sqrt{1+x^2}$

Провед. OC – рад. в т. касан.

$\Rightarrow OC \perp AB$ (как рад. провед. в т. касан.)

Провед. O_1O, O_1B и O_1A – рад. Ω

Соед. AO, OB и CO_1

Провед. $O_1H \perp AB$ (т. $H \in AB$)

Пусть $CB = x$, тогда $AC = 7x$

O_1H – высота в р/б $\triangle O_1AB$ ($O_1A = O_1B$ как рад. одной окр-ти) явл. мед. и бисс.

$\Rightarrow HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{AC + CB}{2} = \frac{8x}{2} = 4x$

$\Rightarrow OA = r + AK = \sqrt{1+49x^2}$

$OB = r + BL = \sqrt{1+x^2}$

$\Rightarrow$ из $\triangle AOB$: (по т. косин.)

$$\cos\angle AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2\, OA \cdot OB} = \frac{\overbrace{1+49x^2+1+x^2-64x^2}^{2-14x^2}}{2\sqrt{1+49x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{1-7x^2}{\sqrt{1+49x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

Заметим, что

$\angle AOB = \frac{\smile AB}{2} = \frac{360 - \angle AO_1B}{2} = 180 - \frac{\angle AO_1B}{2}$

$\cos\angle AOB = \cos\left(180 - \frac{\angle AO_1B}{2}\right) = -\cos\frac{\angle AO_1B}{2}$

$\left(\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha - 1}{2}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3 (продолжение)

$\Rightarrow \cos\angle\frac{AO_1B}{2} = -\cos\angle AOB$

Заметим, что O_1H - бисс. (выше док-но)

$\Rightarrow \angle AO_1H = \frac{\angle AO_1B}{2}$

$\Rightarrow \cos\angle AO_1H = -\cos\angle AOB$

А $\triangle AO_1H$ - пр/уг

$\Rightarrow \cos\angle AO_1H = \frac{O_1H}{AO_1}$

$\frac{O_1H}{AO_1} = \frac{7x^2-1}{\sqrt{1+49x^2}\sqrt{1+x^2}} = \frac{O_1H}{5}$

$O_1H = \frac{35x^2-5}{\sqrt{1+49x^2}\sqrt{1+x^2}}$

По т. Пифагора из $\triangle AHO_1$

$AO_1^2 = AH^2 + O_1H^2$

$25 = 16x^2 + \frac{25(7x^2-1)^2}{(1+49x^2)(1+x^2)}$

$\frac{(-25+16x^2)(1+50x^2+49x^4)+25(7x^2-1)^2}{(1+49x^2)(1+x^2)} = 0$

$-\cancel{25} - \underbrace{25\cdot 50x^2} - \cancel{25\cdot 49x^4} + \underbrace{16x^2} + 16\cdot 50x^4 + 16\cdot 49x^6 + \cancel{25\cdot 49x^4} - \underbrace{50\cdot 7x^2} + \cancel{25} = 0 \quad |:x^2 (x\neq 0)$

$16\cdot 49x^4 + 16\cdot 50x^2 - 32\cdot 50 + 16 = 0 \quad |:16$

$49x^4 + 50x^2 - 100 + 1 = 0$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

$x^2_{1,2} = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 + 49\cdot 99\cdot 4}}{49\cdot 2} = \frac{-25 \pm \sqrt{625 + 49\cdot 99}}{49} > 0$

$49 \cdot 99$: $441 + 4410 = 4851$; $4851 + 625 = 5476$

$\sqrt{5476} = 74$: $74\cdot 74 = 5476$

$x^2 = \frac{-25 + \sqrt{74^2}}{49} = \frac{-25+74}{49} = \frac{49}{49} = 1$

$x = 1$

$\Rightarrow AB = 8x = 8$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} + (2-7x) \quad \Big| \,\wedge 2$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+\cancel{1} + 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} + \cancel{4} - 28x + 49x^2$$

$$\cancel{2x^2} - 5x + 3 - \cancel{2x^2} - 2x - 1 - 4 + 28x - 49x^2 = 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$-49x^2 + 21x - 2 = 2(2-7x)\sqrt{2x^2+2x+1} \quad \Big| \wedge 2$$

$$-((7x)^2 - 14x + 1 - 7x + 1) = -((7x-1)^2 - (7x-1)) = -((7x-1)(7x-1-1))$$

$$-(7x-1)(7x-2) + 2(7x-2)\sqrt{2x^2+2x+1} = 0$$

$$(7x-2)\left(2\sqrt{2x^2+2x+1} - (7x-1)\right) = 0$$

$x = \frac{2}{7}$ $\qquad 2\sqrt{2x^2+2x+1} = 7x-1 \ \Big|\wedge 2$ и $7x-1 \geq 0$ $(7x \geq 1)$

$$4(2x^2+2x+1) = 49x^2 - 14x + 1$$

$$8x^2 + 8x + \cancel{4} - 49x^2 + 14x - \cancel{1} = 0 \ \Big| \cdot(-1)$$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 41 \cdot 3}}{41}$$

~~⇒ нет корней~~

123
121
244

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{244}}{41}$$

~~Ответ: $\frac{2}{7}$.~~

Проверим

$7(11+\sqrt{244}) \geq 41$

$77 + 7\sqrt{244} \geq 41$

$7\sqrt{244} \geq -36$

верно

$7(11-\sqrt{244}) \geq 41$

$-7\sqrt{244} \geq -36$

$-7 \cdot 15 < -36$

$\Rightarrow -7\sqrt{244} \not\geq -36$

неверно

$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{11+\sqrt{244}}{41}$; $\frac{2}{7}$.

Проверим $x = \frac{2}{7}$

$$\sqrt{2\cdot\frac{4}{49} - \frac{10}{7} + 3} - \sqrt{2\cdot\frac{4}{49} + \frac{4}{7} + 1} = 0$$

$$\sqrt{\underbrace{\frac{8}{49} + \frac{11}{7}}_{>0}} = \sqrt{\underbrace{\frac{8}{49} + \frac{11}{7}}_{>0}}$$

верно

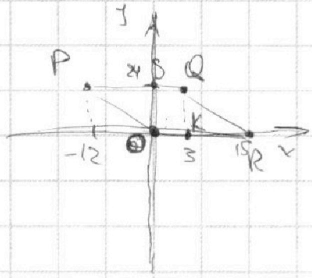
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5



Обознач. т. S и т. K

$\Rightarrow 2(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=12$

$(y_2-y_1)\in(-24;24)$

$(x_2-x_1)\in(-15;15)$

$2(x_2-x_1)\in(-30;30)$

$2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$

$x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}$

т. к. $x_2, x_1 \in \mathbb{Z}$

то $2(x_2-x_1)$ – чётное число $\in(-30;30)$

Ч + Н. ≠ Ч. Ч + Ч = Ч

$\Rightarrow (y_2-y_1)$ – чётное число $\in(-24;24)$

$\Rightarrow y_2, y_1$ – одной чётности

$2(x_2-x_1) = 12-(y_2-y_1)$

При $(y_2-y_1)=24$

$\underline{2(x_2-x_1)=-12}$ $\quad 2(x_2-x_1)\in(-12;30)$

$2(x_2-x_1)$	-12	-10	-8	-6	-4	-2
x_2-x_1	-6	-5	-4	-3	-2	-1
y_2-y_1	24	22	20	18	16	14
				max 15 и 7	15 и 9	15 и 11

$y_2 \in PQ$

$y_1 \in OR$

x_2 до Q

x_1 до O

$x_1 \in$

Q + 6 = 3 + 6 = 9

до O

$\Rightarrow$ 9 пар

При нечёт. у кол-во пар на 1 меньше, чем на чёт. рядах

А на чёт. ряд. одинаково из-за пар-тен

При сниж. y_2-y_1 на 2

(x_2-x_1) увел. на 1

Это с двух сторон

$\Rightarrow$ увелич. кол-во на 2

11 и 3

на 1 ряду кол-во рядов

11 + 10 + 11 = 32 пар

13 на чёт. ряду

5 рядов

$13\cdot 3+12\cdot 2=$

$=39+24=\boxed{63}$

$15\cdot 4+14\cdot 3=$

$=60+42=$

$=\boxed{102}$

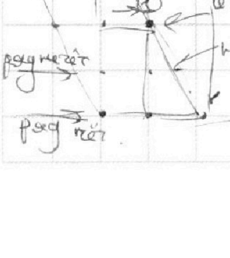
$15\cdot 5+14\cdot 4=$

$=75+56=$

$=\boxed{131}$

$\boxed{15\cdot 6+14\cdot 5}$

$2(x_2-x_1)$	0	2	4	6	8
x_2-x_1	0	1	2	3	4
y_2-y_1	12	10	8	6	4
помик кол-во в чёт. ряду на 2	13 и 13	11 и 15	9 и 17	7 и 19	5 и 21



$2(x_2-x_1)$	10	12	14
x_2-x_1	5	6	7
y_2-y_1	2	0	-2
	3 и 23	9 и 25	7 и 23

только точки x_2 и x_1 поменяются

$2(x_2-x_1)$	16	18	20	22	24	26	28	30
x_2-x_1	8	9	10	11	12	13	14	15
y_2-y_1	−4	−6	−8	−10	−12	−14	−16	−18

5 и 21 $\quad$ 3 и 19 $\quad$ 1 и 17

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \le 0 \end{cases}$$

$y = ax + 10b$ – прямая

$y_1 y_2 \le 0$, где $y_1 = (x+8)^2 + y^2 - 1$

$(x+8)^2 + y^2 = 1^2$ – окр-ть, центр $(-8;0)$, рад. 1

$y_2 = x^2+y^2-4$

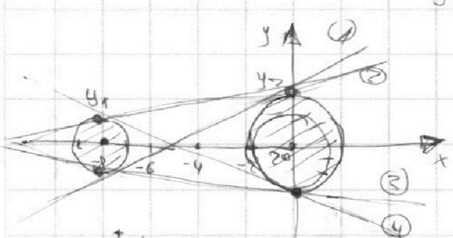
$x^2+y^2 = 2^2$ – окр-ть, центр $(0;0)$, рад. 2

≤ 0 если y_1 и y_2 – разных знаков, т.к. y_1 и y_2 – окр-ты, у которых внутри <0, окр-ть $=0$, снаружи >0

Заметим, что окр-ти не пересек.

$\Rightarrow$ нужные части пов-ти – внутри окр-тей и на окр-тях

(там, где $y_1 > 0$, $y_2 \le 0$; $y_1 \le 0$, $y_2 > 0$)



т.к. нам нужны только 2 реш., то это возмож. только если прямая y – касат. к обеим окр-тям

есть всего 4 таких прямых (см. на чертеже)

для пр. y, a – tg угла наклона пр. y к X

Заметим, что углы м/у ① и Ox и ④ и Ox равны,

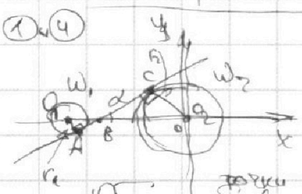
также углы м/у ② и Ox и ③ и Ox равны

$\Rightarrow a_1 = -a_4$

$a_2 = -a_3$

$\Rightarrow$ Рассмотрим оба случая:

① и ④



нужно найти $tg\,\alpha = a_1 = -a_4$

Обозначим точки буквами, как на чертеже.

$\Rightarrow AC$ – касат. к ω_1 и ω_2

$\Rightarrow \triangle O_1AB \sim \triangle O_2CB$ (пр/уг и $\angle O_1BA = \angle O_2CB$ (верт.)) (по 2 углам)

$\Rightarrow \dfrac{O_1B}{O_2B} = \dfrac{O_1A}{O_2C} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{1}{2}$ (как сход. ст. под. $\triangle$-ов)

$2O_1B = O_2B$

$O_1O_2 = 8 = O_1B + O_2B = 3O_1B$

$\Rightarrow O_1B = \dfrac{8}{3}$

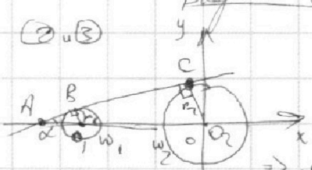
$\Rightarrow$ из $\triangle O_1AB$ – пр/уг по т. Пифагора

$AB = \sqrt{O_1B^2 - O_1A^2} = \sqrt{\dfrac{64}{9} - 1} = \dfrac{\sqrt{55}}{3}$

$tg\,\alpha = tg\angle O_1BA = \dfrac{O_1A}{AB} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{55}}{3}} = \dfrac{3\sqrt{55}}{55} = a_1 = -a_4$

Второй случай

② и ③



$tg\,\alpha = a_2 = -a_3$

Обозн. точки, как как на чертеже

$\Rightarrow \triangle ABO_1 \sim \triangle ACO_2$ (α – общ. пр/уг)

т.к. AC – касат. к ω_1 и ω_2

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AO_1}{AO_2} = \dfrac{BO_1}{CO_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{1}{2}$ (как сход. ст. под. $\triangle$-ов)

$2A_1O = A_1O + O_1O_2$

$A_1O = O_1O_2 = 8$

⇓ (продолж.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№ 6 (продолжение)

из $\triangle ABO_1$ - пр/уг (как было сказ. выше)
по т. Пифагора,

$$AB = \sqrt{AO_1^2 - O_1B^2} = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$$

$$tg\alpha = tg\angle BAO_1 = \frac{BO_1}{AB} = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{\sqrt{63}}{63} = \frac{3\sqrt{7}}{3\cdot 21} = \frac{\sqrt{7}}{21} = a_2 = -a_3$$

$\Rightarrow$ При данных a можно будет подобрать b так, что прямая y будет касат. к обоим окр-тям, в частности это будут коорд. по Oy т. пересеч. (1)/(2)/(3)/(4) и Oy, (но это совсем другая история)

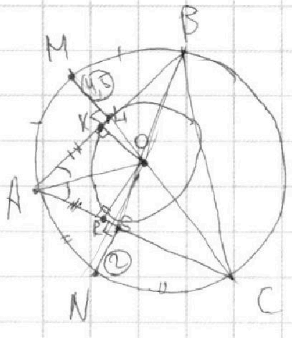
Ответ: $-\frac{3\sqrt{55}}{55}$; $-\frac{\sqrt{7}}{21}$; $\frac{\sqrt{7}}{21}$; $\frac{3\sqrt{55}}{55}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

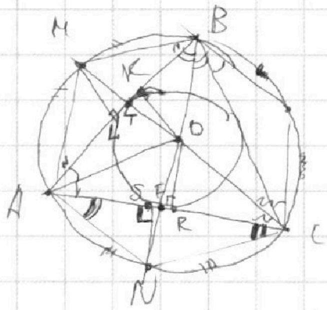


$AS = SC$

$AL = LB$

~~∠K = ∠L~~

~~∠R = ∠S~~



$AO - ?$

$AO^2 = AR^2 + OR^2 = AR^2 + \left(\frac{FR}{SF} \cdot NS\right)^2 =$

$= AR^2 + \left(\frac{KT}{TL}\right)^2 \cdot ML^2$

$\frac{KT}{TL} \cdot ML = \frac{FR}{SF} \cdot NS$

$\frac{OT}{TM} \cdot ML = \frac{FO}{FN} NC$

$\triangle AML \sim \triangle COR$ $\Rightarrow \frac{ML}{OR} = \frac{AL}{RC}$

$\triangle KOB \sim \triangle SNA$ $\Rightarrow \frac{SN}{OK} = \frac{AS}{KB}$

$\triangle MLT \sim \triangle OKT$ $\Rightarrow \frac{ML}{OK} = \frac{LT}{TK}$

$\triangle NSF \sim \triangle ORF$ $\Rightarrow \frac{NS}{OR} = \frac{SF}{FR}$

$\frac{ML}{OR} = \frac{LT + TK + KB}{RC}$

т. $N \in$ бисс. $\angle ABC$ т.к. $AN = NC$ $\Rightarrow \angle ABN = \angle NBC$

т. $M \in$ бисс. $\angle ACB$ т.к. $AM = MB$ $\Rightarrow \angle ACM = \angle MCB$