



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

12

$\frac{a}{b}$ - несократимая, $a, b \in \mathbb{N}$

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-3ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-3ab}$$

Предположим $a = mn$, $b = mk$, $m, n, k \in \mathbb{N}$, но тогда $\frac{a}{b} = \frac{mn}{mk} = \frac{n}{k}$ сократима

$$\Rightarrow a+b = mn, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{mn}{(mn)^2-3ab} \text{ делится на сократима } \Rightarrow$$

$$3ab : mn$$

$$\Rightarrow a : mn$$

$$ab : \frac{mn}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a : \frac{mn}{3} \\ b : \frac{mn}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=1$$

ответ: 1

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1/4

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 2x$$

пусть

$$\begin{cases} a = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}, b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 2x^2 - 5x + 3, a \geq 0 \\ b^2 = 2x^2 + 2x + 1, b \geq 0 \end{cases} \ominus$$

$$\underline{a^2 - b^2 = 2 - 7x}$$

$$\Rightarrow a - b = a^2 - b^2; a - b = (a - b)(a + b); (a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b(1), a \geq 0, b \geq 0 \\ a + b = 1(2) \end{cases} \text{ обратная замена:}$$

$$(1): \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \quad \uparrow \quad 2$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1 \\ 2x^2 + 2x + 1 \geq 0(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x = 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{7} \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{7}}$$

$$(x): D_1 = 1 - 2 = -1 < 0$$

q-критерий
вероятно верно $\Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$$(2) \sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1 \quad \uparrow \quad 2$$

$$\frac{2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 + 2x + 1}{2} + 2 \cdot \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$2 \underbrace{\sqrt{2x^2 - 5x + 3}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}_{\geq 0} = \underbrace{-4x^2 + 3x - 3}_{(xx)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1. \sqrt{2x^2 - 5x + 3} \geq 0 \\ 2. \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

Ответ: $\left\{ \frac{2}{7} \right\}$

$$\begin{aligned} (x) \quad & 4x^2 - 3x + 3 = f(x) \\ & D = 9 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 9 - 48 < 0 \\ & \Rightarrow f(x) > 0 \\ & -4x^2 + 3x - 3 = -f(x) \\ & \Rightarrow -f(x) < 0 \\ & \Rightarrow -4x^2 + 3x - 3 < 0 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1/6

$$ax - y + 10b = 0 \quad (2)$$

а: 2 реш.

$$(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 & (-8; 0; R=1) \\ x^2 + y^2 \geq 4 & (0; 0; R=2) \end{cases}$$

образы на координатной плоскости;

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 & (-8; 0; R=1) \\ x^2 + y^2 \leq 4 & (0; 0; R=2) \end{cases}$$

Решение первой системы

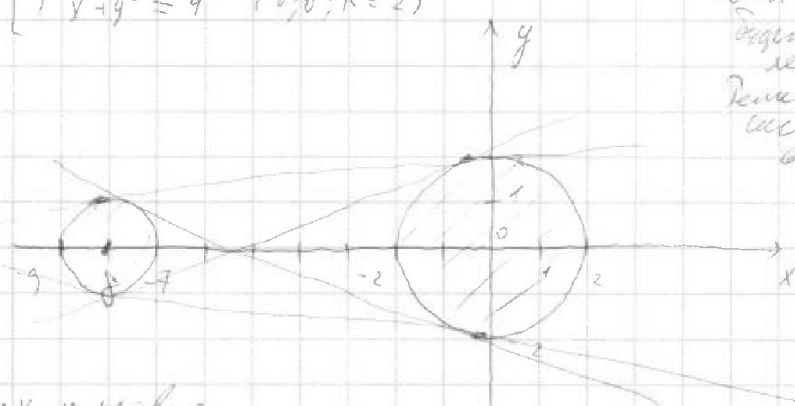
будет площадь внутри

левой окружности

Решение второй

системы будет площадь

внутри правой окружности



$$(2) ax - y + 10b = 0$$

$$y = ax + 10b$$

прямая линейная
график прямой

Если прямая пересекает окружности,
то будет бесконечное множество
решений, если же не
касается обеих окружностей,
то нет решений.
Всего есть 4 варианта расположения
и 76 возможных комбинации.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11.1

Решение:

Дано:

$a, b, c \in \mathbb{N}$

$ab = 2^{14} \cdot 7^{10}$

$bc = 2^{14} \cdot 7^{12}$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{32}$

$\min(ab, c) = ?$

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{12} \cdot m$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{32} \cdot n$$

$k, m, n \in \mathbb{N}$ Переносим
три уравнения:

$$abc = 2^{54} \cdot 7^{54} \cdot kmn \downarrow 2$$

$$abc = 7^{32} \sqrt{2^{54} kmn}, \quad k, m, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow abc \in \mathbb{N}; kmn \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2^{54} kmn} \in \mathbb{N}$$

Если $k \cdot m \cdot n = 1$, то корни распада
известно число $\Rightarrow kmn$ - минимальное
или $kmi = 2$

$$\Rightarrow abc = 7^{32} \cdot \sqrt{2^{54} \cdot 2} = 7^{32} \cdot 2^{26}$$

$$\text{Ответ: } 7^{32} \cdot 2^{26}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐

2 ☐

3 ☐

4 ☐

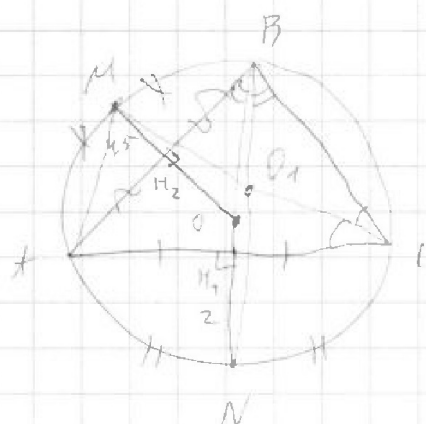
5 ☐

6 ☐

7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



CO_1 - бисс.

$CO_1 \perp \omega = M$

MO_1 - ср. перп.

BO_1 - бисс.

$BO_1 \perp \omega = N$

NO_1 - ср. перп.

м. к $\Delta M_1 M_2$

O_1 - центр

впис. окружности

м. к $\Delta N_1 N_2$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

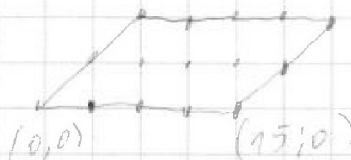


Черныш

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$\in \mathbb{Z}$ $\in \mathbb{Z}$



$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8} \quad \frac{1+4-12}{8} = \frac{-7}{8}$$

$$15$$

$$\frac{3}{8} \quad 9 - 4 \cdot 2$$

$$9 - 4x = -8$$

$$7x = 4x \quad x = \frac{17}{3}$$

$$2x + y = 12$$

$$x_0 = 5$$

$$y_0 = 2$$

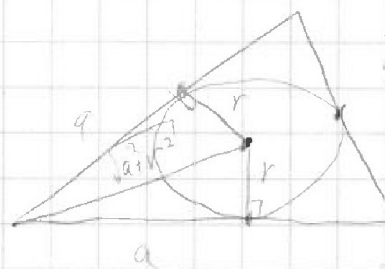
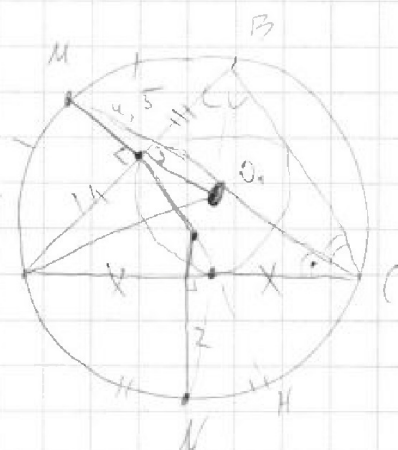
$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

$$x = 5$$

$$y = 2$$

$$x = 6$$

$$y = 0$$



$$4,5 \cdot x = a^2$$

$$a = \frac{8^2 - 5 \cdot 2}{2 \cdot 9} = a^2$$

$$2 \cdot y = 8^2$$

$$8^2 = 2x + 5$$

$$9a^2 = 8^2 - 5$$

$$4,5 + x = 2,5$$

$$x = \frac{8^2 - 5}{2}$$

$$x = y - 2,5$$

$$y = x + 2,5$$

$a+b: m$, a, b взаимно просты

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2} \rightarrow \frac{mn}{m^2 - 4ab} = km = a$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} \quad a+b: m$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{a}{b} = k$$

$$a+b = mn$$

$$a = kb, \quad k \neq 0$$

$$a = mn - b$$

$$(a+b)^2 - 4ab = \frac{mn}{m^2 - 4(m-b)b} \cdot b$$

$$a+b: m$$

$$ab: \frac{m}{4}$$

$$= \frac{mn}{m^2 - 4mn + 9b^2}$$

$$m^2 n^2 - 6(m-b)b + b^2$$

$$m^2 n^2 - 6mn + 6b^2 + b^2$$

$$m^2 n^2 - 6mn + 7b^2 \quad b = \sqrt{m} \cdot k$$

$$7b^2: m \quad 7b^2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$m \nmid b$$

$$m^2 n^2 - 6mn \sqrt{m} \cdot k + m k^2$$

$$ab: m$$

$$b: \sqrt{m}$$

$$a: \sqrt{m}$$

$$ab: m$$

$$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$$

$$a: b^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} - 6 \frac{a}{b} + 1$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

16

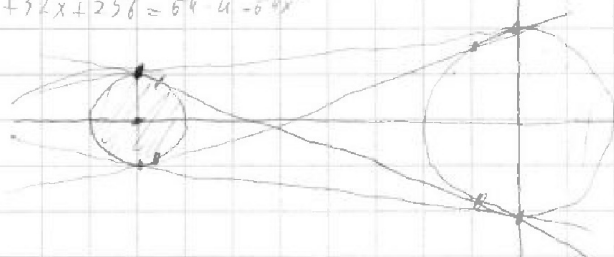
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+b)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

$$6\sqrt{x^2 + 32x} = 0 \quad x = 0$$

$$\frac{1}{8}x + 2 = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{Реш}$$

$$x + 16 = 8\sqrt{4 - x^2} \quad \text{Реш}$$

$$x^2 + 32x + 256 = 64 - 4 - 64x^2$$



$$\frac{1}{8}x + 2 = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{Реш}$$

$$x^2 - \frac{1}{8}x + 9^2 - 6 = 0$$

$$\frac{1}{8}x + 2 = \sqrt{4 - x^2}$$

$$a^2x^2 + 2akx + k^2 = 4 - x^2$$

$$a^2x^2 + 2akx + k^2 = 4 - x^2$$

$$a^2k^2 - a^2k^2 - 4a^2 - 4 + k^2 = 0$$

$$4a^2 + k^2 = 0$$

$$k = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$ax + k = \sqrt{1 - (x+b)^2}$$

$$ax^2 + 2abx + b^2 = 1 - (x+b)^2$$

$$x^2 + 16x + 64$$

$$x^2(a^2 + 1) + 2abx + b^2 + k^2 + 63 = 0$$

$$D_1 = a^2k^2 + 25ak + 64 - a^2k^2 - k^2 - 63a^2 - 63 = 0$$

$$16ak + 1 - k^2 - 63a^2 = 0$$

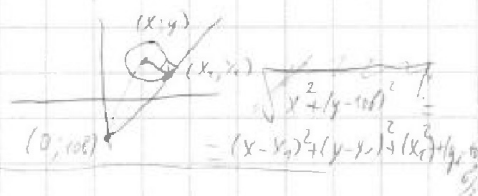
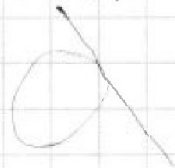
(1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x+b)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ (x+b)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$26x + 84 + 10x - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} (x+b)^2 &\leq x^2 \\ \sqrt{4 - x^2} &= \sqrt{1 - (x+b)^2} \\ 4 - x^2 &= 1 - (x+b)^2 \end{aligned}$$



$$y = ax + 10b$$

$$y = \frac{1}{8}x + 2 \quad \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$(1, 8) \quad 1 = 1 + 2 \quad \text{Верно}$$

$$(0, 2) \quad 2 = 2 \quad \text{Верно}$$

$$y = \frac{3}{8}x + 2 \quad 1 = -3 + 2 \quad \text{Верно}$$

$$(-8, -1) \quad -1 = 2 \quad \text{Верно}$$

$$y^2 = k^2$$

$$y = \pm\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\frac{1}{16}x + 16$$

$$k^2 - 16ak - 1 + 63a^2 = 0 \quad | \quad 4 - 32a - 1 + 63a^2 = 0$$

$$4a^2 + 16a - 2\sqrt{a^2 + 1} - 1 + 63a^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

✓ 4

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{2x^2-5x+3}, a \geq 0 \\ b = \sqrt{2x^2+2x+1}, b \geq 0 \end{cases} \begin{cases} a^2 = 2x^2-5x+3 \\ b^2 = 2x^2+2x+1 \end{cases} \begin{cases} a^2 - b^2 = 2-7x \end{cases}$$

$$a-b = a^2-b^2$$

$$a-b = (a-b)(a+b)$$

$$(a-b)(a+b-1) = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a+b = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1} \quad | \cdot 2$$

$$2x^2+2x+1 \geq 0 \quad D = 1-2 < 0 \quad \frac{2 \cdot 4}{49} + \frac{4}{49} + 1 \geq 0 \quad \text{верно}$$

$$2x^2-5x+3 = 2x^2+2x+1$$

$$7x = 2$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} + \sqrt{2x^2+2x+1} = 1 \quad | \cdot 2$$

$$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1+2\sqrt{2x^2-5x+3} \cdot \sqrt{2x^2+2x+1} = 1$$

$$2 \sqrt{\dots} = -4x^2+3x-3$$

$$4x^2-3x+3 = 0$$

$$D = 9-48 < 0$$

$$4x^2-3x+3 > 0$$

$$-4x^2+3x-3 < 0$$

$$\cos \angle BOA = \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$AO = \sqrt{49x^2+1}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2x^2}{1+x^2} - 1 = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$49x^2+1 = 25+25-2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 2\alpha$$

$$49x^2+1 = 50-50 \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\frac{x^2}{x^2+1}$$

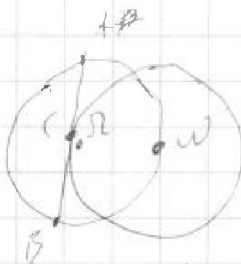
$$49x^2+1 = 50-50 \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad | \cdot (x^2+1)$$

$$(49x^2+1)(x^2+1) = 50(x^2+1) - 50(x^2-1)$$

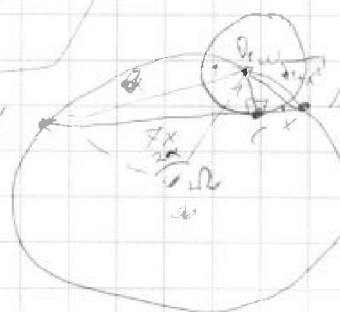
$$49x^2+50x^2+49 = 100$$

$$49x^2+50x^2+49 = 100 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{29}{49} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 215 \\ \times 27 \\ \hline 1505 \\ + 4200 \\ \hline 5865 \end{array}$$



$$20 \approx 2/5^2 / 49 \cdot 99 = (2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

N1

$$a, b, c \in \mathbb{N}: ab = 2^{14} \cdot 7^{10}; bc = 2^{17} \cdot 7^{11}; ac = 2^{20} \cdot 7^{17}$$

$$\begin{cases} ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \text{ км} \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{11} \text{ мин} \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{17} \text{ км/мин} \end{cases}$$

$$x \Rightarrow abc = 2^{51} \cdot 7^{84} \text{ км мин}$$

$$\begin{aligned} abc &= \sqrt{2^{51} \cdot 7^{84}} \text{ км мин} \in \mathbb{N} \\ &= 7^{32} \sqrt{2^{51} \text{ км мин}} \\ &\quad \text{км мин с 20} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2^{51}} = 2^{25}$$

значит можно
было найти число
корней км мин: 2
мин(км мин): км мин: 2
км мин = 2
при км мин = 7 корень
существенно

N2

$\frac{a}{b}$ макс ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$)

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = (a+b) \cdot m$$

$$D_1 = 9b^2 - b^2 = 8b^2$$

$$a, b = 3b \pm 2b$$

$$ab = k \text{ м}$$

$$a^2 - 6ab + b^2 = n \text{ м}$$

$$a^2 - 6ab + b^2 \mid a+b$$

$$a+b = x \quad x^2 = a^2 + b^2 + 2xy$$

$$ab = y \quad x^2 - 8y = 2x \cdot m$$

$$\frac{x}{x^2 - 8y} = \frac{k \text{ м}}{k^2 \text{ м}^2 - 8nm}$$

$$= \frac{k}{k^2 - 8n}$$