



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№1

Пусть: $x \in \mathbb{N}; y \in \mathbb{N}; z \in \mathbb{N}; k \in \mathbb{N}$

также, то: $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot x$

$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot y$

$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot z$

$abc = \sqrt{2xyz} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$

но $ac \neq 7^{37}$ и abc - целое $\Rightarrow xyz : 2$

$xyz : (7^5)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow xyz = 2 \cdot 7^{10} k$

$abc = 2^{26} \cdot 7^{37} k \Rightarrow abc \Rightarrow 2^{26} \cdot 7^{37}$ (так $k \geq 1$)

Пример

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$b = 2^6$$

$$c = 2^{11} \cdot 7^{17}$$

Проверка: $ab = 2^{15} \cdot 7^{20} : 2^{14} \cdot 7^{10}$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} : 2^{17} \cdot 7^{14}$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} : 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = 2^{9+6+11} \cdot 7^{20+17} = 2^{26} \cdot 7^{37}$$

Ответ: $2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2 $x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}$ ~~$x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}$~~
 Обозначим $(a; b)$ - наибольший общий делитель чисел x, y , больший нуля

Если $\frac{a}{b}$ - несократима $\Rightarrow (a; b) = 1$
 иначе можно сократить дробь на $(a; b)$

Получаем, что, ~~если~~ $\frac{a+b}{a^2+b^2-6ab}$ можно сократить как

~~$(a; b) = m$ т.е. $m \in (a; b)$ и при~~
 $\Rightarrow (a+b; (a+b)^2-8ab) = m$, т.е. $m \in (a+b; (a+b)^2-8ab)$

По алгоритму Евклида: $(a+b; (a+b)^2-8ab) = (a+b; 8ab)$
~~Вся дробь $\leq a+b$~~
 очевидно, что $4ab \geq 1$ ~~$(a \geq 1; b \geq 1) \Rightarrow$~~
 $\Rightarrow 8ab \geq 2ab \geq \frac{4ab}{a+b}$

Посмотрим при каких условиях $8ab \geq a+b$:
 $8ab \geq a+b \geq 2\sqrt{ab}$
 и то ~~тогда~~ \Rightarrow среднее

~~$4ab$~~ $8ab$
 Очевидно, что $(4a-1)(2b-1) \geq 0$ тк $a \geq 1$
 Значит $8ab > 2b + 4a - 1 = a+b + \underbrace{(b+3a-1)}_{\geq 0} > a+b$

Получаем, что ~~$8ab > a+b$~~ всегда ~~$ab \geq 0; a+b \geq 0$~~ ~~иногда~~

тк $(a; b) = 1 \Rightarrow (ab; a+b) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \max((a+b; 8ab)) = \max((a+b; 8)) = 8$

тк $(x; y) \leq \max(x, y)$; т.е. $\max(m) = 8$

Пример $\begin{cases} a=1 \\ b=15 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{15}$ - несокр

$\frac{a+b}{a^2+b^2-6ab} = \frac{1+15}{1+15^2-6 \cdot 15 \cdot 1} = \frac{16}{136} = \frac{8 \cdot 2}{8 \cdot 17} = \frac{2}{17}$; несокр ; $m=8$

Ответ: $m=8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

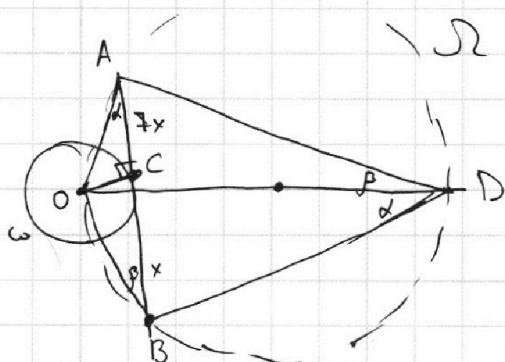
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3

$f(x) = \sin y > 0$ тк $0 < y < \pi$



Дано: O - центр окр ω
 $O \in \text{окр } \Omega$; AB - хорда Ω
 AB кас $\omega = C$
 $AC: CB = 7$; $r = 1, R = 5$
 радиуси ω и Ω совб

И-ти: $AB = ?$

Пусть $\angle OAB = \alpha$ и

$\angle OBA = \beta$

Пусть $AC = 7x$; $CB = x$

Проведем в Ω диаметр, содержат O ; Пусть он хордою пересекет Ω в точке D

Тогда ~~тогда~~ $\angle ADO = \angle ABO = \beta$; $\angle BDO = \angle BAD = \alpha$

Рассм $\triangle C$:

$OC \perp AB$ в $T \in C$ тк ~~кас~~ точка касания

~~кас~~ в $\triangle AOC$: $\tan \alpha = \frac{1}{7x}$; в $\triangle BOC$: $\tan \beta = \frac{1}{x}$ (тк $OC = r = 1$)

По теореме синусов:

$\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = 2R = 10$; $8x = 10(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$
 $\tan \alpha = \frac{1}{7x} \Rightarrow \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{7x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{49x^2}$; $\cos^2 \alpha = \frac{49x^2}{49x^2 + 1}$
 Аналогично: $\cos \beta = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\cos \alpha = \frac{7x}{\sqrt{49x^2 + 1}}$; $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{49x^2 + 1}}$

$4x = \frac{5}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{49x^2 + 1}} (x + 7x) \quad | : 4x \neq 0$

$1 = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{49x^2 + 1}} \Leftrightarrow (1 + x^2)(49x^2 + 1) = 100$
 $1 + 49x^4 + 50x^2 = 100$

$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$

По теореме Виета: $\begin{cases} x^2 = 1 - \text{корень} \\ x^2 = -\frac{99}{49} - \text{корень} \end{cases}$ тк $x^2 \geq 0 \Rightarrow x = 1$ тк $x \geq 0$

$AB = 8x = 8 \cdot 1 = 8$

Ответ: $AB = 8$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\frac{(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1})(\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

Область решений не существует тк ~~2 > 2~~

возможна: $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 0$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \\ \text{но } 2 \cdot \frac{2^2}{7^2} + \frac{2 \cdot 2}{7} + 1 > 0 \text{ неверно} \end{cases}$$

Значит переход равносильен

$$\frac{2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1)}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$\frac{2 - 7x}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} = 2 - 7x$$

$$(2 - 7x) \left(\frac{1 - (\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1})}{\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} \right) = 0$$

(1) $2 - 7x = 0$

(2) $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$

(1) $x = \frac{2}{7}$; $0 < \frac{2}{7} < 1 \Rightarrow \text{логx}$

(2) введем в квадрат

$$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$$

$$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = -1 + 7x \Rightarrow 7x - 1 \geq 0; x \geq \frac{1}{7}$$

введем в квадрат: $4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 14x + 1$

$$41x^2 - 22x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}; \quad \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7}; \quad \frac{77 - 14\sqrt{61}}{36} < \frac{1}{7}; \quad \frac{18\sqrt{7\sqrt{61}}}{\sqrt{18^2} \sqrt{49 - 61}}$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm 2\sqrt{61}}{41}; \quad \frac{11 - 2\sqrt{61}}{41} < \frac{1}{7}; \quad \frac{77 - 14\sqrt{61}}{36} < \frac{1}{7}; \quad \frac{18\sqrt{7\sqrt{61}}}{\sqrt{18^2} \sqrt{49 - 61}}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} > \frac{1}{7}, \text{ верно}$$

значит не логx

$$2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

$$(2x - 3)(x - 1) \geq 0$$

$$\frac{2x - 3}{x - 1} \geq 0$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} < \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41} = \frac{11 + 16}{41} = \frac{27}{41} < 1 \Rightarrow \text{логx}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \text{ только при } x \geq 0 \Rightarrow \text{логx}$$

Ответ: $x = \frac{2}{7}$ или $x = \frac{11 + 2\sqrt{61}}{41}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

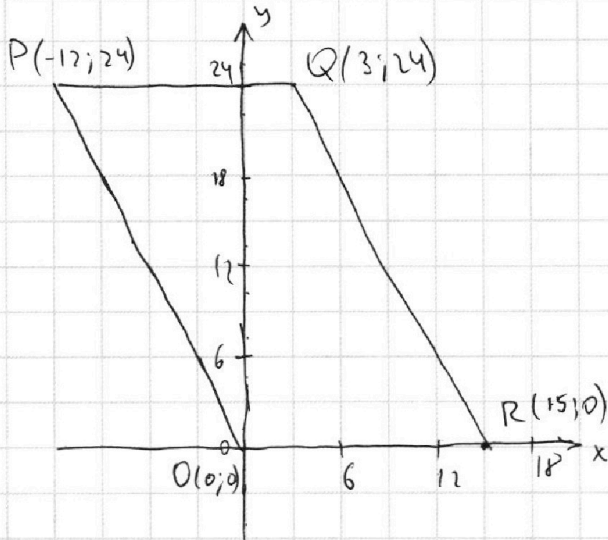
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5



Найдем уравнение прямой QR:

$$\frac{x-3}{15-3} = \frac{y-24}{0-24}$$

$$\frac{x-3}{12} = \frac{24-y}{24} \quad | \cdot 24$$

$$2x-6 = 24-y$$

$$2x+y = 30$$

$$PQ: y = 24$$

$$PO: y+2x = 0$$

$$OR: y = 0$$

Получим для всех точек

$$\begin{cases} 0 \leq y+2x \leq 30 \\ 0 \leq y \leq 24 \end{cases}$$

$$(2x_2 + y_2) - (2x_1 + y_1) = 12 \leftarrow \text{«разность» двух прямых вида}$$

где $2x_1 + y_1 = c$ и $2x_2 + y_2 = c + 12$

где c пробегает от 0 до 18

$$\text{Пусть } 2x_1 + y_1 = c \geq 0 \Rightarrow 0 \leq c \leq 18$$

$$2x_2 + y_2 = c + 12 \leq 30$$

$$\text{при этом, т.к. } \begin{cases} x_1 \in \mathbb{Z} \\ y_1 \in \mathbb{Z} \\ x_2 \in \mathbb{Z} \\ y_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$$

и кол-во пар (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равно:

$$\text{кол-во} = \sum_{c=0}^{18} \text{при } c: 2 \cdot |x_{\text{ос}} - x_{\text{п}}| + 1; \quad x_{\text{ос}} = \frac{c}{2}$$

$$c: 2 \quad |x_{\text{ос}} - x_{\text{п}}| = \left| \frac{c}{2} - \frac{c}{2} - 12 \right| = 12$$

$$\text{кол-во} = \sum_{c=0}^{18} \left(\left| \frac{c}{2} - \frac{c}{2} + 12 \right| + 1 \right) = \sum_{c=0}^{18} 13 = 19 \cdot 13 = 247$$

В квадрате т.к. для любой точки прямой $2x+y=c$ можно выбрать любую точку прямой $c+12=2x+y$ той же четности

$$\text{кол-во} = 9 \cdot 12^2 + 10 \cdot 13^2 = 2986$$

Ответ: 2986

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 Реш:

(1) $y = ax + 10b$

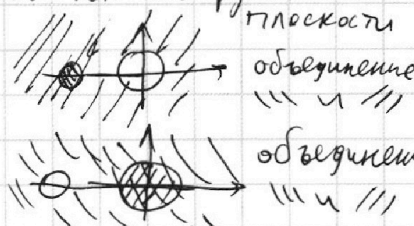
(2) $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow$ ~~линии~~ **линии** ~~касания~~ **касания** ~~отличаются~~ **отличаются** ~~с точностью до совпадения~~ **с точностью до совпадения** ~~при равенстве~~ **при равенстве**

~~Рассмотрим~~

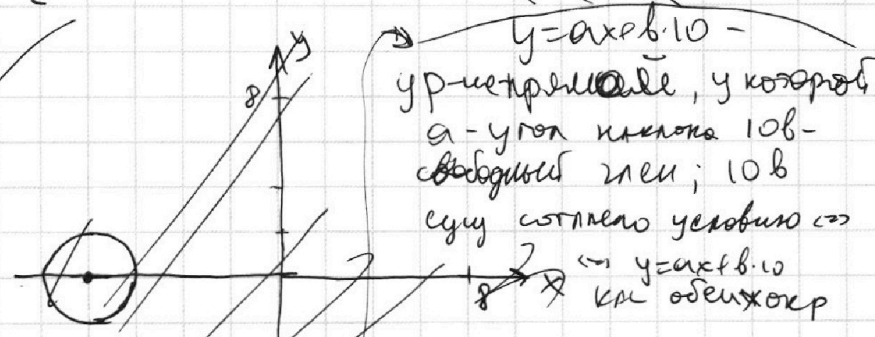
Рассмотрим

равносильно:

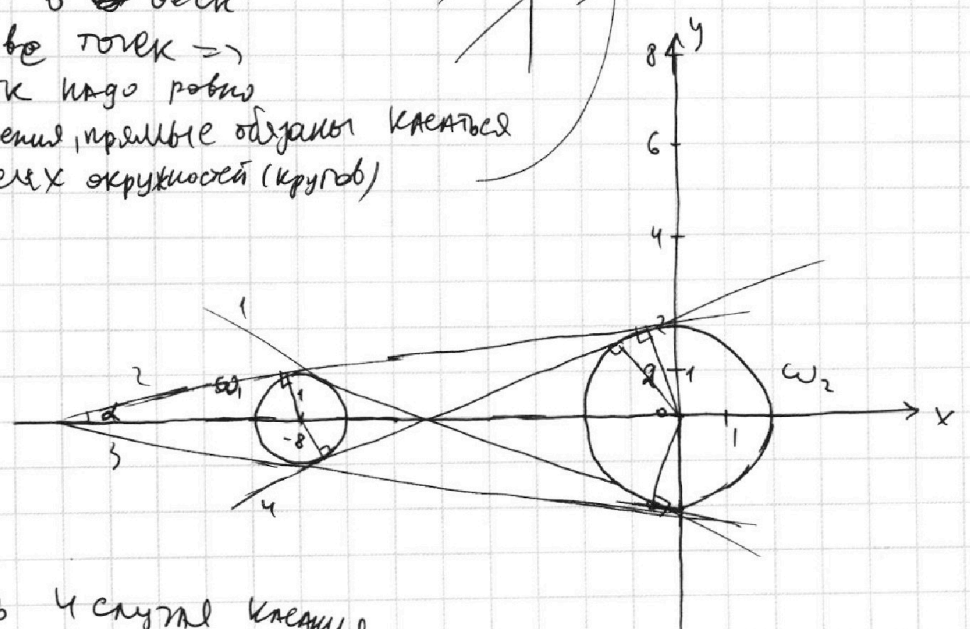
$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ (x^2 + y^2) \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Круг } (O(-8; 0); R=1) \\ \text{Круг } (O(0; 0); R=2) \end{cases}$$



Заметим, что если прямая не касается окружности (круга), то она пересекает круг в ~~двух~~ **двух** ~~точках~~ **точках** \Rightarrow \Rightarrow тк надо равно 2 решения, прямые **обязаны** касаться **обеих** окружностей (кругов)



$y = ax + b \cdot 10$ - уравнение, у которого a - угол наклона $10b$ - свободный член; $10b$ эту сумму условию \Leftrightarrow $y = ax + b \cdot 10$ как обобщение



Есть 4 случая касания 2х окружностей (2 внешние и 2 внутр)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1-x^2}$$

Тк окружность симметрична оси $Ox \Rightarrow$

\Rightarrow можно рассмотреть только 1 внешнюю

и 1 внутреннюю касательную, остальные

два ответа - два промежутка с противоположными

знаком, тк в этом случае Ox - биссектриса
углов образованных внешними или

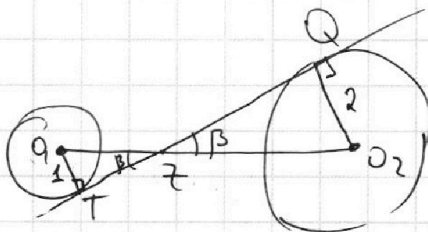
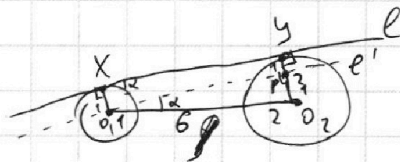
внутренними касательными

расстояние

и/у центров: $OP = 8$

$$e' \parallel \ell; PO_2 = 2 - 1 = 1 = O_1T - O_1X$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PO_2}{PO_1} = \frac{1}{\sqrt{6^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{35}}$$



$$O_2O_1 = 8$$

$\Delta O_1Tz \sim \Delta O_2Qz$ тк $\angle O_1zT = \angle O_2zQ$ - вертикальные \Rightarrow
 $90^\circ = \angle O_2zQ = \angle O_1zT$

$$\Rightarrow \frac{O_2z}{zO_1} = \frac{O_2Q}{TO_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow zO_2 = \frac{1}{2} O_2O_1 = \frac{8}{2} = 4$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{O_1T}{Tz} = \frac{1}{\sqrt{9z^2 - Tz^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 1}} = \frac{3}{\sqrt{64 - 9}} = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

Ответ:
$$\begin{cases} a = \pm \frac{3}{\sqrt{55}} \\ a = \pm \frac{1}{\sqrt{35}} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

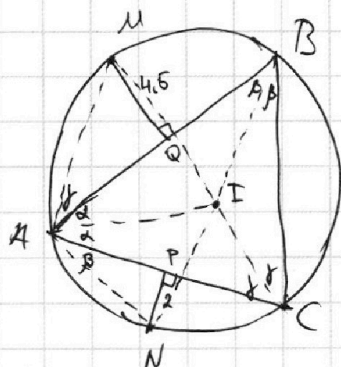
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7



Дано: сфера ABC
 M, N - сер дуг AB и AC соотв
 I - центр шара
 $\rho(N, AC) = 2$; $\rho(M, AB) = 4,5$
 K-ти: AI

Р-ие:

Биссектрисы в ΔN в \perp точке, в точке I, теорема о дуге.
 Биссектриса проходит через середину соотв дуг, т.е.
 $M \in CI$; $N \in BI$

Пусть $\angle A = 2\alpha$; $\angle B = 2\beta$; $\angle C = 2\gamma$ тогда $\alpha + \beta + \gamma = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (углы в Δ)
 $\beta = \angle BNI = \frac{1}{2} \angle CN$; $\angle MAB = \frac{1}{2} \angle BM = \angle MCB = \delta$

в ΔANP : $AN = \frac{PN}{\sin \beta} = \frac{2}{\sin \beta}$; в ΔAMQ : $AM = \frac{MQ}{\sin \beta} = \frac{4,5}{\sin \beta}$

$\angle ANI = \angle APB = \angle ACB = 2\gamma$

$\angle AMI = \angle AMB = \angle ABC = 2\beta$

По лемме о треугольнике: $MI = MA = \frac{4,5}{\sin \beta}$
 $NI = NA = \frac{2}{\sin \beta}$

По теореме косинусов:

$$\Delta AMI: AI^2 = AM^2 + MI^2 - 2AM \cdot MI \cdot \cos 2\beta = 2AM^2(1 - \cos 2\beta) = 4AM^2 \sin^2 \beta$$

$$\Delta ANI: AI^2 = AN^2 + NI^2 - 2AN \cdot NI \cdot \cos 2\gamma = 2AN^2(1 - \cos 2\gamma) = 4AN^2 \sin^2 \gamma$$

Тогда: $\begin{cases} AI = 2AM \sin \beta \\ AI = 2AN \sin \gamma \end{cases}$ тк $\sin x$ при $x \in [0; \pi]$: $\sin x > 0$

(1) $AI = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot 9$

(2) $AI = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot 4$

$$AI = \sqrt{AI^2} = \sqrt{9 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot 4 \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6.$$

Ответ: $AI = 6$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Зерновика

$$5+4+6 = 155$$

$$2 \cdot \frac{(1+2\sqrt{6})^2}{4}$$

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 2} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

$$ab \geq 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc \geq 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac \geq 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$\begin{cases} 10+4+7=25 \\ 10+15+7=32 \end{cases} \quad (2x-3)(x-1) \geq 0$$

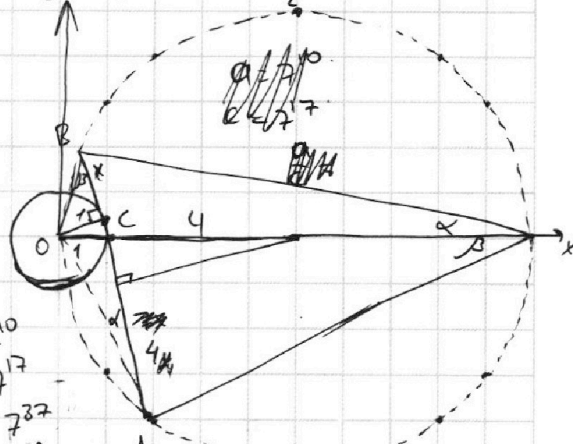
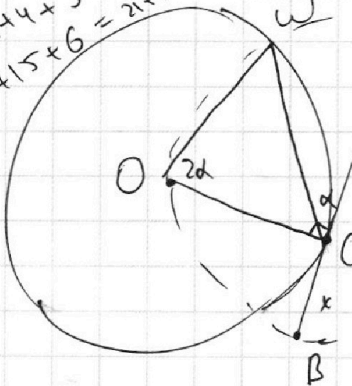
$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow abc \geq 2^{20+16+14+1} \cdot 7^{10+10+30+7} = 2^{51} \cdot 7^{61}$$

$$abc \geq 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{1}{7y} \\ \tan \beta = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$R \cdot AB = 2R \sin(\alpha + \beta) \cdot b = 4+4+4+5+5+5 = 17+15+6 = 38$$



$$ab = x \cdot 2^{14} \cdot 7^{10}$$

$$bc = y \cdot 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ca = z \cdot 2^{20} \cdot 7^{37}$$

$$abc = xyz \cdot (2^{25})^2 \cdot (7^{32})^2 = 2^{50} \cdot 7^{64}$$

$$y = ax + 10b$$

$$abc = \sqrt{2xyz} \cdot 2^{25} \cdot 7^{32}$$

$$a = \sqrt{\frac{2xz}{y}} \cdot 2^8 \cdot 7^5$$

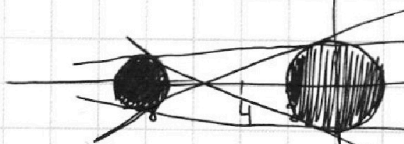
$$b = \sqrt{\frac{2xy}{z}} \cdot 2^5 \cdot 7^5$$

$$c = \sqrt{\frac{2yz}{x}} \cdot 2^{11} \cdot 7^{22}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1 \\ (x+8)^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1 \\ (x+8)^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$y = ax + 10b$$



$$MI = MA = \frac{4.5}{\sin \gamma}$$

$$AI = 2 \cdot \frac{4.5}{\sin \gamma} \cdot \sin(\alpha + \beta) = 2 \cdot \frac{2}{\sin \beta} \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$2 \cdot \frac{2}{\sin \beta} \cdot \sin \beta \geq 4 \sin \gamma$$

$$abc = 2^{26} \cdot 7^{37} k^2$$

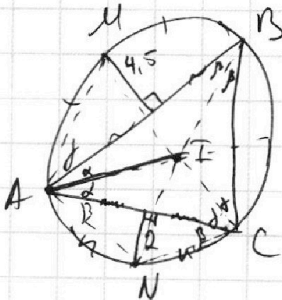
$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} k^2$$

$$\begin{aligned} 9 \sin \beta \cos \beta &= 4 \cos \gamma \sin \gamma \\ 9 \sin 2\beta &= 4 \sin 2\gamma \end{aligned}$$

$$AI = \frac{9 \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$$

$$b = 2^6 \Rightarrow c \geq 2^{11} \cdot 7^{17} \Rightarrow a \geq 2^9 \cdot 7^{20}$$

$$a = 2^9 \cdot 7^{20}$$



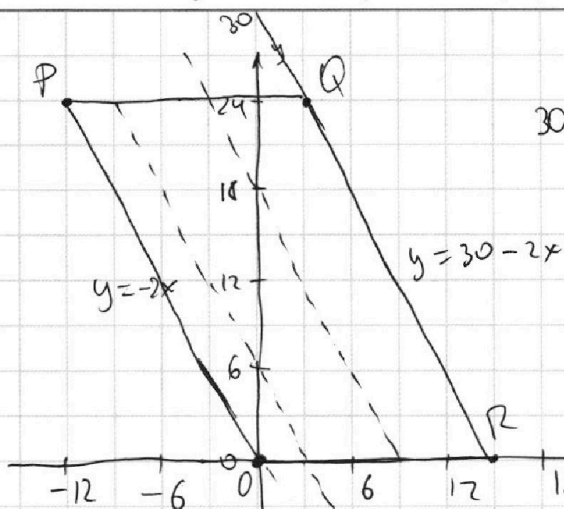
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$30x + 15y = 30 \cdot 15$
 $2x + y = 30$
 $(2x_1 + y_1) - (2x_2 + y_2) = 12$
 $\begin{cases} y_0 \leq 24 \\ 2x + y \leq 30 \\ 2x + y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$ac = 2 \cdot 20 \cdot 37$

$8ab \geq 2\sqrt{ab}$

$4\sqrt{ab} \geq 1$
верно

$(a, b) = 1$

$(a+b; (a+b)^2 - 8ab) = (a+b; 8ab)$

1) $a \neq 1; b = 1$

b1

$8ab \geq 4a + 2b = 1$

2) b1

b1

$8ab - 4a$

$1890 + 144 \cdot 9 = 1; 7$

b1

$4a(2b-1) \geq 2b-1$

~~6=1~~ =

$2x + y = 1$

$900 + 360 + 36 = 1296$

$\frac{8}{50 - 6 \cdot 7}$

$(4a-1)(2b-1)$

$6 \cdot 7 = 42$

$y = 24$
 $x = -\frac{23}{2} = -11,5$

$\frac{1+15}{1+225-6 \cdot 15} = \frac{16}{1+15 \cdot 9} = \frac{16}{136} = \frac{16}{136}$

135

$136 = 8 \cdot 17$

$1296 + 1690 = 11 \rightarrow 0$

$= 6 + 180 + 800 + 2000 \neq 2$

$-11,5 \rightarrow 0,5$

$\frac{150}{6} = 25$

$= 2986$