



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-12; 24)$, $Q(3; 24)$ и $R(15; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 4,5 и 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^{14} \cdot 7^{10} \quad a, b, c \in \mathbb{N} \quad \min abc - ?$$

$$bc: 2^{17} \cdot 7^{17}$$

$$ac: 2^{20} \cdot 7^{37}$$

Если $ab: 2^{14} \cdot 7^{10}$, то его можно представить как $ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k$;
 $k \in \mathbb{N}$

Также пусть $bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot m$; $m \in \mathbb{N}$

пусть $ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot n$; $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot m \\ ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot n \end{cases}$$

Перемножим все 3 уравнения системы

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk$$

$$abc = \sqrt{2^{51} \cdot 7^{64} \cdot mnk} = 2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2mnk}$$

Минимальное значение mnk , такое, что $2^{25} \cdot 7^{32} \sqrt{2mnk} \in \mathbb{N}$

это 2. Тогда $\min abc = 2^{26} \cdot 7^{32}$

$$\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{32}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Задача~~ Из этого равенства следует, что $8ab : m$. Но ни a , ни b не делятся на m , значит $8 : m$, а отсюда

максимальное значение, принимаемое m

это 8. Оно достигается например при $a=3$ $b=5$.

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{a}{b}$ - несократимая

$$\frac{a+b}{a^2-bab+b^2}$$

max m , такое, что $a+b \equiv m$ и $a^2-bab+b^2 \equiv m$ - ?

Пусть есть такое m . Тогда верно следующее

$$\begin{cases} a+b \equiv 0 \\ a^2-bab+b^2 \equiv 0 \end{cases} \pmod{m}$$

$a \equiv -b$. Это означает, что ни a , ни b на m делиться не должны, ведь если a делится, то $a \equiv 0 \equiv -b$, а это противоречит несократимости $\frac{a}{b}$.

Представим $a+b = km$, $k \in \mathbb{N}$

$$a^2-bab+b^2 = nm, \quad n \in \mathbb{N}$$

Тогда имеем $\begin{cases} a+b = km \\ a^2-bab+b^2 = nm \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2+2ab+b^2 = k^2m^2 \\ a^2-bab+b^2 = nm \end{cases} \quad \downarrow -$$

$$3ab = k^2m^2 - nm = m(k^2m - n)$$

Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

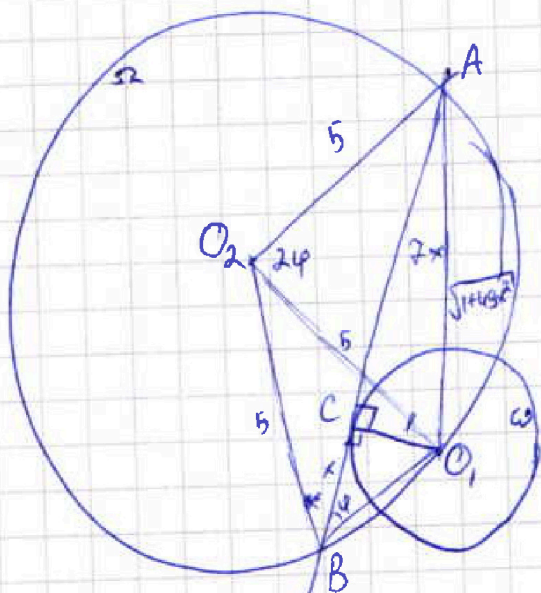
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

8



$$R_{\Omega} = 5$$

$$R_{\omega} = 1$$

$$AC : CB = 7 \quad AB \text{ кас. } \omega$$

$$AB = ?$$

Решение:

1) Пусть $AB = 8x$, тогда $AC = 7x$ $BC = x$

~~Пусть $\phi = \angle O_1BC$~~ Пусть O_1 - центр ω ; O_2 - центр Ω

Пусть $\phi = \angle O_1BC$

2) т.к. AB - касательная к ω $\angle O_1CA = 90^\circ$; $\angle O_1CB = 90^\circ$

3) по теореме Пифагора в $\triangle AO_1C$; в $\triangle CO_1B$

$$AO_1^2 = CO_1^2 + AC^2$$

$$O_1B^2 = BC^2 + O_1C^2$$

$$AO_1 = \sqrt{1 + 49x^2}$$

$$O_1B = \sqrt{1 + x^2}$$

4) т.к. $\angle O_1O_2A$ - центральный для дуги $\cup AO_1$, на которую опирается вписанный $\angle O_1BA = \phi$, то $\angle O_1O_2A = 2\phi$

Продолжение на обороте



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5) \sin \varphi = \frac{O_1 C}{O_1 B} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ в } \triangle O_1 C B$$

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$6) O_1 O_2 = O_2 A = 5 \text{ как радиусы } \Omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle O_1 O_2 A - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle O_2 O_1 A = \angle O_2 A O_1 = 90^\circ - \varphi$$

7) по теореме косинусов в $\triangle O_1 O_2 A$

$$O_2 A^2 = O_1 O_2^2 + A O_1^2 - 2 O_1 O_2 \cdot A O_1 \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$$

$$25 = 25 + 1 + 49x^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{1+49x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{10\sqrt{1+49x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1+49x^2$$

$$\frac{10}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+49x^2}$$

$$\frac{100}{1+x^2} = 1+49x^2$$

$$100 = 1+49x^2 + x^2 + 49x^4$$

$$49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1$$

$$x^2 = -\frac{99}{49} \text{ нет корней}$$

$$\text{т.к. } AB = 8x \quad AB = 8$$

Ответ: 8

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Обратная замена

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 = 1 + 2x^2 + 2x + 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 2x + 1} \leq 1 \\ -7x + 1 = -2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x \leq 0 \\ 49x^2 - 14x + 1 = 8x^2 + 8x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1) \leq 0 \quad \xrightarrow[-1]{0} \quad x \in [-1; 0] \\ 41x^2 - 22x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$D = 484 + 12 \cdot 41 = 976$$

$$x_{1,2} = \frac{22 \pm \sqrt{976}}{82} = \frac{22 \pm 2\sqrt{244}}{82} = \frac{11 \pm \sqrt{244}}{41}$$

$$x = \frac{11 + \sqrt{244}}{41}$$

$$x = \frac{11 - \sqrt{244}}{41}$$

не подходит под $x \in [-1; 0]$

Ответ: $\frac{11 - \sqrt{244}}{41}; \frac{2}{7}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$$

$$\text{ОДЗ: } 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \quad (x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0 \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow \end{array}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \quad D = 4 - 8 < 0 \quad \text{всегда верно}$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

~~т.к. $2x^2 - 5x + 3 - (2x^2 + 2x + 1) = 2 - 7x$ можно~~

~~заменить $\sqrt{2x^2}$~~

~~Заменим $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = a$~~

~~$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = b$~~

~~$2 - 7x = 2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 = a^2 - b^2$~~

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$1) a - b = 0$$

$$a = b$$

Обр. замена $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$7x = 2 \quad \underline{x = \frac{2}{7}}$$

$$2) a + b = 1$$

Продолжение на обратной стороне

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a_1 = \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$a_2 = \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{\sqrt{55}}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{3}{\sqrt{55}} i \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение случая 2

$$\angle B_1 < O_1 B B_1 = \angle O_2 B C_1$$

$$\angle B C_1 O_2 = \angle B B_1 O = 90^\circ \text{ по свойству касательной к } \odot O_1$$

Тогда $\triangle B O_1 B_1 \sim \triangle B O_2 C_1$ с коэф. $\frac{O_2 C_1}{O_1 B_1} = 2$

Пусть $B B_1 = x$, тогда по подобию $B C_1 = 2x$

По теореме Пифагора в $\triangle B O_2 C_1$; в $\triangle B O B_1$,

$$B O_2^2 = O_2 C_1^2 + B C_1^2$$

$$B O_1^2 = B_1 O_1^2 + B B_1^2$$

$$B O_2 = 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$B O_1 = \sqrt{1 + x^2}$$

Так как расстояние между центрами окружностей равно 8

$$B O_2 + B O_1 = 8$$

$$3\sqrt{x^2 + 1} = 8$$

$$x^2 + 1 = \frac{64}{9}$$

$$x^2 = \frac{55}{9}$$

$$x = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

~~Так как~~ ~~Аналог~~ Так как a и q в уравн. ~~прямой~~

$y = ax + b$ это также её как пока $tg \alpha$ есть

искомый a и $tg(180^\circ - \alpha)$ это a для второй

прямой

Продолжение на обороте

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

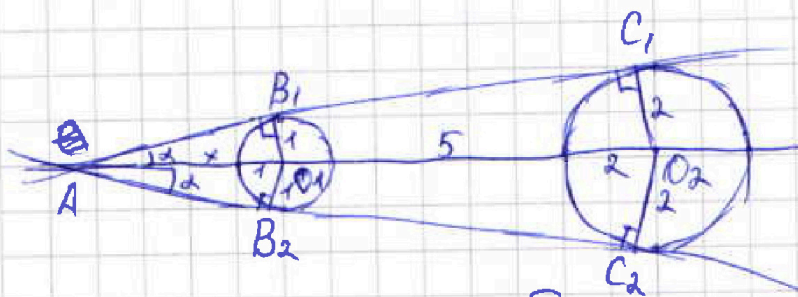
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Касаясь прямой и двух окружностей может происходить только так, как показано на чертеже.

У нас 2 различные параллельные или прямые

1) Рассмотрим ~~окружности~~ прямые, пересекающиеся в A . A будет лежать на оси Ox , так как ~~так как~~

~~должно выполняться свойство касательных для~~



Так как центры обеих окружностей должны быть равноудалены от каждой из этих прямых. Тогда Ox есть биссектриса угла $\angle A$, т. к. центры окружностей, лежащие на ней равноудалены от сторон угла.

Пусть $\angle A = 2\alpha$

B_1, C_1 - точки касания одной прямой с окружностями

B_2, C_2 - точки касания второй прямой с окружностями



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

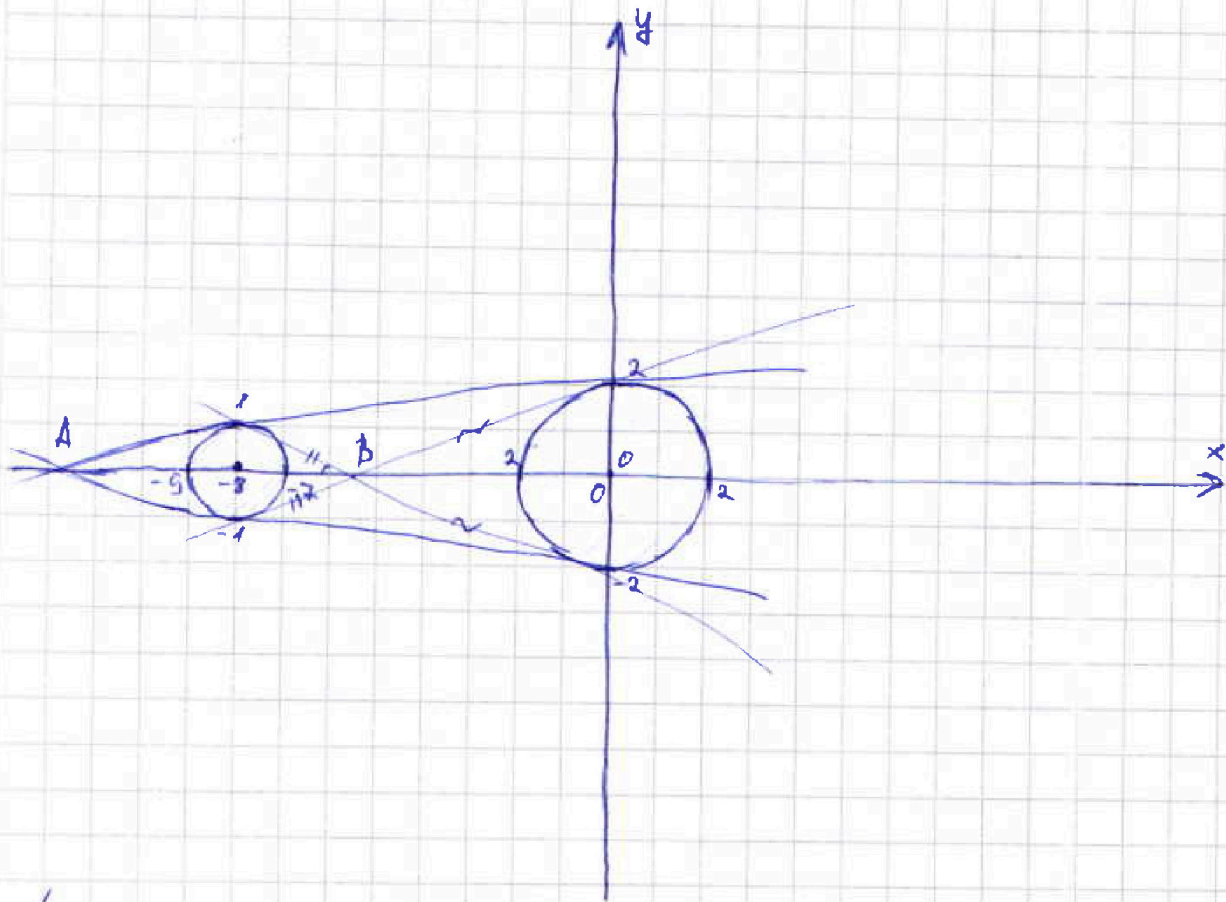
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 & y = ax + 10b \quad (1) \end{cases}$$

$$((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \quad (2)$$

$(x+8)^2 + y^2 = 1$ - окружность с ц. в $(-8; 0)$ $R = 1$

$x^2 + y^2 = 4$ - окружность с ц. в $(0; 0)$ $R = 2$



Система имеет 2 решения, когда прямая $y = ax + 10b$ касается двух окружностей.

Решением пер-ва (2) будут области внутри окружностей, включая их границы

Продолжение на обороте листа

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

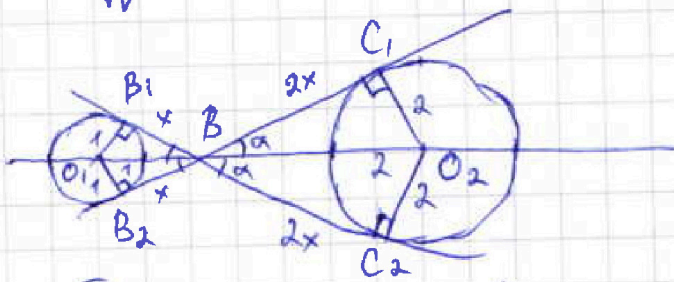
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



искомый α в этом случае это $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{37}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$
Для прямой касательной к окружностям в точках
 B_2 и C_2 искомым α это $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

2) Рассмотрим ~~случай~~, две прямые, пересе-
кающиеся в B . В будет лежать на оси Ox ,
так как центры обеих окружностей должны
быть равноудалены от каждой из этих прямых



Ox есть биссектриса угла

Пусть B_1, C_2 - точки касания одной прямой
с окружностями

B_2, C_1 - точки касания второй прямой
с окружностями

$\angle C_1 B C_2 = 2\alpha = \angle B_1 B B_2$ как вертикальные

Так как BC_1 и BC_2 касательные к Ox -биссект-
риса $\angle C_1 B C_2$ и $\angle B_1 B B_2$

Продолжение на след. листе



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение случая 1

~~sin~~ Пусть расстояние от A до окружности $(x+8)^2 + y^2 = 1$ это x

$\sin \alpha = \frac{1}{x+1}$ для ~~прямоугольного~~ ~~треугольника~~ ~~и~~ ~~треугольника~~ ~~прямоугольного~~ по свойству касательной треугольника AB_1O_1

$\sin \alpha = \frac{2}{9+x}$ для ~~прямоугольного~~ по тому же свойству $\triangle AC_1O_2$

Можем приравнять и получим

$$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{9+x}$$

$$9+x = 2x+2$$

$$x = 7$$

По теореме Пифагора в $\triangle AB_1O_1$

$$AB_1^2 = B_1O_1^2 + AO_1^2$$

$$AB_1 = \sqrt{63}$$

Так как коэффициент a в уравнении прямой ~~это~~ $y = ax + b$ это тангенс угла наклона

Продолжение на обороте листа

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично относительно M , середины $\sphericalangle AB$ и
перпендикуляра MM' по этой же теореме $AM' = BM'$
3) т.к. M - середина $\sphericalangle AB$ CM - биссектриса $\sphericalangle C$ и посто-
му проходит через I , центр вписанной окр. $\triangle ABC$
Аналогично BN - биссектриса $\sphericalangle B$

4) $\sphericalangle CBN = \sphericalangle ABN = \sphericalangle CAN$ как ~~лежащие на одной~~ вписан-
ные, опирающиеся на равные дуги
 $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACM = \sphericalangle BAM$ как вписанные, опирающиеся
на равные дуги

5) Пусть $AC = 2a$, тогда $AN' = CN' = a$
 $AB = 2b$, тогда $AM' = BM' = b$

~~6) по т. синусов в $\triangle ABC$~~

~~$\frac{AC}{\sin B} = \frac{MM'}{\sin A} = 4,5$~~

6) по теореме Пифагора в $\triangle AMM'$; в $\triangle NAN'$

$$AM^2 = MM'^2 + AM'^2$$

$$NA^2 = N'A^2 + NN'^2$$

$$AM = \sqrt{4,5^2 + b^2}$$

$$NA = \sqrt{a^2 + 4}$$

Продолжение на следующей странице



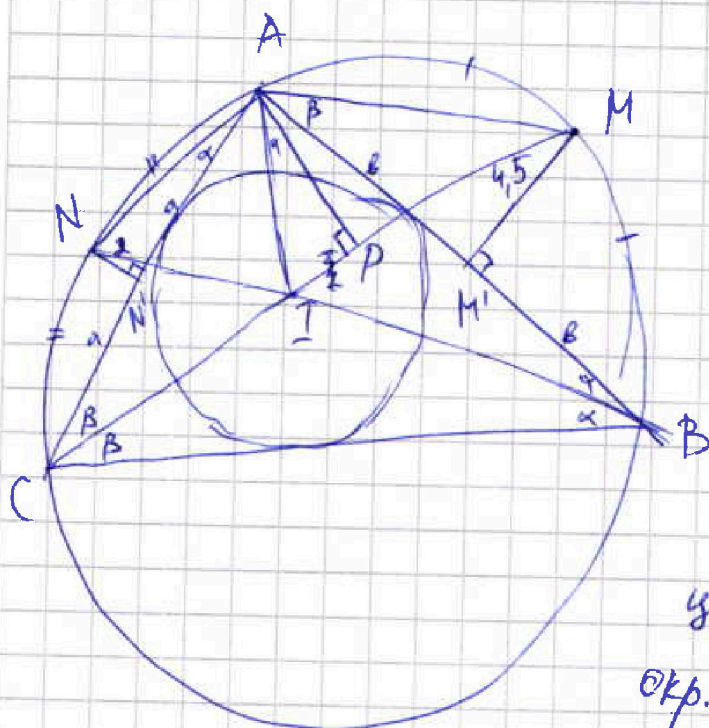
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



M - середина $\sphericalangle AB$

N - середина $\sphericalangle AC$

расстояние от

M до $AB = 4,5$

от N до $AC = 2$

расстояние от A до

центра вписанной

окр. $\triangle ABC$ - ?

Решение

1) пусть I - центр вписанной окружности $\triangle ABC$

$\angle NAC = \alpha$

MM' - расстояние от M до AB

$\angle BAM = \beta$

NN' - расстояние от N до AC

2) NN' перпендикуляр к хорде AC , описанной окружности $\triangle ABC$, проходящей через середину $\sphericalangle AC \Rightarrow$

\Rightarrow по теореме о радиусе, ~~где~~ перпендикулярном хорде $AN' = CN'$ и прямая NN' содержит центр

описанной около $\triangle ABC$ окружности

В продолжение на обороте листа

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$7) \sin \beta = \frac{MM'}{AM} = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2 + b^2}} \quad \text{в } \triangle AMM'$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{4,5^2 + b^2}} = \frac{AM'}{AM}$$

$$\sin 2\beta = \frac{9b}{4,5^2 + b^2}$$

$$8) \sin \alpha = \frac{NN'}{AN} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 4}} \quad \text{в } \triangle ANN'$$

$$\cos \alpha = \frac{AN'}{AN} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4a}{a^2 + 4}$$

9) по т. синусов для $\triangle ABC$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$\frac{AB}{\sin 2\beta} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{2b(4,5^2 + b^2)}{9b} = \frac{2a(a^2 + 4)}{4a}$$

$$4,5^2 \cdot 4 + 4b^2 = 9a^2 + 36$$

$$b^2 = \frac{9}{4}a^2 + 9 - 4,5^2$$

10) дополнительное построение $AP \perp CM$

11) т. к. AI проходит через I -центр вписанной окружности $\triangle ABC$, то AI - биссектриса $\angle BCA$

$$12) \angle BCA = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta$$

$$\angle CAI = \frac{1}{2} \angle BCA = 90^\circ - \alpha - \beta \quad \text{Продолж. на обороте}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$13) \angle CAP = 90^\circ - \angle ACP = 90^\circ - \beta$$

$$\angle IAP = \angle CAP - \angle CAI = 90^\circ - \beta - 90^\circ + \beta + \alpha = \alpha$$

$$14) \sin \beta = \frac{AP}{AB} \text{ в } \triangle APC$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2 + 6^2}}$$

Подставим 6^2 из пункта 9 решения

$$\frac{AP}{AB} = \frac{4,5}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + 9}} = \frac{4,5}{3\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} \Rightarrow AP = \frac{4,5 \cdot 2a}{3\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$$

$$15) \cos \alpha = \frac{AP}{AI} \text{ в } \triangle API$$

$$\frac{AP}{AI} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4}} = \frac{2a}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$$

Подставим AP из пункта 14 решения

$$\frac{3a}{AI \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}} = \frac{a}{2\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 1}}$$

$$\frac{3}{AI} = \frac{1}{2}$$

$$AI = 6$$

Ответ: 6

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$y = ax + 10b$
 $x^2 + y^2 = 4$~~

a

$\sqrt{1+x^2} - 1 = 2\sqrt{1+x^2} - 2 = 8$

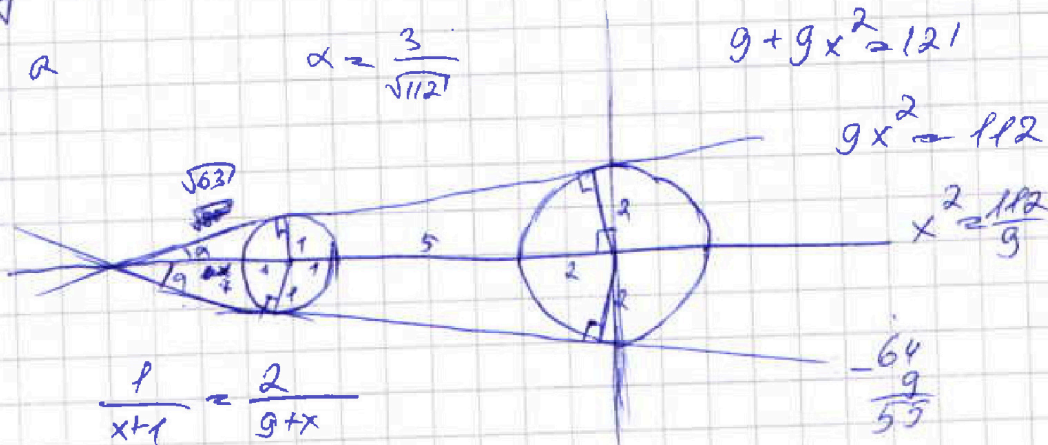
$3\sqrt{1+x^2} = 10$ ~~10~~

$a = \frac{3}{\sqrt{112}}$

$9 + 9x^2 = 121$

$9x^2 = 112$

$x^2 = \frac{112}{9}$



$\frac{1}{x+1} = \frac{2}{9+x}$

$\frac{-64}{9}$
 $\frac{53}{53}$

1

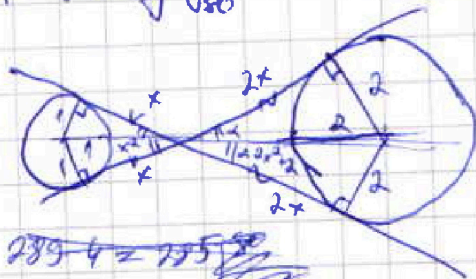
~~$9+x = 2x+2$~~ $x = 87$

~~$a = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{80}}$~~

~~$a = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{80}}$~~

$\frac{2524}{9}$

$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
 ~~$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$~~



~~$5+3x^2 = 8$~~

$x^2 = 1$ $x = 1$

~~$a = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{7}}$~~

~~$x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$
 $x^2 + 16x + 61$~~

$a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$

$(a+1)x^2 + 20abx + 100b^2 - 4 = 0$
 $(a+1)x^2 + (16+20ab)x + 100b^2 + 63 = 0$

$100b^2 - 4 = k^2$

$100b^2 + 63 = l^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.
 Отметьте крестиком номер задачи,
 решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
 страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a+b}{a^2 - bab + b^2}$$

$\frac{a}{b}$ — косодр

$$\text{НОД}(a+b; a^2 - bab + b^2)$$

$$\frac{a^2 - bab + b^2}{a+b} = a - bv + \frac{8b^2}{a+b}$$

$a - bv$ $\frac{8b^2}{a+b}$

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{(a+b)^2 - 8ab}{a+b}$$

$$a+b - \frac{8ab}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{8b^2} = \frac{a}{8b} + \frac{1}{8b}$$

$(a; b) = 1$

$$\frac{(a+b)^2 - 8a}{\frac{a}{b} + 1}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - bab + b^2}$$

$\begin{matrix} a=3 \\ b=5 \end{matrix}$

$a = \frac{3}{8}x$

$a^2 = \frac{9}{64}x^2$ $x^2 = \frac{64}{9}a^2$

$a \equiv -b$
 $ab \equiv -b^2$

$y = ax + 10b$

$9 - 6 \cdot 3 \cdot 5 + 25 = \frac{81}{25} - \frac{90}{25} + \frac{25}{25} = \frac{16}{25}$

$y = \frac{3}{8}x + 2$

$\begin{cases} a+b \equiv 0 \\ a^2 - bab + b^2 \equiv 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b = km \\ a^2 - bab + b^2 = hm \end{cases} \begin{cases} 2 = 10b \\ -1 = -8a + 10b \end{cases}$

$b \equiv a \pmod{m}$

$9 - 6 \cdot 3 \cdot 5 + 25 = 34 - 90 = -56$

$\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = k^2 m^2 \\ a^2 - bab + b^2 = hm \end{cases} \begin{cases} -1 = -8a + 2 \\ 8a = 3 \end{cases} \begin{matrix} a = \frac{3}{8} \\ b = \frac{2}{10} \end{matrix}$

$8ab = m(k^2 m - h) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + \frac{9}{64}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 4 \end{cases}$

$\frac{64}{3}$

$8ab \equiv m$

$x^2 + \frac{9}{64}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 4$

$8ab \equiv 1$

$x \left(\frac{23}{64}x + \frac{3}{2} \right) = 0$

$x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{64}{23} = -\frac{96}{23}$

$8ab \equiv 0$

$\begin{cases} y = ax + 10b \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y = ax + 10b \\ (x+8)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$8ab \equiv 0$

$m \equiv 8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

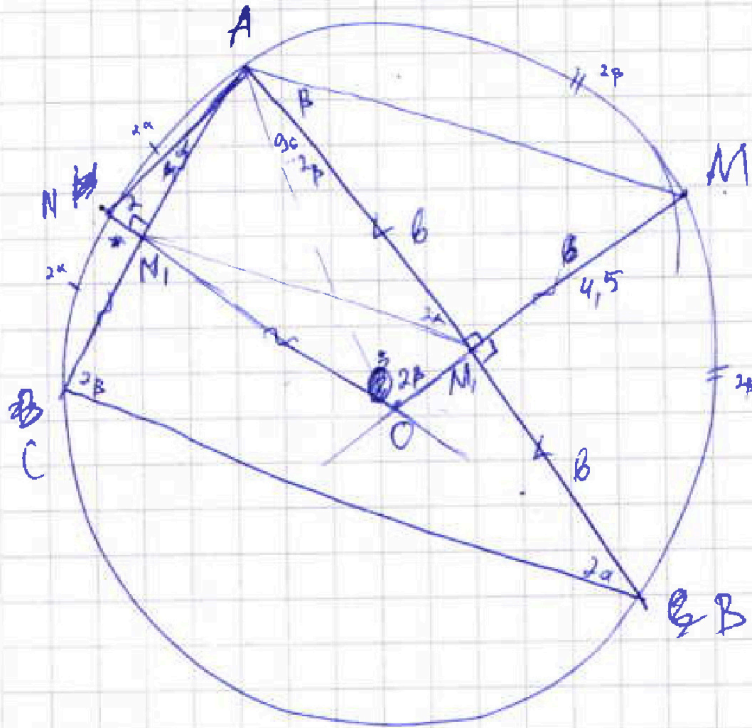
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a = 4,5 \quad b = 2$$

$$R = ?$$

$$360 - \alpha - 2\beta$$

$$360 - 2\alpha - 2\beta$$

$$\sin \beta = \frac{4,5}{\sqrt{4,5^2 + b^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{4,5^2 + b^2}}$$

$$\sin 2\beta = \frac{2 \cdot 4,5 \cdot b}{4,5^2 + b^2}$$

$$\frac{AB}{2 \sin 2\beta} = R$$

$$R = \frac{4,5^2 + b^2}{g}$$

$$\frac{2^2 + a^2}{4} = \frac{b(4,5^2 + b^2)}{g b} = R$$

$$\frac{g b}{4,5^2 + b^2} =$$

$$36 + 9a^2 = 4 \cdot 4,5^2 + 4b^2 \quad b^2 = 9 + \frac{9}{4} a^2 = 9 + 4,5^2$$

5)

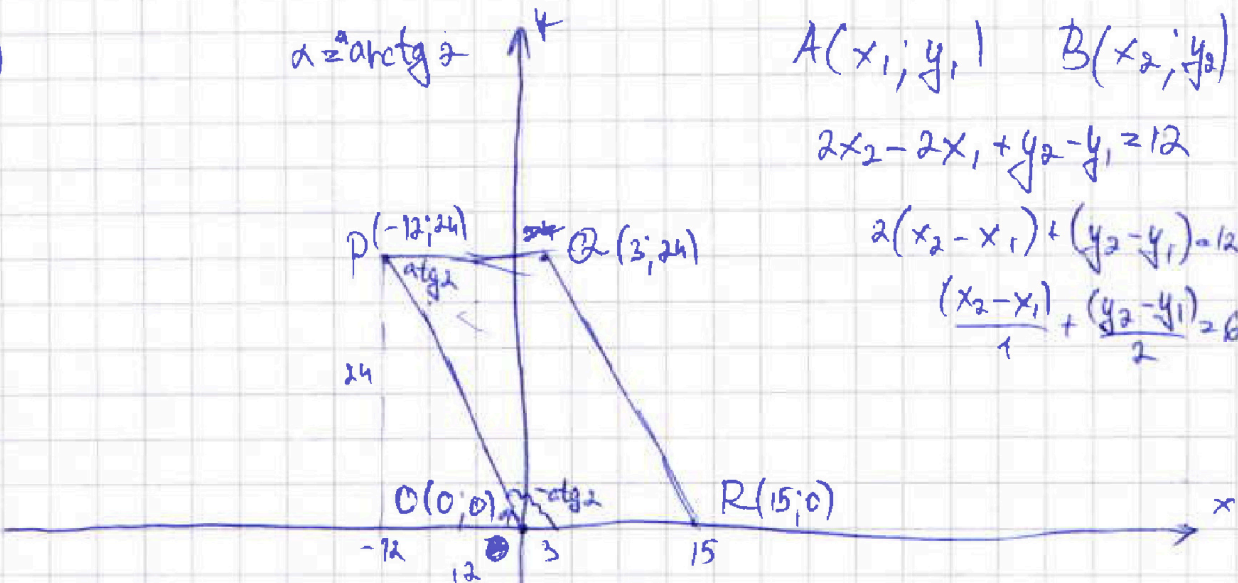
$$\alpha = \arctg 2$$

$$A(x_1; y_1) \quad B(x_2; y_2)$$

$$2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$$

$$2(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 12$$

$$\frac{(x_2 - x_1)}{1} + \frac{(y_2 - y_1)}{2} = 6$$



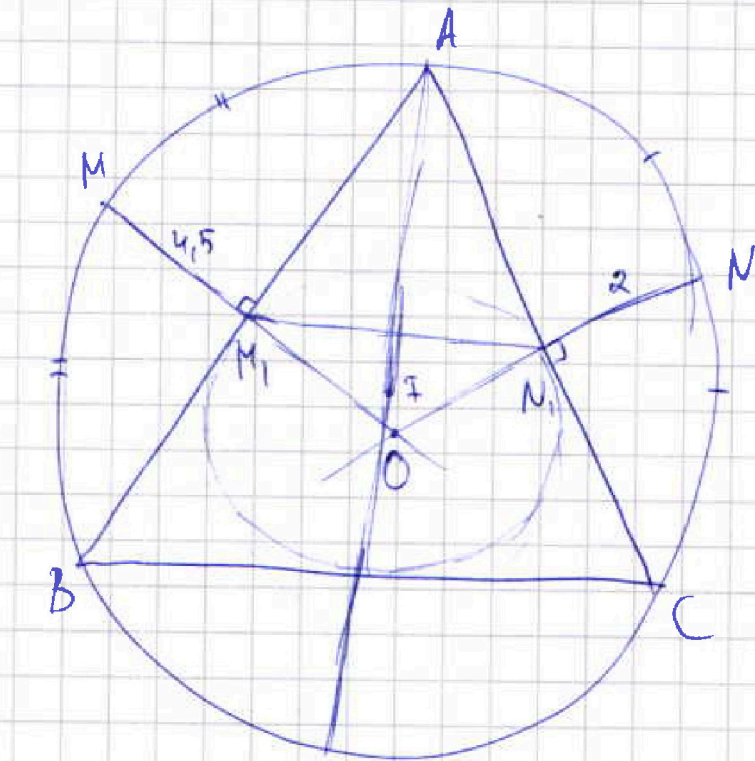
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порука QR-кода недопустима!



1) ~~cos~~ sin, r, sin
в через a

2) ~~sin~~ перпенд к BP

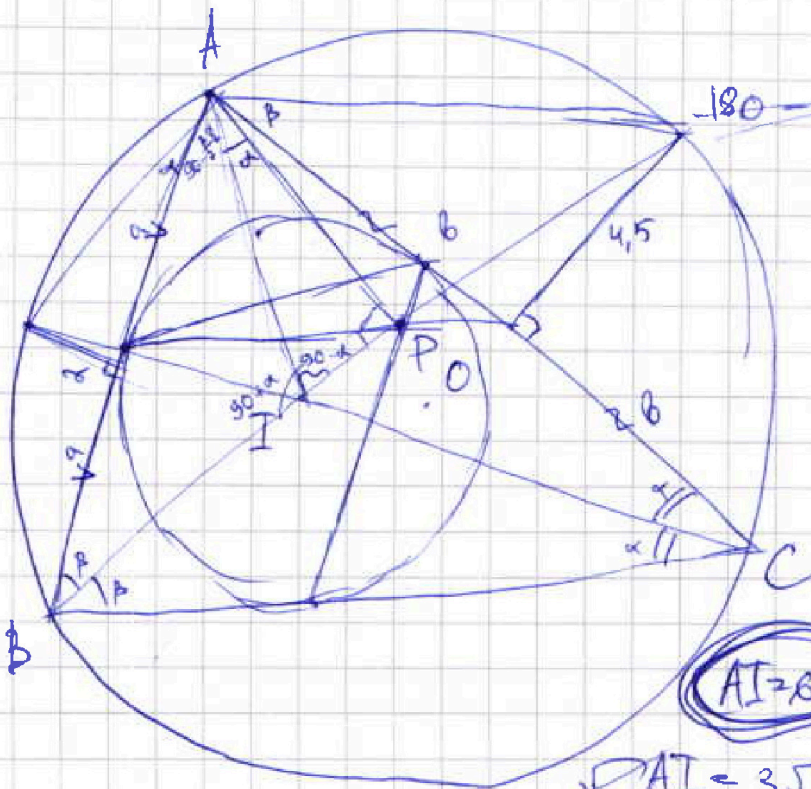
3) $\angle BIA = 90 + \frac{B}{2}$

4) sin $\triangle BAP$, $\triangle IAP$
 $180 - B - \alpha$



$$180 - \frac{\alpha}{2} - 90 + \frac{B}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

~~$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}}$$~~



$$180 - 90 + \frac{B}{2} + \frac{\alpha}{2} - B = 90 + \frac{\alpha}{2} - \frac{B}{2}$$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{4.5}{\sqrt{4.5^2 + 6^2}}$$

$$\frac{AP}{2a} = \frac{4.5}{\sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}}$$

$$AP = \frac{9a}{\sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}}$$

$$\frac{9a}{AI \sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$AI = 3 \frac{a^3}{AI \sqrt{9 + \frac{9}{4}a^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4}}$$

$$\sqrt{AI} = 3 \sqrt{4 \left(\frac{1}{4} a^2 + 1 \right)} = 6 \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + 1}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 1) \quad ab &: 2^{14} \cdot 7^{10} \\ bc &: 2^{17} \cdot 7^{17} \\ ac &: 2^{20} \cdot 7^{37} \end{aligned}$$

min abc - ?

$$ab = 2^{14} \cdot 7^{10} \cdot k$$

$$bc = 2^{17} \cdot 7^{17} \cdot m$$

$$ac = 2^{20} \cdot 7^{37} \cdot h$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{51} \cdot 7^{74} \cdot mnk$$

$$abc = 2^{25} \cdot 7^{37} \cdot \sqrt{2mnk}$$

$$abc = 2^{25} \cdot 7^{37}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 37 \\ 14 \\ \hline 74 \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 27 \\ 37 \\ \hline 74 \\ 37^2 \\ 2 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$m=2 \quad h=1 \quad k=1$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 27 \\ 37 \\ \hline 64 \end{array}$$

2)

$\frac{a}{b}$ несократ

$$\begin{array}{r} 976 \overline{) 4} \\ 8 \\ \hline 17 \\ -16 \\ \hline 16 \end{array}$$

~~max~~ $\text{НОД}(a+b, a^2 - 6ab + b^2) - ?$

$$\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$$

$$\frac{26}{41}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 6ab + b^2 \overline{) a+b} \\ a^2 + ab \\ \hline -7ab + b^2 \\ -7ab - 7b^2 \\ \hline 8b^2 \end{array}$$

$$\frac{180 - 360 + 2a + 2b}{2}$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{7x}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

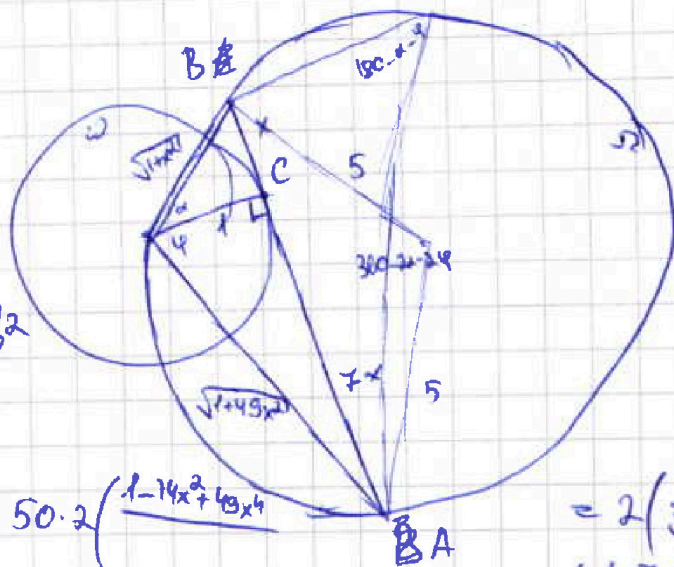
$$1 - \frac{2}{1+x^2}$$

$$R_{\omega} = 1 \quad R_{\Omega} = 5$$

$$x^2 - 6x + 1$$

$8x - ?$

3)



$$a-b = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} \cos(2\pi - 2\alpha - 2\varphi) &= \\ &= \cos(2(\alpha + \varphi)) = \\ &= 2\cos^2(\alpha + \varphi) - 1 = \end{aligned}$$

$$64x^2 = 50 - 50 \cdot 2 \left(\frac{1-7x^2+49x^4}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+49x^2}} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+49x^2}} - \frac{7x \cdot x}{\sqrt{1+x^2} \sqrt{1+49x^2}} \right)^2 - 1$$

$$2x^2 - 5x + 3 - 2x^2 - 2x - 1 =$$

$$2 - 7x + 2$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ 31 \\ \hline 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \\ 12 \\ \hline 52 \\ 41 \\ \hline 93 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 492 \\ 484 \\ \hline 976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 484 \\ 22 \\ \hline 506 \\ 44 \end{array}$$