МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 Пусть $a = 2^{a_2}\cdot 3^{a_3}\cdot 5^{a_5}$; $b = 2^{b_2}\cdot 3^{b_3}\cdot 5^{b_5}$; $c = 2^{c_2}\cdot 3^{c_3}\cdot 5^{c_5}$

$X = a_2+b_2+c_2+k$, $Y = a_3+b_3+c_3+l$; $Z = a_5+b_5+c_5+m$; $abc = 2^X 3^Y 5^Z \Rightarrow$

$\Rightarrow X, Y, Z \to \min$. В идеальном случае $k, l, m = 0$. Рассмотрим этот случай:

$\begin{cases} a_2+b_2=8 \\ a_3+b_3=14 \\ a_5+b_5=12 \end{cases}$ $\begin{cases} b_2+c_2=12 \\ b_3+c_3=20 \\ b_5+c_5=17 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} a_2+c_2=14 \\ a_3+c_3=21 \\ a_5+c_5=39 \end{cases}$ $\{a_2; a_3; a_5; b_2; b_3; b_5; c_2; c_3; c_5\} \in \mathbb{N}_0$

$\{X; Y; Z\} \in \mathbb{N}$

$(a_2+b_2)+(b_2+c_2)+(a_2+c_2) = 2(a_2+b_2+c_2) = 8+12+14 = 34 \Rightarrow a_2+b_2+c_2 = 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow \min X = 17$. При $a_2=5$ $b_2=3$ $c_2=9$ $X=17$ достигается

$(a_3+b_3)+(b_3+c_3)+(a_3+c_3) = 2(a_3+b_3+c_3) = 14+20+21 = 34+21 = 55$

$a_3+b_3+c_3 = 27{,}5 \Rightarrow \min Y = 28$

При $a_3 = 8$ $b_3 = 6$ $c_3 = 14$ $Y = 28$

$(a_5+b_5)+(b_5+c_5)+(a_5+c_5) = 2(a_5+b_5+c_5) = 12+17+39 = 12+56 = 68$; $a_5+b_5+c_5 = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow Z_{\min} = 34$. Решая систему (3), получаем: $c_5 = 22$ $a_5 = 17$ $b_5 = -5$ не уд.

~~Положим $b_5+c_5 = 17+$~~ Пусть $b_5+c_5 = 17+m$

Минимальное допустимое $b_5 = 0$.

Тогда $a_5 = 12$, $c_5 = 27 \Rightarrow m = 10 \Rightarrow Z = 39$

$a = 2^5\cdot 3^8\cdot 5^{12}$ $b = 2^3\cdot 3^6\cdot 5^0$ $c = 2^9\cdot 3^{14}\cdot 5^{27}$

$abc = 2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$

Ответ: $2^{17}\cdot 3^{28}\cdot 5^{39}$.

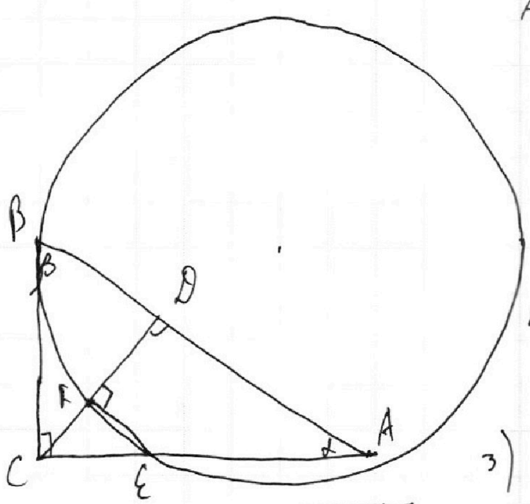
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



$AB \parallel EF$, $\frac{AD}{BD} = \frac{5}{2}$. $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$ – ?

1) Пусть $AD = 5x$, $BD = 2x$.

$CD^2 = BD \cdot AD$, $CD = \sqrt{5x \cdot 2x} = \sqrt{10}x$

2) Так как $AB \parallel EF$, то $\widehat{EFD} + \widehat{FDA} = \pi$

$\widehat{EFD} = 180° - 90° = 90°$

3) Из $\triangle BCD$: $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{4x + 10x} = \sqrt{14}x$

4) Из $\triangle CDA$: $AC = \sqrt{DC^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 25x^2} = \sqrt{35}x$

5) Пусть $\widehat{CAB} = \alpha$, $\widehat{CBA} = \beta$. $\beta + \alpha = 90°$; $\widehat{BCD} = \alpha$; $\widehat{DCA} = \beta$; $\widehat{FEC} = \alpha$.

$\triangle CFE \sim \triangle CDA$ ($\hat{F} = \hat{D} = 90°$ и $\hat{C}$ - общий); $\triangle CDA \sim \triangle BCA$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3. $10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi-2x}{10}$

$\sin(\arcsin(\cos x)) = \sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right)$

$$\frac{\pi}{2}-x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi-2x}{10}+2\pi k \quad (1) \\ \pi-\frac{\pi-2x}{10}+2\pi n \quad (2) \end{array}\right. \quad \{k;n\}\in\mathbb{Z}$$

(*) $-1 \le \frac{\pi-2x}{10} \le 1$

$-10-\pi \le -2x \le 10-\pi$

$-5+\frac{\pi}{2} \le x \le 5+\frac{\pi}{2}$

(1) $\frac{\pi}{2}-x = \frac{\pi-2x}{10}+2\pi k$

$5\pi-10x = \pi-2x+20\pi k$

$8x = 4\pi-20\pi k$

$x = \frac{\pi}{2}-\frac{5}{2}\pi k$

По (*): $-5+\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2}-\frac{5}{2}\pi k \le 5+\frac{\pi}{2}$

$-10 \le -5\pi k \le 10$

$-2 \le \pi k \le 2$

$-\frac{2}{\pi} \le k \le \frac{2}{\pi}$

Так как $k\in\mathbb{Z}$, то только $k=0$ уд. $\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{\pi}{2}-x = \pi-\frac{\pi-2x}{10}+2\pi n$

$5\pi-10x = 10\pi-\pi+2x+20\pi n$

$12x = -4\pi-20\pi n$

$x = -\frac{\pi}{3}-\frac{5}{3}\pi n$

По (*): $-5+\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi n}{3} \le 5+\frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{6}-5 \le -\frac{5\pi n}{3} \le 5+\frac{5\pi}{6}$

$\frac{\pi}{2}-3 \le -\pi n \le 3+\frac{\pi}{2}$

$-3-\frac{\pi}{2} \le \pi n \le 3-\frac{\pi}{2}$

$-\frac{3}{\pi}-\frac{1}{2} \le n \le \frac{3}{\pi}-\frac{1}{2}$

$\frac{3}{\pi}-\frac{1}{2} \vee 1$

$-\frac{3}{\pi}-\frac{1}{2} \vee -2$ $\frac{3}{\pi} < \frac{3}{2} \Rightarrow n \ge 1$ не уд.

$-\frac{3}{\pi} > -\frac{3}{2}$ $-\frac{3}{\pi}-\frac{1}{2} \vee -1$

$n \le -2$ не уд. $-\frac{3}{\pi} < -\frac{1}{2} \Rightarrow n=-1$ уд. $x=\frac{4\pi}{3}$

$n=0$ уд. $x=-\frac{\pi}{3}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{4\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4. $\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$

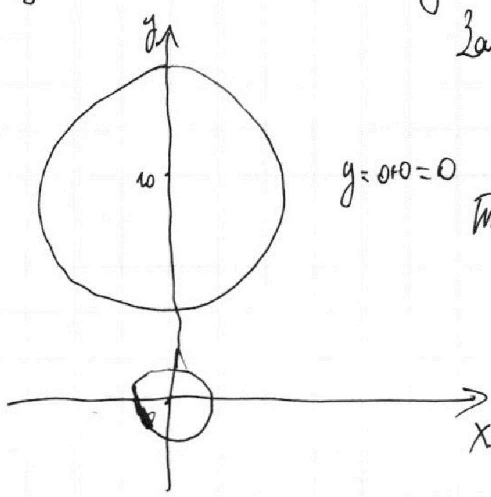
~~Второе~~ Второе уравнение системы равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \quad (1) \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \quad (2) \end{array}\right.$$

График (1) - окружность с ~~центром~~ центром $(0;0)$ и радиусом 1;
график (2) - окр. с центром в точке $(0;10)$ и радиусом 6.

$ax-3y+4b=0 \qquad 3y=ax+4b \qquad y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$

Заменим $\frac{a}{3}=t$; $\frac{4}{3}b=v$; $\Rightarrow y=tx+v$



$y=0+0=0$

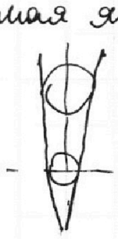
При $a=0$: ~~...~~ положим $b=0$.
Тогда система имеет 4 реш. $\Rightarrow$
$\Rightarrow a=0$ - уд.

При больших по модулю a, очевидно, найдется b, чтобы система имела 4 реш.

Рассмотрим случай, когда прямая касается одной окружности а с другой имеет 2 точки пересечения. Тогда ~~при сдвиге~~ при сдвиге прямой (при изменении V) гарантированно будет случай, когда система имеет 4 реш.

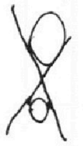
Рассмотрим случаи, когда прямая явл. касательной к обеим окр.

Случай 1. касание вида



- очевидно что при сдвиге прямой вверх будет 4 реш. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ не интересует

Случай 2. касание вида



. В таком случае как бы мы ни меняли V, будет максимум 2 реш.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Найдем точки касания вида 2:

$x^2+(tx+v)^2=1$ — кас. к нижней ω

$(t^2+1)x^2+2tvx+v^2-1=0$

$D=0: \quad 4t^2v^2-4(t^2+1)(v^2-1)=0$

$t^2-v^2=1$

касание с верхней ω

$x^2+(tx+v-10)^2=36$

$x^2+t^2x^2+v^2+100+2tvx-20tx-20v-36=0$

$(t^2+1)x^2-(20t-2tv)x+v^2-20v+64=0$

$\frac{D}{4}=0: \quad (10t-tv)^2-(t^2+1)(v^2-20v+64)=0$

$100t^2+t^2v^2-20t^2v-t^2v^2+20t^2v-64t^2-v^2+20v-64=0$

$36t^2-v^2+20v-64=0$

$$\begin{cases} t^2-v^2=1 \Rightarrow t^2=v^2+1 \\ 36t^2-v^2+20v-64=0 \end{cases}$$

$36(v^2+1)-v^2+20v-64=0$

$7v^2+4v-20=0$

$\frac{D}{4}=4+140=144$

$v=\frac{-2\pm 12}{7}=\left[\begin{array}{l}-2 \\ \frac{10}{7}\end{array}\right.; \quad t=\left[\begin{array}{l}\pm\sqrt{3} \\ \pm\frac{\sqrt{51}}{7}\end{array}\right.$

Нетрудно заметить, что нас интересует прямая с меньшим модулем тангенса наклона, то есть меньший по модулю t:

$\sqrt{3} > \frac{\sqrt{51}}{7} \qquad 7\sqrt{3}>\sqrt{51} \quad \Rightarrow \quad t=\pm\sqrt{3}$ — касание вида 1

$t=\pm\frac{\sqrt{51}}{7}$ — касание вида 2.

$\frac{a}{3}=t \Rightarrow \quad a=3t=\pm\frac{3\sqrt{51}}{7}$

Итак, $a\in\left(-\infty;-\frac{3\sqrt{51}}{7}\right)\cup\{0\}\cup\left(\frac{3\sqrt{51}}{7};+\infty\right)$ — Ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5 $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$ $\quad$ (*) $x>0,\ x\neq\frac{1}{2}$;

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} + 3 - \log_{(2x)^3}5^4 = 0$

На (*): $\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5(2x)} + 3 - \frac{4}{3\cdot\log_5 2x} = 0$; $\log_5(2x) = t$

① $t^5 + 3t - \frac{13}{3} = 0$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$ $\quad$ (*) $y>0,\ y\neq 1$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3\log_5 y} + 3 = 0$ $\quad$ $\log_5 y = b$

② $b^5 + 3b + \frac{13}{3} = 0$

①+②: $t^5+b^5+3t+3b+\frac{13}{3}-\frac{13}{3}=0$

$t^5+b^5+3(t+b)=0$

$t^5+b^2=(b+t)(b^4-b^3t+b^2t^2-bt^3+t^4)$

$(b+t)(b^4-b^3t+b^2t^2-bt^3+t^4+3)=0$

$\Rightarrow b+t=0$: $\log_5(2x)+\log_5(y)=0$; $\log_5(2xy)=0$

$2xy=1 \Rightarrow \underline{xy=\frac{1}{2}}$

$b^4-b^3t+b^2t^2-bt^3+t^4+3=0$

$(b^2+t^2)^2-bt(b^2+t^2+bt)+3=0$

Посмотрим на ①: очевидно что при отрицательных t нет решений (и при $t=0$) $\Rightarrow t>0$.

Посмотрим на b: очевидно, что ~~корней нет~~ нет неотрицательных корней $\Rightarrow b<0$

$\underbrace{(b^2+t^2)^2}_{\oplus} - \underbrace{bt\left(\left(b+\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}\right)}_{\oplus\ >0\ (\text{т.к. } bt<0)}+3=0$. $\quad$ $\oplus+\oplus+3=0$ – невозможно $\Rightarrow$ единственный ответ $xy=\frac{1}{2}$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

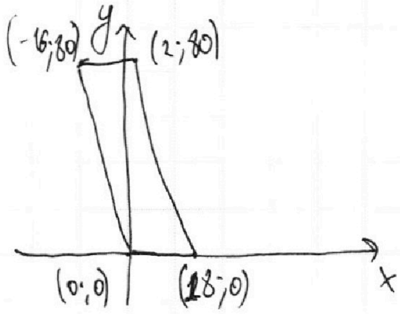
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6

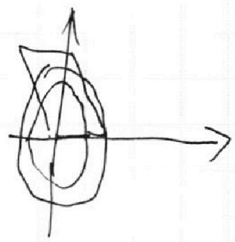


$$y_2 + 5x_2 - (y_1 + 5x_1) = 45$$

$$y_2 - y_1 + 5(x_2 - x_1) = 45$$

Дадим каждой точке номер, который численно равен сумме абсциссы умноженной на 5, и ординате. Точки, у которых номер отличается на 45, будут удовлетворять.

Точки с одинаковым номером будут образовывать эллипс на ~~коорд~~ координатной ~~пл~~ плоскости



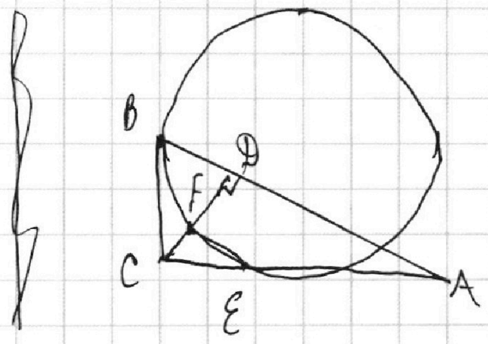
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

ABи Ef $\frac{AD}{BD} = \frac{5x}{2x}$ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{CEF}}$ - ?



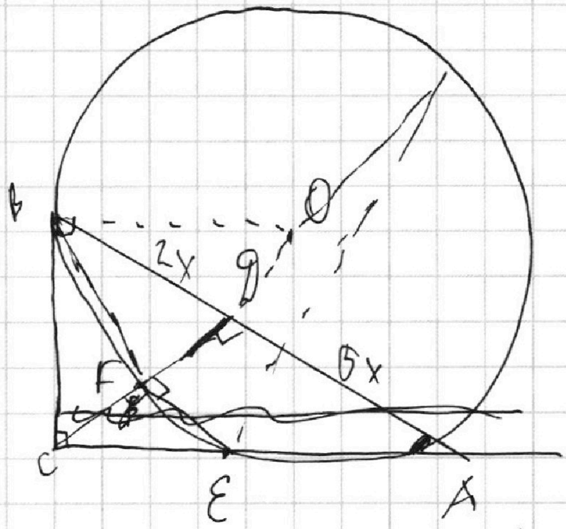
$CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{10}x$

$\triangle CFE$ - п/у

$\triangle CFE \sim \triangle BCA$

$BC = \sqrt{4x^2+10x^2} = \sqrt{14}x$

$AC = \sqrt{10x^2+25x^2} = \sqrt{35}x$

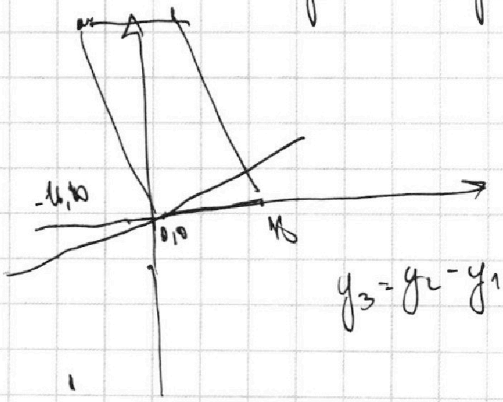


$(b+f)(b^4-b^3f+b^2f^2-bf^3+f^4) = b^5+f^5$

$CF = y, \; FD = \sqrt{10}x - y$

$y_2+5x_2 - (y_1+5x_1) = 45$

$f^5 - f^4$
$-(f^5+bf^4) \,|\, f^4 - bf^3 + b^2f^2 - b^3f$
$-bf^4 - f^4$
$-bf^3 + b^2f^3$
$+b^2f^3 - f^4$
$-b^2f^3 + b^3f^2$
$-b^3f^2 - f^4$
$-b^3f^2 + b^4f$
$-b^4f - f^4$



$y_3 = y_2 - y_1$

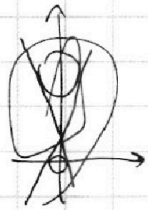
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

случай 2: ~~касание вида~~



Пусть прямая касается одной окр., а с другой имеет 2 т. пер. Тогда очевидно, что, изменив b ~~случаем~~ так, чтобы с первой окр. было 2 т., со II окр. остан. 2 т.

случай 3: касание вида  В таком случае, как бы мы не изменяли b, если с какой-то  ω будет 2 т. п., то с другой будет 0 т. п. Найдем эти крит. точки

Касание с нижней ω: Заменим $\frac{a}{3}=t$, $\frac{4b}{3}=v$

$$x^2+(tx+v)^2=1$$

$$(t^2+1)x^2+2tvx+v^2-1=0$$

$D=0$:

$$4t^2v^2-4(t^2+1)(v^2-1)=0 \qquad t^2v^2-t^2+v^2-1$$

$$t^2v^2-t^2v^2+t^2-v^2+1=0$$

$$t^2-v^2+1=0$$

касание с верхней ω: $x^2+(tx+v-10)^2=36$

$$x^2+t^2x^2+v^2+100+2tvx-20tx-20v-36=0$$

$$(t^2+1)x^2+(20t-2tv)x+v^2-20v+64=0$$

$\frac{D}{4}=0$: $(10t-tv)^2-(t^2+1)(v^2-20v+64)=0$

$$100t^2+t^2v^2-20t^2v-t^2v^2+20t^2v-64t^2-v^2+20v-64=0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

4. $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

$\frac{\pi - 2x}{10} \in [-1; 1]$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right)$ $\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$

$\frac{\pi}{2} + \frac{5}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi - 2x}{10} + 2\pi k$ $\quad \{k; n\} \in \mathbb{Z}$ $\qquad \frac{\pi}{2} - x = \pi - \frac{\pi-2x}{10} + 2\pi n$

$5\pi - 10x = \pi - 2x + 20\pi k$ $\qquad 5\pi - 10x = 10\pi - \pi + 2x + 20\pi n$

$8x = 4\pi - 20\pi k$ $\qquad 12x = -4\pi - 20\pi n$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k$ $\qquad x = -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi n$

$-1 \le \frac{\pi - 2x}{10} \le 1$

$-10 \le \pi - 2x \le 10$

$\pi - 10 \le 2x \le \pi + 10$

$\frac{\pi}{2} - 5 \le x \le \frac{\pi}{2} + 5$

1) $\frac{\pi}{2} - 5 \le \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi k \le \frac{\pi}{2} + 5$

$-5 \le -\frac{5}{2}\pi k \le 5$

$-2 \le \pi k \le 2$ $\qquad -\frac{2}{\pi} \le k \le \frac{2}{\pi}$

$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

2) $\frac{\pi}{2} - 5 \le -\frac{\pi}{3} - \frac{5}{3}\pi n \le \frac{\pi}{2} + 5$

$\frac{5\pi}{6} - 5 \le -\frac{5}{3}\pi n \le \frac{5\pi}{6} + 5$

$\frac{\pi}{2} - 3 \le -\pi n \le \frac{\pi}{2} + 3$

$-\frac{\pi}{2} - 3 \le \pi n \le 3 - \frac{\pi}{2}$

$-\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} \le n \le \frac{3}{\pi} - \frac{1}{2}$

$\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 1$ не уд.

$\frac{3}{\pi} < \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{2} - \frac{3}{\pi} \vee -1$

$-\frac{3}{\pi} > -\frac{3}{2} \Rightarrow -1$ не уд

$n = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}$

$10 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{2\pi}{3}$ $\qquad 10 \arcsin(0) = \pi - \frac{2\pi}{2}$

$10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$ - верно $\qquad 0 = 0$ - верно

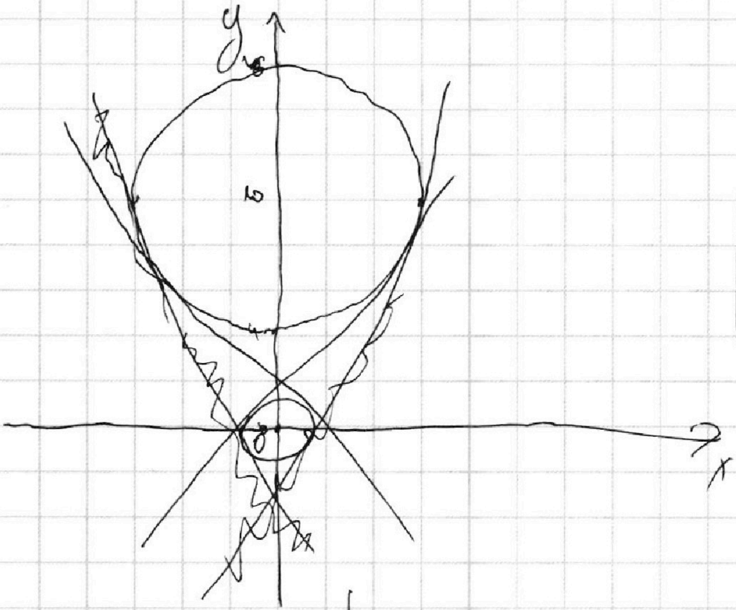
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

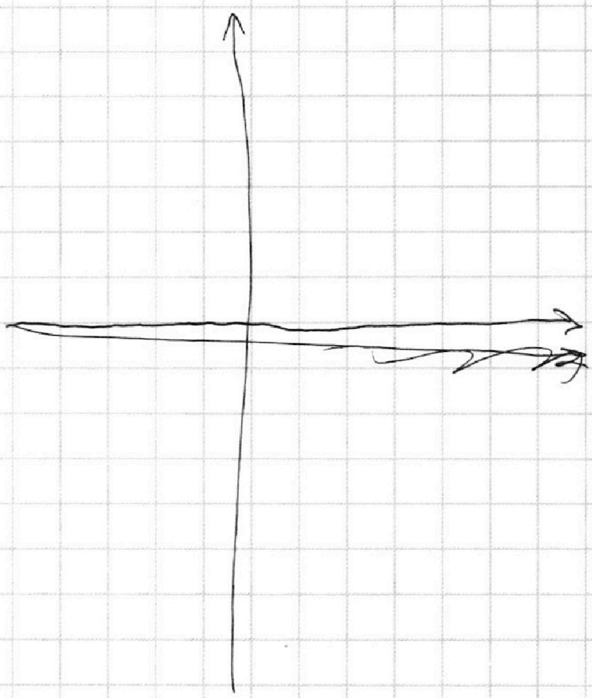
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=6^2 \end{array}\right.$$





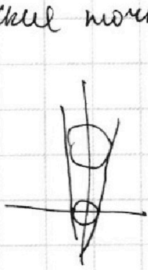
$a=0$: при, например, $b=0$, система имеет 4 реш $\Rightarrow$ $a=0$ - уд.

$$y=\frac{a}{3}x+\frac{4}{3}b$$

при больших по модулю a ($a\to+\infty$ или $a\to-\infty$) очевидно, найдется b, чтобы система имела 4 реш.

Необходимо высчитать критические точки: точки касания

Случай 1: касание вида



- очевидно что сдвинув прямую путем изменения b вверх будет 4 реш. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не интересует

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$36t^2-v^2+20v-64=0$

$\begin{cases} 36t^2-v^2+20v-64=0 \\ t^2-v^2+1=0 \end{cases}$ $v^2=t^2+1$

$t^2=v^2-1$ (По рисунку $v>0 \Rightarrow v=\sqrt{t^2+1}$

(Рассмотрим случай $t>0$. При $t<0$ изменится лишь знак перед a.)

$36(v^2-1)-v^2+20v-64=0$

$35v^2+20v-100=0$

$7v^2+4v-20=0$

$\frac{D}{4}=4+140=144$; $v=\frac{-2\pm12}{7}=\left[\begin{array}{l}-2\\ \frac{10}{7}\end{array}\right.$

$t^2=v^2-1$

$v=-2$: $t^2=4-1=3$

$t=\pm\sqrt{3}$

$v=\frac{10}{7}$: $t^2=\frac{100}{49}-1=\frac{51}{49}$

$t=\pm\frac{\sqrt{51}}{7}$

из пол.

Нас интересует такие t, при кот. модуль тангенса угла наклона прямой меньше $\Rightarrow$ $\frac{a}{3}=t$;

$\sqrt{3} \vee \frac{\sqrt{51}}{7}$ $\qquad -\sqrt{3} \vee -\frac{\sqrt{51}}{7}$ $\Rightarrow$

$7\sqrt{3}>\sqrt{51}$ $\qquad -7\sqrt{3}<-\sqrt{51}$

$\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{51}}{7}$

$a=3t=\pm\frac{3\sqrt{51}}{7}$; $\qquad a\in\left(-\infty;-\frac{3\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(\frac{3\sqrt{51}}{7};+\infty\right)\cup\{0\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1 $a = 2^{a_2} 3^{a_3} 5^{a_5}$ $b = 2^{b_2} 3^{b_3} 5^{b_5}$ $c = 2^{c_2} 3^{c_3} 5^{c_5}$

$X = a_2 + b_2 + c_2$
$Y = a_3 + b_3 + c_3$
$Z = a_5 + b_5 + c_5$

$\begin{cases} a_2 + b_2 = 8 \\ a_3 + b_3 = 19 \\ a_5 + b_5 = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} b_2 + c_2 = 12 \\ b_3 + c_3 = 20 \\ b_5 + c_5 = 17 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 + c_2 = 14 \\ a_3 + c_3 = 21 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases}$

$(a_2 + b_2) + (b_2 + c_2) + (a_2 + c_2) = 2(a_2 + b_2 + c_2) = 8 + 12 + 14 = 20 + 14 = 34$

$a_2 + b_2 + c_2 = 17$

$(a_3 + b_3) + (b_3 + c_3) + (a_3 + c_3) = 2(a_3 + b_3 + c_3) = 14 + 20 + 21$

$(a_5 + b_5) + (b_5 + c_5) + (a_5 + c_5) = 2(a_5 + b_5 + c_5) = 12 + 17 + 39 = 12 + 56 = 68$

$a_5 + b_5 + c_5 = \frac{68}{2} = 34$ $a_3 + b_3 + c_3 = \frac{55}{2} = 27{,}5 \notin \mathbb{N}$

Т.к. $X = a_2 + b_2 + c_2 = 17 \in \mathbb{N}$ и $Z = a_5 + b_5 + c_5 = 39 \in \mathbb{N}$, то min $X = 17$, min $Z = 39$. Заметим, что $a_3 + b_3 + c_3 = 27{,}5 \notin \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow$, так как $Y \in \mathbb{N}$, то min $Y = 28$. Осталось только привести пример.

$a_2 = 5$ $b_2 = 3$ $c_2 = 9$ $X = 17$

$a_5 = 17$ $c_5 = 22$ $a = 17$ $b = 5$ неуд.

$a_3 + c_3 = 22$ $a_3 - b_3 = 2$ $a_3 = 8$ $b_3 = 6$ $c_3 = 14$

$Y = 28.$

Z: $c_5 - a_5 = 5$
$a_5 + c_5 = 39$

$a_5 = 12$, $c_5 = 27$

Выгодно взять min $b_5 \Rightarrow b_5 = 0$; тогда $Z = 39$

$a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{12}$ $b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0$ $c = 2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{27}$

$abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$(b+t)\left(\left(b^4-b^3t+b^2t^2-bt^3+t^4\right)+3\right)=0$

$b=-t:\quad \log_5 y=-\log_5(2x) \Rightarrow y=\frac{1}{2x} \Rightarrow xy=\frac{1}{2}$

$t=\log_5(2x)$

$b=\log_5(y)$

$(b^2+t^2)^2-bt(b^2+t^2)+3-b^2t^2$

$z^2-btz-3=0 \qquad D=b^2t^2+12$

$z=\frac{bt\pm\sqrt{b^2t^2+12}}{2}$

$bt=\frac{(b^2+t^2)^2-b^4-t^4}{2}=\frac{(b^2+t^2)^2}{2}$

$(+):\ b^2+t^2=\frac{bt+\sqrt{b^2t^2+12}}{2}$

$2b^2+2t^2-bt=\sqrt{b^2t^2+12}$

$4b^4+4t^4+b^2t^2+8b^2t^2-4b^3t-4bt^3=b^2t^2+12$

$b^4+t^4+2b^2t^2-bt(b^2+t^2$

$(b^2+t^2)^2-(b^2+t^2)\left((b^2+t^2)^2-(b^2+t^2)\right)-6=0$

$b^2+t^2=n$

$2n^2-n^3+n^2-6=0 \qquad n^3-3n^2+6=0$

$(b^2+t^2)^2-b^2t^2-bt(b^2+t^2)-3=0$

$b^2+t^2=p,\ bt$

$(b^2+t^2)^2-bt(b^2+t^2)$

$b^2t^2=(b^2+t^2)^2-b^2$

$x^2-y^2-xy-3=0$

$D=y^2+4y^2+12=5y^2+12$

$x_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{5y^2+12}}{2}$

$y=\sqrt{\frac{x^2-x}{2}}$

$x^2-x-2y^2=0$

$x^2-y^2-xy-3=0$

$b^4+t^4=\quad bt=u$

$(b^2+t^2)^2-bt(b^2+t^2+bt)+3=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3} 625 \cdot 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} + 3 \cdot \log_{(2x)^3} 5^4 = 0$

на ⊛:

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} + 3 - \frac{4}{3}\log_{(2x)} 5 = 0$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} + 3 - \frac{4}{3\log_5(2x)} = 0 \qquad \log_5(2x) = t$

$t^5 - 3 + 3t - \frac{4}{3} = 0 \qquad 3t^5 + 9t - 13 = 0$

$3\log_{2x}5 + \log_{8x^3} 625 = \frac{3}{\log_5 2x} + \frac{4}{3\log_5 2x} = \frac{13}{3\log_5 2x}$

$\frac{1}{\log_{2x}^4 5} = \frac{4}{3}\log_{2x}5 + 3\log_{2x}5 - 3 \qquad \frac{1}{\log_{2x}^4 5} = \frac{13}{3}\log_{2x}5 - 3$

$13v^5 - 3v^4 - 1 = 0$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3 \qquad \log_5 y = b$

$\frac{4}{\log_5 y} + \frac{1}{3\log_5 y} = \frac{13}{3\log_5 y}$

$b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$

$\cancel{3b^5 + 13}$ $\quad 3b^5 + 9b + 13 = 0$

$3(b^5 + t^5) + 9(b + t) = 0$

$\frac{-t^5 + bt}{b}$

$b^3t + t^5$
$-b^3t + b^2t^2$
$-b^2t^2 + t^5$
$-b^2t^2 - bt^3$
$-bt^3 + t^5$
$-bt^3 + t^4$ $\quad t^5 - t^4$

$b^5 + t^5 \mid b + t$
$b^5 + b^4t \mid b^4 - b^3t + b^2t^2 - bt^3 + t^4$
$-b^4t + t^5$
$-b^4t - b^3t^2$
$b^3t^2 + t^5$
$b^3t^2 + b^2t^3$
$-b^2t^3 + t^5$
$-b^2t^3 - bt^4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№4. $10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$

$\arcsin(\cos x)=\frac{\pi-2x}{10}$

$\sin(\arcsin(\cos x))=\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right)$

$\cos x=\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right)$

$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$;

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi-2x}{10}\right)$

$\frac{\pi}{2}-x=\left[\begin{array}{l}\frac{\pi-2x}{10}+2\pi k \quad (1)\\ \pi-\frac{\pi-2x}{10}+2\pi n \quad (2)\end{array}\right.$ $\{k; n\}\in\mathbb{Z}$

(1) $\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi-2x}{10}+2\pi k$

$5\pi-10x=\pi-2x+20\pi k$

$8x=4\pi - 20\pi k$

$x=\frac{\pi}{2}-\frac{5}{2}\pi k$

(*) $-1\le\frac{\pi-2x}{10}\le 1$

$-10\le\pi-2x\le 10$

$-10\le 2x-\pi\le 10$

$-5+\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}+5$

$x=\frac{2\pi}{3}$

$10\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\cancel{\pi}}{3}$

$-\frac{10\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{6}$