МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Пусть~~ Пусть a_2 — макс. показатель ~~степени~~ двойки, на кот. делится a.

Аналогично определим $a_3, a_5, b_2, b_3, b_5, c_2, c_3, c_5$.

По основной теореме арифметики:

$$a_2+b_2\geq 8 \qquad b_2+c_2\geq 12 \qquad a_2+c_2\geq 14$$
$$a_3+b_3\geq 14 \qquad b_3+c_3\geq 20 \qquad a_3+c_3\geq 21$$
$$a_5+b_5\geq 12 \qquad b_5+c_5\geq 17 \qquad a_5+c_5\geq 39$$

Отсюда $a_2+b_2+c_2\geq \frac{8+12+14}{2}=17$

$a_3+b_3+c_3\geq \frac{14+20+21}{2}=27,5$, откуда $a_3+b_3+c_3\geq 28$

$a_5+b_5+c_5\geq a_5+c_5=39$

По основной теореме арифметики тогда $abc \vdots 2^{17}3^{28}5^{39}$,

то есть $abc\geq 2^{17}3^{28}5^{39}$

Пример:

$$a=2^5 3^8 5^{12}$$
$$b=2^3 3^6$$
$$c=2^9 3^{14} 5^{27}$$

$abc=2^{17}3^{28}5^{39}$

$ab=2^8 3^{14} 5^{12} \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$

$bc=2^{12}3^{20}5^{27} \vdots 2^{12}3^{20}5^{17}$

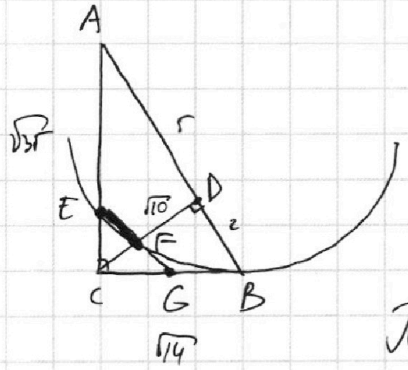
$ac=2^{14}3^{22}5^{39} \vdots 2^{14}3^{21}2^{39}$

Ответ: $2^{17}3^{28}5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим $\frac{AB}{7}$ за 1.

Тогда по усл. $AD = 5$, $BD = 2$.

$CD = \sqrt{5\cdot 2} = \sqrt{10}$

По т. Пифагора $AC = \sqrt{35}$, $BC = \sqrt{14}$.

Пусть G – т. пер. прямой EF с BC. Треугольники ABC и EGC подобны, т.к. $AB \parallel EF$. D и F в них явл. соотв. точками, т.к. они обе лежат на гип. соотв. Δ и $\angle ECF = \angle ACD$ (они просто совп.). Пусть коэфф. подобия α. Тогда $BG = BC(1-\alpha) = \sqrt{14}(1-\alpha)$, $GF = BD\cdot\alpha = 2\alpha$, $EG = AB\cdot\alpha = 7\alpha$. Также $GF\cdot GE = GB^2$, т.к. GB – кас.. По сему ~~$14(1-\alpha)^2 = 2\alpha$~~ $(\sqrt{14}(1-\alpha))^2 = 2\alpha\cdot 7\alpha$ $\Leftrightarrow$ $(1-\alpha)^2 = \alpha^2$, откуда $\alpha = 1-\alpha$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. Так как треуг. ACD и ECF подобны с коэфф. $\alpha = \frac{1}{2}$, пл. ΔCEF равна четверти пл. ΔACD, что равно $\frac{5}{7}$ пл. ΔABC (т.к. $AD:AB = 5:7$). Значит, пл. ΔCEF равна $\frac{5}{28}$ пл. ΔABC.

Ответ: 28:5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$10\arcsin(\cos x)=\pi-2x$$

$$10\left(\frac{\pi}{2}-\arccos(\cos x)\right)=\pi-2x$$

$$5\pi-10\arccos(\cos x)=\pi-2x$$

$$2\pi-5\arccos(\cos x)=-x$$

$$x=5\arccos(\cos x)-2\pi$$

В то же время из усл. равенства косинусов

$$\left[\begin{array}{l}\arccos(\cos x)=2\pi k+x,\ k\in R\\ \arccos(\cos x)=2\pi k-x\end{array}\right.$$

~~Откуда~~ В первом случае

$$x=10\pi k+5x-2\pi$$

$$-4x=2\pi(5k-1)$$

$$\cancel{2x=\pi(5k-1)}$$

$$x=-\frac{\pi(5k-1)}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\ (1)\\ \cos x=1\ (2)\\ \cos x=-1\ (3)\end{array}\right.$$

Во втором случае

$$x=10\pi k-5x-2\pi$$

$$x=\frac{\pi(5k-1)}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\ (4)\\ \cos x=-\frac{1}{2}\ (5)\\ \cos x=1 \leftarrow \text{уже разобран}\end{array}\right.$$

1) $x=5\arccos 0-2\pi$
$x=\frac{\pi}{2}$

2) $x=5\arccos 1-2\pi$
$x=-2\pi$

3) $x=5\arccos(-1)-2\pi$
$x=3\pi$

4) $x=5\arccos\frac{1}{2}-2\pi$
$x=-\frac{\pi}{3}$

5) $x=5\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-2\pi$
$x=\frac{4\pi}{3}$

Проверка.

$$10\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)=10\arcsin 0=0=\pi-2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$10\arcsin(\cancel{\cos}\cos(-2\pi))=10\arcsin 1=5\pi=\pi-2\cdot(-2\pi)$$

$$10\arcsin(\cos(3\pi))=10\arcsin(-1)=-5\pi=\pi-2\cdot 3\pi$$

$$10\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=10\arcsin\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{3}=\pi-2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$10\arcsin\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=10\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5\pi}{3}=\pi-2\cdot\frac{4\pi}{3}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2},\ -2\pi,\ 3\pi,\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

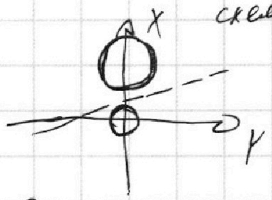
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

Посмотрим, каким кривым на коорд. пл. соотв. наши ур-я.. Первое ур-е, очев., соотв. прямой $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$.

Второе ур-е соотв. объединению двух окружностей:

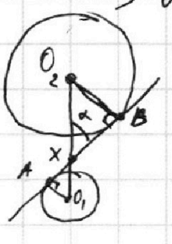
$x^2+y^2=1$ и $x^2+(y-10)^2=36$. Первая окр. имеет центр $(0;0)$ и радиус 1, вторая – центр $(0;10)$ и радиус 6.

схематично



Требуется найти знач. a, при кот. сущ. знач. b, при кот. наша прямая будет пересек. обе окр. в двух точках. Так как угл. коэфф. прямой равен $\frac{a}{3}$, а „высота" прямой равна $\frac{4b}{3}$ и мы, таким образом, можем сделать её „любой", нужно искл. знач. a, при кот. из всего семейства прямых, паралл. прямой $y=\frac{a}{3}x$, ни одна не пер. каждую окр. в 2 точках.

Очевидно, это значения a, лежащие между утроенными угл. коэффициентами общих внутр. касательных к окружностям (т.е. $\Leftrightarrow \frac{a}{3}$ лежит не между угл. коэфф. общих внутр. кас.).



← обозн. приведены здесь

треуг. O_2BX и O_1AX подобны по 2 углам, $O_2B=6$, $O_1A=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow O_1X : XO_2 = 1:6$, $O_1O_2 = 10 \Rightarrow O_1X = \frac{10}{7}$, $AO_1 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{AO_1}{O_1X} = 0{,}7$. Очев., угл. коэфф. равен $\cos(90°-\alpha) =$
$= \sin\alpha = 0{,}7$. Тогда угл. коэфф. второй внутр. кас. равен $-0{,}7$. Значит, усл. вып. $\Leftrightarrow a \notin [2{,}1; 2{,}1]$.

Ответ: $a > 2{,}1$ и $a < -2{,}1$.

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3$

Замена: $a = \log_5 2x$

$$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$$

$$3a^5 + 9a - 13 = 0$$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}\frac{1}{5} - 3$

Замена: $b = \log_5 y$

$$b^4 + \frac{4}{b} = \frac{1}{3b} - 3$$

$$3b^5 + 9b + 13 = 0$$

В каждом ур-и (на a и на b) левая часть возрастает (т.к. яв-я суммой возр. функций $3a^5$, $9a$ и константы, аналогично с b),
т.к. очевидно, что при $a=-2$ и $b=-2$ отр., при $a=2$ и $b=2$
поэтому у каждого ур-я ровно 1 решение. Также очевидно, что если a – реш. первого ур-я, то $b=-a$ – реш. второго, т.к. $3(-a)^5+9(-a)+13 = -(3b^5+9b-13) = 0$. Значит, $b=-a$, то есть $\log_5 y = -\log_5 2x$, откуда $y = \frac{1}{2x}$. Значит, $xy = x\cdot\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$a^4 - \frac{3}{a} = \frac{4}{3a} - 3$

$3a^5 - 9 = 4 - 9a$

$3a^5 + 9a - 13 = 0$

$3b^5 + 9b + 13 = 0$

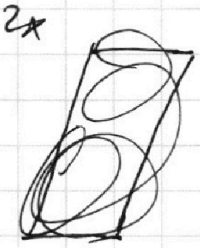
$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} \frac{1}{5} - 3$

$b^4 + \frac{4}{b} = -\frac{1}{3b} - 3$

$3b^5 + 9b + 13 = 0$

$b = \log_5 y$

$a = \log_5 2x$



$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$

$\begin{cases} 0 \le y \le 80 \\ -5x \le y \le 90 - 5x \end{cases}$

-16×25

-80×25

$\frac{y_2 - y_1}{5}$

от -16 до 16

$x_2 - x_1$

от -7 до 25

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

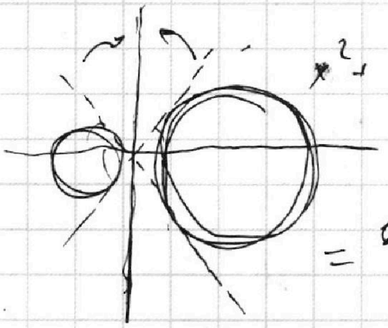
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$y=\frac{ax+4b}{3} \qquad y^2=\frac{a^2x^2+8abx+16b^2}{9} \qquad \begin{array}{r} \times\, 64 \\ 9 \\ \hline 576 \end{array}$$

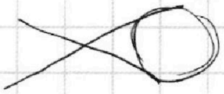
$$(a^2+9)x^2+8abx+16b^2-9=0$$



$$x^2+\frac{a^2x^2+8abx+16b^2}{9}-\frac{20ax+80b}{3}+64=$$

$$=(a^2+9)x^2+4a(2b-15)x+(16b-240)b+576=0$$

$$\frac{D}{64}=a^2b^2-(a^2+9)b^2\ldots$$



$$x^2+(y-10)^2=36 \qquad 0,10$$

центр

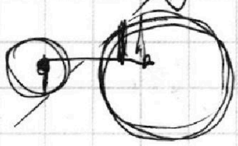
$y=10$

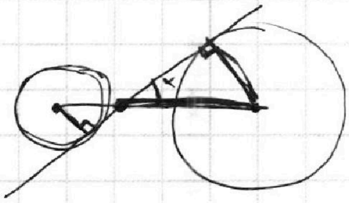
$x=\pm 6$

$$y=\frac{ax+4b}{3}$$

$\frac{a}{3}$ должно быть между $\pm$ накл. кас.

a не между ± 3 накл. кас.





$$\log_5^4(2x)-3\log_{2x}5=\log_{8x^3}625-3 \qquad \log_5^4 y+4\log_y 5=\log_{y^3}0{,}2-3$$

$$\frac{1}{a^4}-3a=a-3$$

$$\frac{1}{a^4}-4a+3=0$$

$$4a^5-3a^4-1=0$$

$$a=1$$

$$3+13b^5+\ldots b^4$$

$$13b^5+9b^4+3=0$$

$$(a-1)(4a^4\ldots$$

$$b^4+\frac{4}{b}=-\frac{1}{3b}-3$$

$$b^5+3b+\ldots=0$$

$$\frac{1}{b^4}+4b=-\frac{b}{3}-3 \qquad 3b^5+9b+3=0$$

$$\frac{1}{b^4}+4\tfrac{1}{3}b+3$$

$$b^5+4=-\frac{1}{3}-3b$$