МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№1

$$\begin{cases} ab = k_1 2^8 3^{14} 5^{-12} \\ bc = k_2 2^{12} 3^{20} 5^{-17} \\ ac = k_3 2^{14} 3^{21} 5^{-39} \end{cases}$$

$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \, 2^{34} 3^{55} 5^{-68}$

Корень из 3^{55} равен $3^{55/2}$, а это не натуральное число $\Rightarrow k_1 k_2 k_3 = 3$, тогда

$(abc)^2 = 2^{34} 3^{56} 5^{-68} \Rightarrow \boxed{abc = 2^{17} 3^{28} 5^{-34}}$

Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{-34}$

~~№2~~

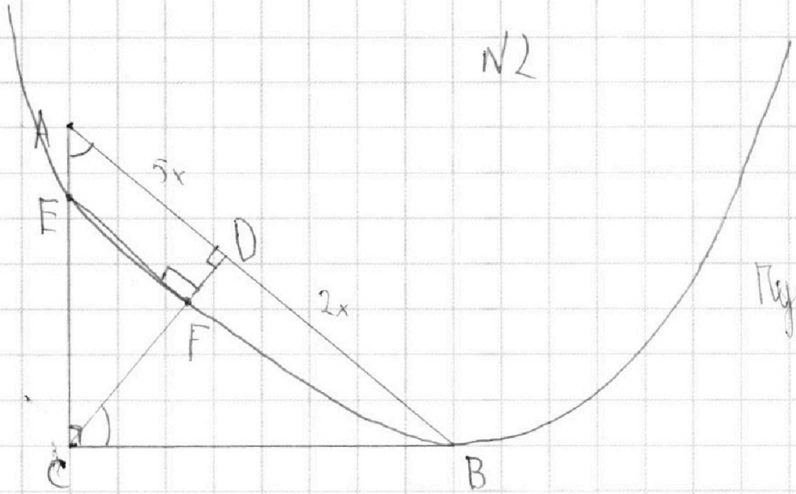
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№2



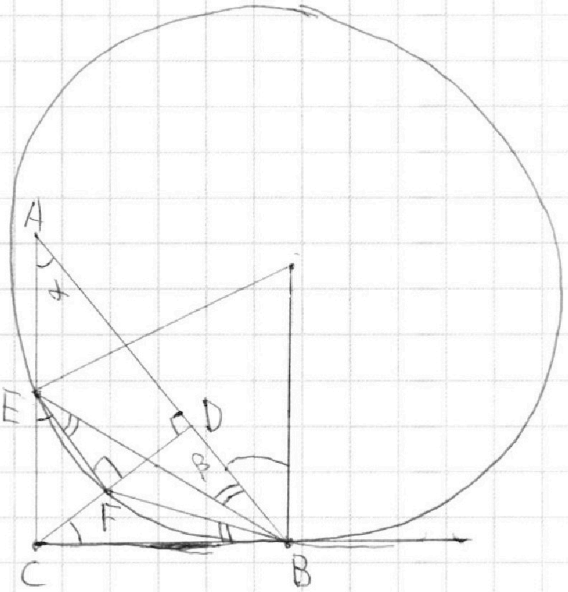
Пусть $DB=2x$. Тогда $AD=5x$;

$\angle CAB = \angle DCB$

$$\left.\begin{aligned} tg\angle CAB &= \frac{CD}{AD} \\ tg\angle DCB &= \frac{DB}{CD}\end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{CD}{AD}=\frac{DB}{CD} \Rightarrow CD=\sqrt{AD\cdot DB}=\sqrt{5x\cdot 2x}=x\sqrt{10}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}CD\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{10}\cdot 7x=\boxed{\frac{7\sqrt{10}}{2}x^2}$$

~~$\alpha+2\beta+\angle FBE=90°$~~



$15a^4-9=0$

$\frac{1}{2}ab\sin\angle A$ $\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№3

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$

~~ОДЗ: $\left|\frac{\pi-2x}{10}\right| \le$~~

ОДЗ: $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi-2x}{10} \le \frac{\pi}{2}$

$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$

$-6\pi \le -2x \le 4\pi$

$-2\pi \le x \le 3\pi$

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = \pi - 2x$

$5\pi - 10\arccos(\cos x) = \pi - 2x$

$10\arccos(\cos x) = 4\pi + 2x$

$\arccos(\cos x) = \frac{2\pi + x}{5}$

Если $x \in [-2\pi; -\pi)$, то $\arccos(\cos(2\pi + x)) = \frac{2\pi+x}{5}$

$2\pi + x = \frac{2\pi + x}{5}$

$10\pi + 5x = 2\pi + x$

$8\pi = -4x$

$\boxed{x = -2\pi}$

Если $x \in [-\pi; 0)$, то $\arccos(\cos(-x)) = \frac{2\pi+x}{5}$

$-x = \frac{2\pi+x}{5} \Rightarrow 2\pi + x = -5x \Rightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{3}}$

Если $x \in [0; \pi)$, то $\arccos(\cos x) = \frac{2\pi+x}{5}$

$x = \frac{2\pi+x}{5} \Rightarrow 5x = 2\pi + x \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$

Если $x \in [\pi; 2\pi)$, то $\arccos(\cos(-(x-2\pi))) = \frac{2\pi+x}{5}$

$-(x-2\pi) = \frac{2\pi+x}{5} \Rightarrow -x + 2\pi = \frac{2\pi+x}{5} \Rightarrow -5x + 10\pi = 2\pi + x \Rightarrow \boxed{x = \frac{4\pi}{3}}$

Если $x \in [2\pi; 3\pi]$, то $\arccos(\cos(x-2\pi)) = \frac{2\pi+x}{5}$

$x - 2\pi = \frac{2\pi+x}{5} \Rightarrow 5x - 10\pi = 2\pi + x \Rightarrow \boxed{x = 3\pi}$

Ответ: $-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

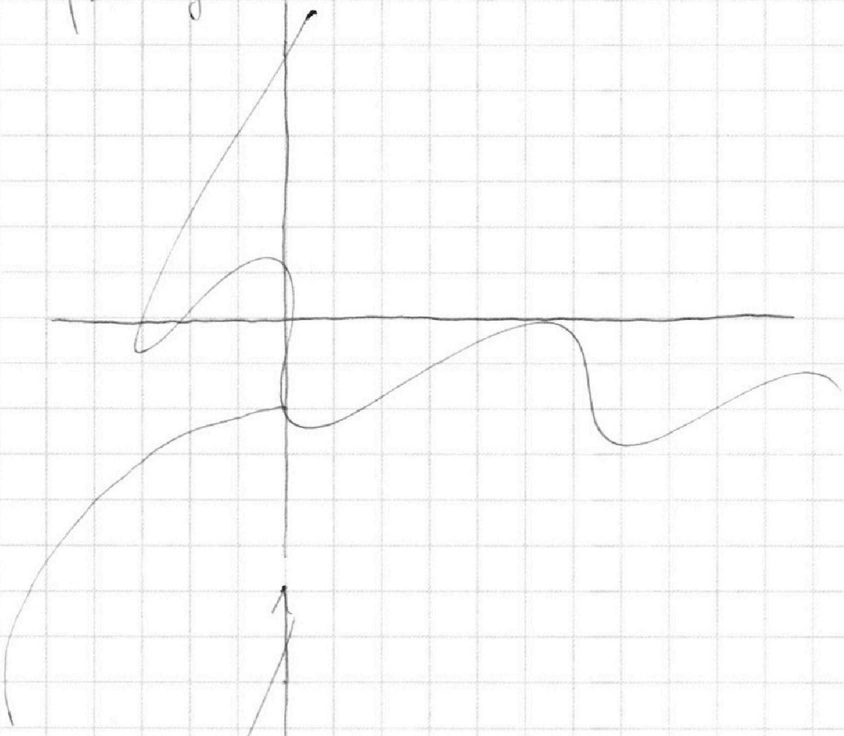
N4

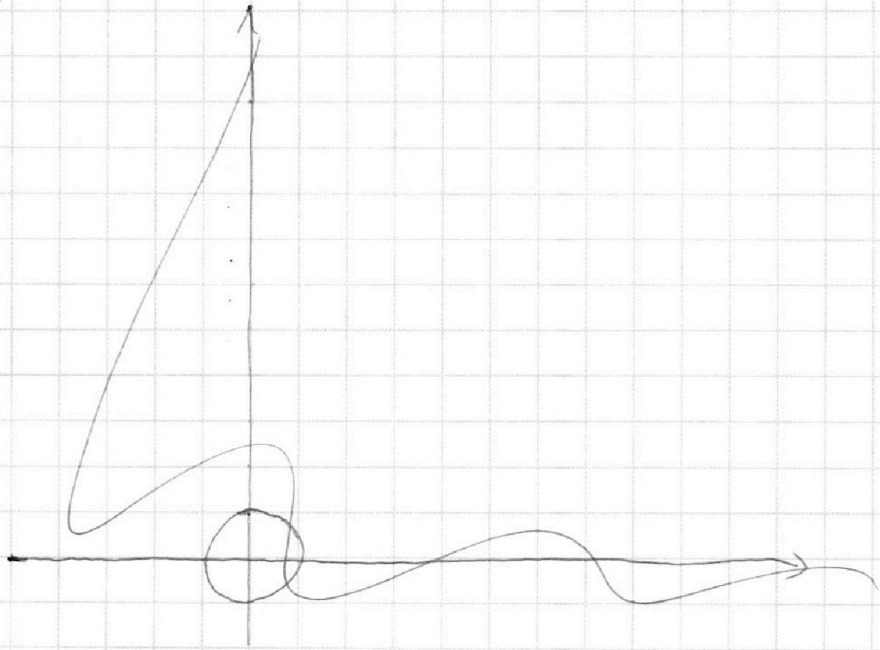
$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3} \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-10)^2-36)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{a}{3}x+\frac{4b}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x^2+(y-10)^2=36 \end{array}\right. \end{cases}$$

Построим график 2-го ур-я.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
			X			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

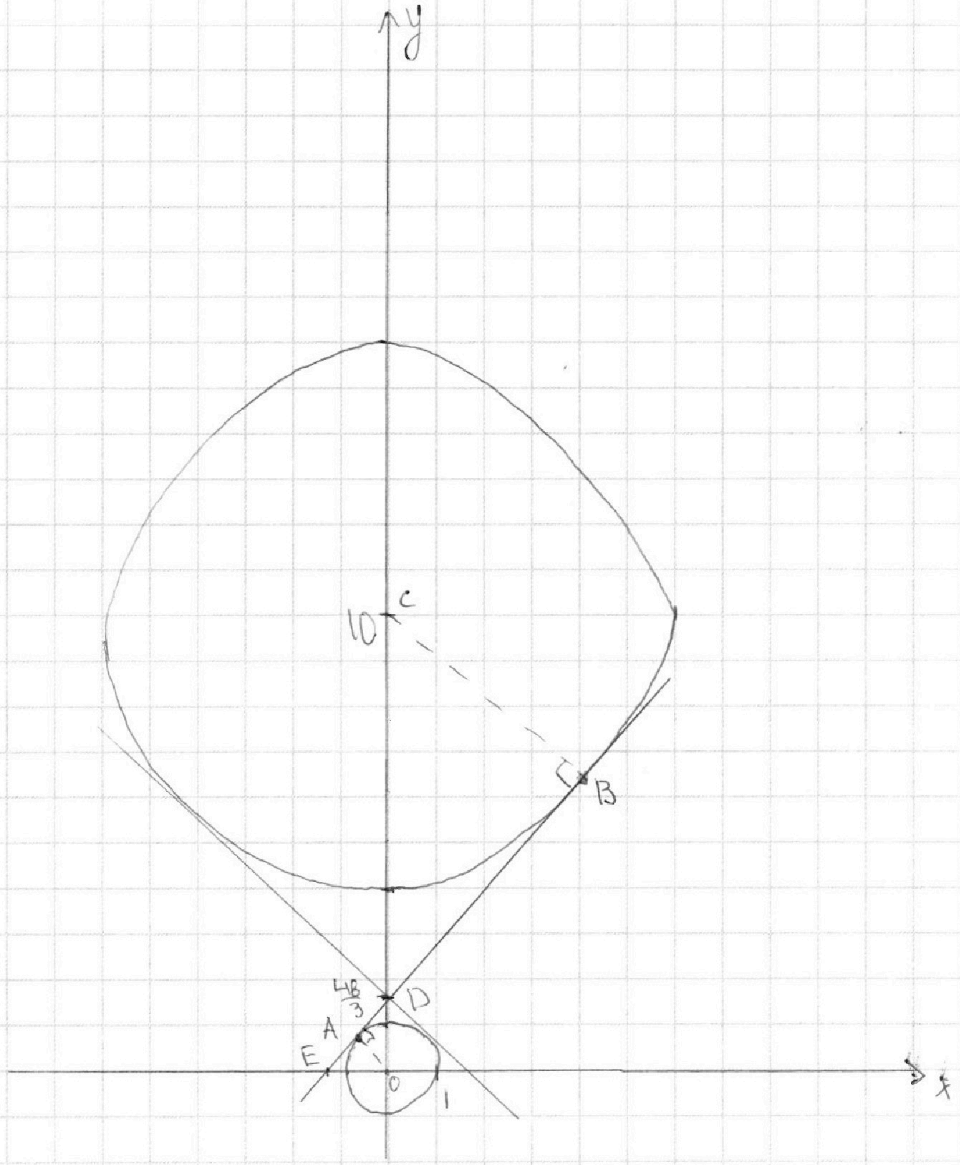


График ~~2-го~~ (1-20) ур-я — прямая. Есть только 2 случая, когда не найдётся такое b, при кот. будет 4 решения — это такие 2 прямые, кот. могут либо пересекать только 1 окр., либо касаться обеих окружностей.

Рассм. прямую, у кот. $a>0$;

Из ~~поб~~ подобия $\triangle AOD$ и $\triangle BCD$ следует:

$$\frac{1}{\frac{4b}{3}} = \frac{6}{10-\frac{4b}{3}} \Rightarrow \frac{1}{4b} = \frac{6}{30-4b} \Rightarrow 30-4b = 24b \Rightarrow b = \frac{30}{28} = \frac{15}{14};$$

~~Т.к. эти две прямые~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Найдём точку пересечения прямой с Ox;
Из подобия $\triangle DAO$ и $\triangle DOE$ следует:

$$\frac{AO}{OE}=\frac{DA}{DO}\Rightarrow OE=\frac{AO\cdot DO}{DA}=\frac{1\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{15}{14}}{\sqrt{DO^2-AO^2}}=\frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{15}{14}}{\sqrt{\frac{16}{9}\cdot\frac{225}{196}-1}}=\frac{\frac{10}{7}}{\sqrt{\frac{100}{49}-1}}=$$

$$=\frac{\frac{10}{7}}{\sqrt{\frac{51}{49}}}=\frac{10}{7}\cdot\frac{7}{\sqrt{51}}=\frac{10}{\sqrt{51}}=\frac{10}{51}\sqrt{51}$$

Тогда $a=\frac{DO}{OE}=\frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{15}{14}}{\frac{10}{\sqrt{51}}}=\frac{10}{7}\cdot\frac{\sqrt{51}}{10}=\frac{\sqrt{51}}{7}$

Т.к. две эти прямые симметричны отн Oy, то $a=\pm\frac{\sqrt{51}}{7}$;
Это означает, что при $a=\pm\frac{\sqrt{51}}{7}$ не найдется такое b, что система будет иметь 4 реш. $\Rightarrow$ $\boxed{a\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{51}}{7};\frac{\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{51}}{7};+\infty\right)}$

Ответ: $a\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{51}}{7};\frac{\sqrt{51}}{7}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{51}}{7};+\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№5

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3}625 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3}0{,}2 - 3 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 2x>0 \\ 2x\neq 1 \\ y>0 \\ y\neq 1 \end{cases}$ $\quad x>0$, $x\neq \frac{1}{2}$, $y>0$, $y\neq 1$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log_{2x}^4 5} - 3\log_{2x}5 = \dfrac{4}{3}\log_{2x}5 - 3 \\ \log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\dfrac{1}{3}\log_y 5 - 3 \end{cases}$$

Пусть $a = \log_{2x}5$
$b = \log_y 5$

Тогда $\begin{cases} \dfrac{1}{a^4} - 3a = \dfrac{4}{3}a - 3 \;\Big|\cdot 3 \\ b^4 + 4b = -\dfrac{1}{3}b - 3 \;\Big|\cdot 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{3}{a^4} - 9a = 4a - 9 \;\Big|\cdot a^4 \\ 3b^4 + 12b = -b - 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 - 9a^5 = 4a^5 - 9a^4 \\ 3b^4 + 13b + 9 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 13a^5 - 9a^4 - 3 = 0 \\ 3b^4 + 13b + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_5^4(2x) - \dfrac{3}{\log_5 2x} = \dfrac{4}{3\log_5 2x} - 3 \\ \log_5^4 y + \dfrac{4}{\log_5 y} = -\dfrac{1}{3\log_5 y} - 3 \end{cases}$$

Пусть $a = \log_5(2x)$
$b = \log_5 y$

Тогда $\begin{cases} a^4 - \dfrac{3}{a} = \dfrac{4}{3a} - 3 \;\Big|\cdot 3a \\ b^4 + \dfrac{4}{b} = -\dfrac{1}{3b} - 3 \;\Big|\cdot 3b \end{cases}$

$$\begin{cases} 3a^5 - 9 = 4 - 9a \\ 3b^5 + 12 = -1 - 9b \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^5 + 9a - 13 = 0 \\ 3b^5 + 9b + 13 = 0 \end{cases}\Big|+ \quad \cancel{3}a^5 + \overset{3}{\cancel{9}}a + \cancel{3}b^5 + \overset{3}{\cancel{9}}b = 0$$

$$a^5 + 3a = -b^5 - 3b$$
$$\Downarrow$$
$$a = -b$$

Ур-е $3a^5 + 9a - 13 = 0$ имеет 1 корень, т.к. ф-я $f(a) = 3a^5 + 9a - 13$ монотонна. Аналогично со 2-ым ур-ем.

Тогда $a + b = 0 \Rightarrow \log_5(2x) + \log_5 y = 0$

$\log_5(2xy) = 0 \Rightarrow 2xy = 1 \Rightarrow \boxed{xy = \frac{1}{2}}$

Ответ: $\frac{1}{2}$

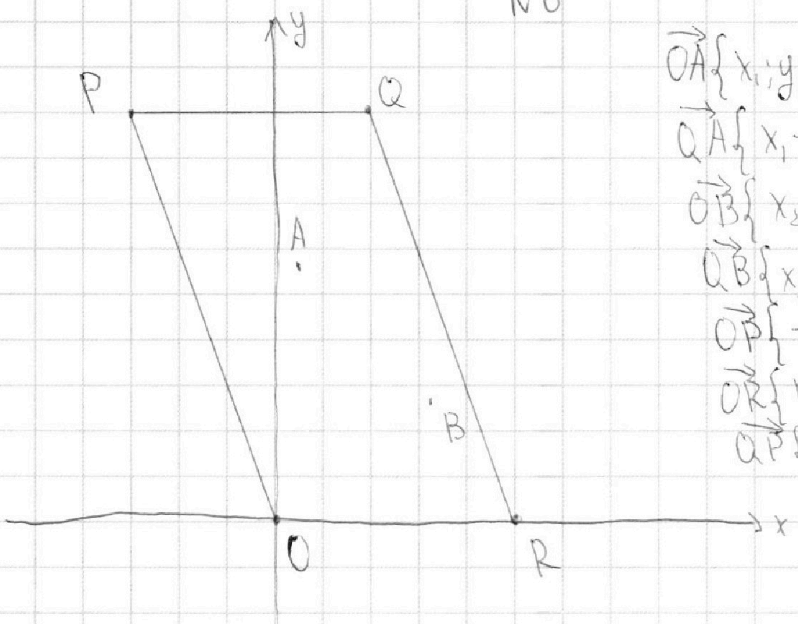
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N6



$\overrightarrow{OA}\{x_1;y_1\}$

$\overrightarrow{QA}\{x_1-2;y_1-80\}$

$\overrightarrow{OB}\{x_2;y_2\}$

$\overrightarrow{QB}\{x_2-2;y_2-80\}$

$\overrightarrow{OP}\{-16;80\}$

$\overrightarrow{OR}\{18;0\}$

$\overrightarrow{QP}\{-18;0\}$

$\overrightarrow{QR}\{16;-80\}$

Запишем условие того, что точки A и B лежат внутри параллелограмма:

для т. A:

$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OP}|\geq 0$

$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OR}|\leq 0$

$|\overrightarrow{QA}\times\overrightarrow{QP}|\leq 0$

$|\overrightarrow{QA}\times\overrightarrow{QR}|\geq 0$

$$\begin{cases} 80x_1+16y_1\geq 0 \\ -18y_1\leq 0 \\ 18(y_1-80)\leq 0 \\ \cancel{-18(y_1-80)\geq 0}\quad \cancel{-80x_1-16y_1\geq 0}\quad -\overset{5}{\cancel{80}}(x_1-2)-16(y_1-80)\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1\geq -\frac{16}{80}y_1=-\frac{y_1}{5} \\ y_1\geq 0 \\ \cancel{y_1\leq 80}\ y_1\leq 80 \\ \cancel{x_1\leq -\frac{16}{80}}\ 5x_1-10+y_1-80\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\leq y_1\leq 80 \\ -\frac{y_1}{5}\leq x_1\leq 18-\frac{y_1}{5} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Аналогично для т. B: $\begin{cases} 0 \le y_2 \le 80 \\ -\frac{y_2}{5} \le x_2 \le 18 - \frac{y_2}{5} \end{cases}$

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$

$y_2 - y_1 = 45 + 5x_1 - 5x_2 = 5(9 + x_1 - x_2) \Rightarrow (y_2 - y_1) \vdots 5$

Значит, $y_2 - y_1 = \{\pm 0; \pm 5; \pm 10; \pm 15; \pm 20; \pm 25; \pm 30; \ldots; \pm 80\}$

~~Так же~~

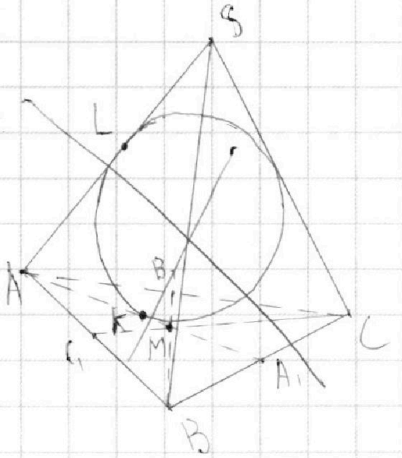
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

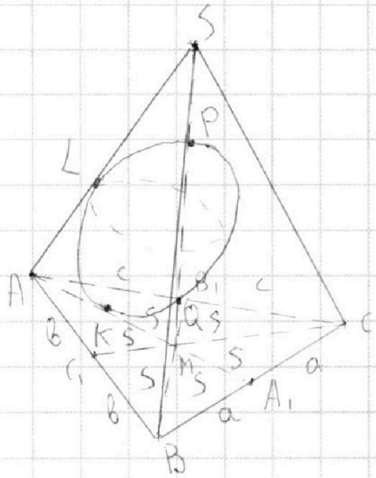
1 2 3 4 5 6 7 [X]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

N7





$AA_1^2 = 4b^2 + a^2 - 4ab\cos\angle ABC = 4c^2 + a^2 - 4ac\cos\angle ACB$

$b^2 - ab\cos\angle ABC = c^2 - ac\cos\angle ACB$

$ac\cos\angle ACB - ab\cos\angle ABC = c^2 - b^2$

$\frac{2b}{\sin\angle A_1} = \frac{AA_1}{\sin\angle B}$

$\frac{2c}{\sin\angle A_1} = \frac{AA_1}{\sin\angle C}$

$S = \frac{S_{ABC}}{6} = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$