



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-14; 42)$, $Q(6; 42)$ и $R(20; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

- $a, b, c \in \mathbb{N}$; $ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$ $bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$; $ac : 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{20}$;
 $a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$; $b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$; $c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$;
- $a_1 + b_1 \geq 9$; $b_1 + c_1 \geq 14$; $a_1 + c_1 \geq 19$; \Rightarrow
 $\Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 42$; $a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$;
рав-во при $a_1 = 7$; $b_1 = 2$; $c_1 = 12$;
- $a_2 + b_2 \geq 10$; $b_2 + c_2 \geq 13$; $a_2 + c_2 \geq 18$; \Rightarrow
 $\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 41$; $a_2 + b_2 + c_2 \geq 21$;
рав-во при $a_2 = 7$; $b_2 = 3$; $c_2 = 11$;
- $a_3 + b_3 \geq 10$; $b_3 + c_3 \geq 13$; $c_3 + a_3 \geq 30$; \Rightarrow
 $\Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 53$; $a_3 + b_3 + c_3 \geq 27$;
рав-во не достигается так как $a_3 + c_3 \geq 30$;
тогда $a_3 + b_3 + c_3 \geq 30$; рав-во при $a_3 = 15$;
 $b_3 = 0$; $c_3 = 15$;
- Тогда $abc = 2^{a_1 + b_1 + c_1} \cdot 3^{a_2 + b_2 + c_2} \cdot 5^{a_3 + b_3 + c_3}$;
 $abc \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$; рав-во при $a = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^{15}$;
 $b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0$; $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$;
- Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$;

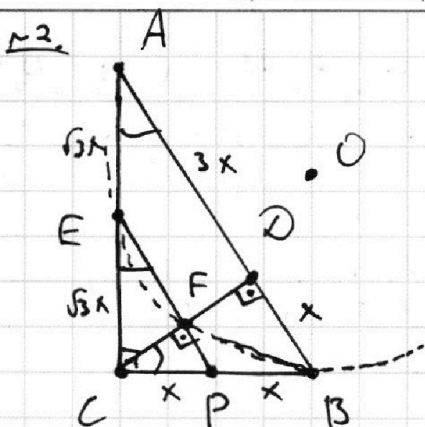
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AB \parallel EF; AD:DB = 3:1;$$

$$\bullet \text{ Пусть } DB = x; AD = 3x;$$

$$CD = \sqrt{3x \cdot x} = \sqrt{3}x;$$

$$BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x;$$

$$AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = 2\sqrt{3}x;$$

$$\bullet \text{ Тогда } \angle CAB = 30^\circ; EF \perp BC = P;$$

$$\angle CAB = \angle CEP = \angle BCD;$$

т.к. $AB \parallel EF$

\bullet PB - касательная, тогда

$$CP = y; PB = 2x - y; FP = \frac{y}{2}; PE = 2y;$$

$$\bullet \text{ Тогда } PB^2 = PF \cdot PE; (2x - y)^2 = \frac{y}{2} \cdot 2y;$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 = y^2; 4x^2 = 4xy; y = x;$$

$$\bullet EC = \sqrt{3}x; CP = x; PB = x; CF = \frac{\sqrt{3}}{2}x; EF = 2x - \frac{x}{2} = \frac{3}{2}x;$$

$$S_{CEF} = \frac{3}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}x^2.$$

$$S_{ABC} = 2\sqrt{3}x \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}x^2;$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 8}{5\sqrt{3}} = \frac{16}{3} //$$

Ответ: $\frac{16}{3}$;

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\cos x) \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{5\pi}{2} \leq 5 \arcsin(\cos x) \leq \frac{5\pi}{2};$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2};$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi;$$

• если $\pi < x \leq 2\pi$, то $\arcsin(\cos x) = x - \frac{5\pi}{2}$;

$$5x - \frac{15\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = 8\pi; \quad x = 2\pi;$$

• если $0 < x \leq \pi$, то $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$;

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; \quad 2\pi = 6x; \quad x = \frac{\pi}{3};$$

• если $-\pi < x \leq 0$, то $\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$;

$$5x + \frac{5\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = -2\pi; \quad x = -\frac{\pi}{2};$$

• если $-2\pi < x \leq -\pi$, то $\arcsin(\cos x) = -\frac{3\pi}{2} - x$;

$$-\frac{15\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}; \quad -8\pi = 6x; \quad x = -\frac{4}{3}\pi;$$

• если $-3\pi \leq x \leq -2\pi$, то $\arcsin(\cos x) = x + \frac{5\pi}{2}$;

$$5x + \frac{25\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}; \quad 4x = -12\pi; \quad x = -3\pi;$$

Ответ: $-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi;$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

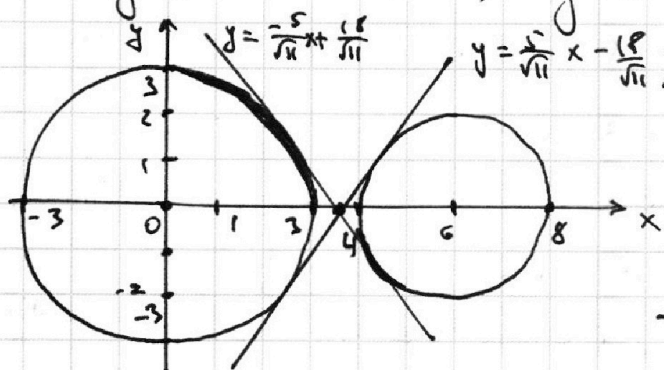


реш.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

трех. при каком-то b ;

- $x^2 + y^2 = 3^2$; - оуп. с центром в $(0; 0)$ и радиусом 3
- $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$; $(x-6)^2 + y^2 = 4$; - оуп. с центром в $(6; 0)$ и радиусом 2;
- $2y = -ax + 3b$; $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$;



$$y + kx + l = 0;$$

пр-ые касат.
к двум оуп.

условие касания:

$$\frac{|l|}{\sqrt{k^2+1}} = 3; \frac{|6k+l|}{\sqrt{k^2+1}} = 2;$$

- в первом случае $l > 0$; $6k+l > 0$;
 $l = 3\sqrt{k^2+1}$; $6k+l = 2\sqrt{k^2+1}$; $18k+3l = 2l$; $-l = 18k$;
 $-6k = \sqrt{k^2+1}$; $36k^2 = k^2+1$; $35k^2 = 1$; $k = \frac{1}{\sqrt{35}}$;
 но это внеш. касат.

- $6k+l < 0$; $k < 0$
 $l = 3\sqrt{k^2+1}$; $-6k-l = 2\sqrt{k^2+1}$; $-18k-3l = 2l$; $5l = -18k$;
 $-\frac{6k}{5} = \sqrt{k^2+1}$; $\frac{36k^2}{25} = \sqrt{k^2+1}$; $36k^2 = 25k^2 + 25$;
 $11k^2 = 25$; $k = -\frac{5}{\sqrt{11}}$; $l = -\frac{18}{5} \cdot \frac{-5}{\sqrt{11}} = \frac{18}{\sqrt{11}}$;

- $l < 0$; $6k+l > 0$; $k > 0$;
 $-l = 3\sqrt{k^2+1}$; $6k+l = 2\sqrt{k^2+1}$; $18k+3l = -2l$;
 $18k = -5l$; $l = -\frac{18}{5}k$; $-\frac{6k}{5} = \sqrt{k^2+1}$;
 $k = \frac{5}{\sqrt{11}}$; $l = -\frac{18}{\sqrt{11}}$;
 две касательные (внутренние);

$$y = \frac{5}{\sqrt{11}}x - \frac{18}{\sqrt{11}}; \quad y = -\frac{5}{\sqrt{11}}x + \frac{18}{\sqrt{11}};$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } -\frac{a}{2} = \frac{-5}{\sqrt{11}}; a = \frac{10}{\sqrt{11}}; \text{ или } a = \frac{-10}{\sqrt{11}};$$

$$-\frac{a}{2} \leq \frac{-5}{\sqrt{11}}; a \geq \frac{10}{\sqrt{11}}; -\frac{a}{2} \geq \frac{10}{\sqrt{11}}; a \leq \frac{-10}{\sqrt{11}};$$

при касании точки пересечения прямой с окружностью будет две, поэтому при $a = \frac{10}{\sqrt{11}}$ или $a = \frac{-10}{\sqrt{11}}$ наша система имеет максимум 2 решения при касании в.

при $a < \frac{-10}{\sqrt{11}}$ или $a > \frac{10}{\sqrt{11}}$ найдётся такое b , что решений будет 4, то есть прямая будет пересекать максимум одну окружность, значит ≤ 2 решений;

при $-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$ всегда найдётся такое b , что прямая будет иметь 4 пересечения с окружностями, достаточно провести её через точку пересечения двух взаимных касательных; через точку

$$(3, 6; 0), 0 = -1,8a + \frac{3}{2}b; 1,5b = 1,8a;$$

$$b = \frac{1,8}{1,5}a; b = \frac{6}{5}a; b = 1,2a;$$

при таком b будет 4 решения системы;

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}} \right);$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\bullet \log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_{x^2} 243 - 8; \quad x \neq 1; y \neq 1; \quad x > 0; y > 0; \frac{1}{x} > 0; \frac{1}{y} > 0;$$
$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} - \frac{2,5}{\log_3 x} + 8 = 0; \quad \log_3^4 x + \frac{3,5}{\log_3 x} + 8 = 0;$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 3 = \log_{25y^2} (3'') - 8;$$

$$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} - \frac{5,5}{\log_3 (5y)} + 8 = 0; \quad \log_3^4 (5y) - \frac{3,5}{\log_3 (5y)} + 8 = 0;$$

• Заметим, если $u = \log_3 x$; $v = \log_3 (5y)$,

$$\text{то } u^4 + \frac{3,5}{u} + 8 = 0; \quad \text{если } u \text{ - решение}$$
$$v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0; \quad \text{первого ур-ния,}$$
$$\text{то } -u \text{ - решение}$$

u наберет v -реш. 2-го ур-ния;
т.к. $u \neq 0$, то $u^5 + 8u + 3,5 = 0$
 $u \neq 0$, то $v^5 + 8v - 3,5 = 0$

заметим, что эти функции строго
возрастающие \Rightarrow имеют равно,
корень, т.к. если подставить допустим
1000 и -1000, то будут разные знаки
у непрерывных значений; 0 - не
корень функции непрерывной (без
выколотой точки), тогда равно (решение)

$$\log_3 x = -\log_3 (5y); \quad \log_3 (5xy) = \log_3 1;$$
$$5xy = 1; \quad xy = \frac{1}{5}; \quad xy = 0,2;$$

Ответ: 0,2;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6. $O(0;0); P(-14;42); Q(6;42); R(20;0);$
 $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33; (3x_2 + y_2) - (3x_1 + y_1) = 33;$

• заметим, что на прямой вида
 $y = -3x + b$, где $b \in \mathbb{Z}$ значение
функции $f(x,y) = 3x + y$, постоянно;
 $y + 3a = -3(x-a) + b; 3(x-a) + y + 3a = 3x + y;$

• тогда $f(x_2; y_2) - f(x_1; y_1) = 33;$
всего таких прямых в нашем паралле-
лограмме 61, достигаются все зна-
чения от 0 до 60;

• Тогда A может быть с прямой, где $f(x,y) = 0$,
пройдем через прямые от 0 до 60;
 $A < 0; B < 33;$ $A < 27; B < 60;$
 $A < 1; B < 34; \dots$

на прямой, той номер; 3 всего 15
подходящих точек с целыми коорди-
натами, на остальных лишь 14;
Тогда всего способов выбрать A и B

$$10 \cdot 15^2 + 18 \cdot 14^2 = 5778;$$

(т.к. можно взять любую точку на первой
прямой и любую на другой)

Ответ: 5778;



- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

7. $AS = BC = 12; S + BC = 90;$

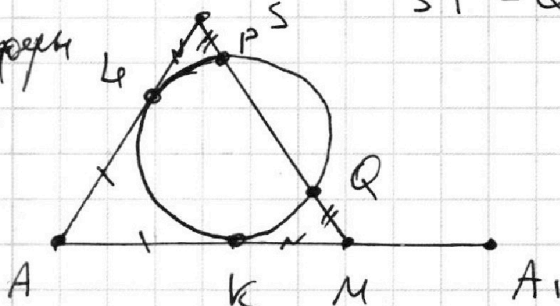
а) рассмотрим сегменты $SA A_1$; $SP = QM$;

ω - окружность - сегменты среза

ω касается AS в L ;

ω касается AM в K ;

тогда $AK = AM$
(как отрезки касательных)



MK - касательная $\Rightarrow MK^2 = MQ \cdot MP$;
 SL - касательная $\Rightarrow SL^2 = SP \cdot SQ$;

$\Rightarrow MK = SL \Rightarrow AM = SA = 12$; тогда $AA_1 = 18$;

$BC = 12$; $AK = h_a = \frac{S_{ABC} \cdot 2}{BC} = \frac{180}{12} = 15$; AK - высота $\triangle ABC$;

$\sqrt{AA_1^2 - AK^2} = A_1K = 3\sqrt{36 - 25} = 3\sqrt{11}$;

и наружная длина $BH = 6 + 3\sqrt{11}$; $CH = 6 - 3\sqrt{11}$;

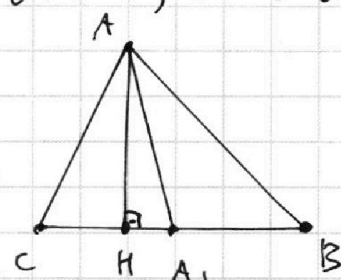
$AB^2 = 15^2 + (6 + 3\sqrt{11})^2$; $m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$;

$AC^2 = 15^2 + (6 - 3\sqrt{11})^2$;

$m_c = \frac{\sqrt{(12^2 + 15^2 + 135 - 36\sqrt{11}) \cdot 2 - 15^2 - 135 - 36\sqrt{11}}}{2}$;

$= \frac{\sqrt{1008 - 108\sqrt{11} - 15^2 - 135}}{2} = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2}$;

$m_b = \frac{\sqrt{(12^2 + 15^2 + 135 + 36\sqrt{11}) \cdot 2 - 15^2 - 135 + 36\sqrt{11}}}{2} = \frac{\sqrt{648 + 108\sqrt{11}}}{2}$;



$m_b \cdot m_c = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11} = \sqrt{162^2 - 27^2 \cdot 11} =$

$= \sqrt{2^2 \cdot 81^2 - 27^2 \cdot 11} = \sqrt{2^2 \cdot 3^8 - 3^6 \cdot 11} = 3^3 \sqrt{36 - 11} =$

$= 3^3 \cdot 5 = 27 \cdot 5 = 135$;

$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 135 \cdot 18 = 2430$;

б) Ω касается BCS в точке N ; $SN = 4$;

$R = 5$; $SN = r$; O - центр Ω ; $ON = 5$, $SO = \sqrt{41}$;

• так как $AS = AM$, то точки S и M рав-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

конца, относительно $O \rightarrow$

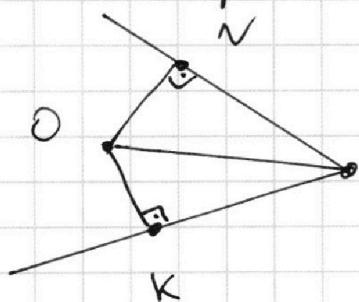
$$\Rightarrow OK = 5; OM = OS = \sqrt{41}; KM = 4;$$

$$AK = 12 - 4 = 8;$$

$$\text{Тогда } KH' = 15 \cdot \frac{10}{18} = \frac{15 \cdot 5}{3} = \frac{25}{3};$$

KH' - ~~перпендикул.~~ на BC ;

• рассмотрим $\triangle NKH'$



$$ON = OK = 5;$$

$$KH' = \frac{25}{3} = H'N \text{ (как осн. катет.)}$$

$$\cancel{OH'} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{34};$$
$$\sin \angle OH'N = \frac{8}{\frac{5}{3} \sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}};$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha;$$

$$\cos \angle KH'N = 1 - 2 \cdot \frac{9}{34} = \frac{34 - 18}{34} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17};$$

$$\angle KH'N = \arccos \frac{8}{17};$$

Ответ: а) 2430 ; б) $\arccos \frac{8}{17}$



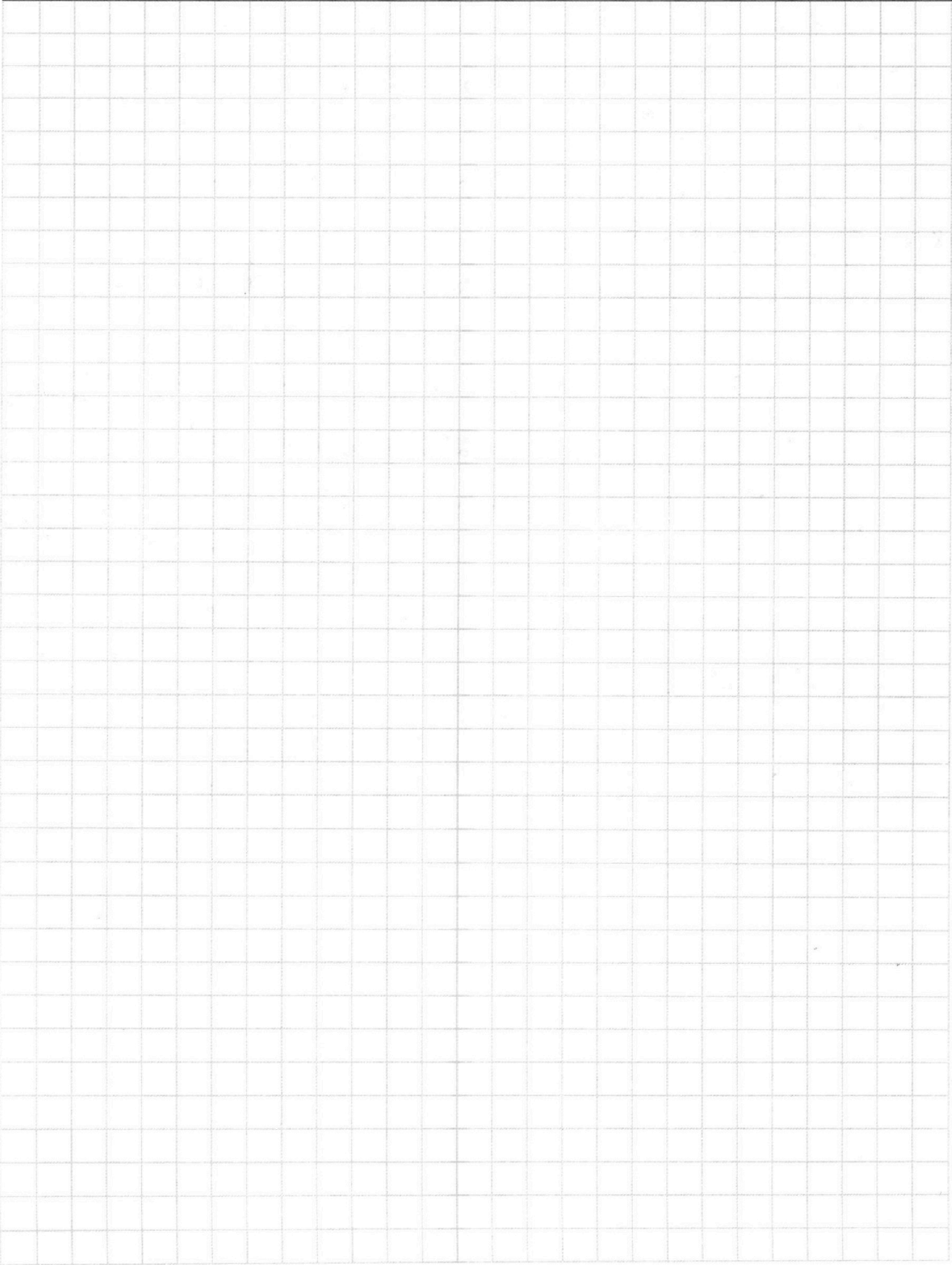
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

| | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



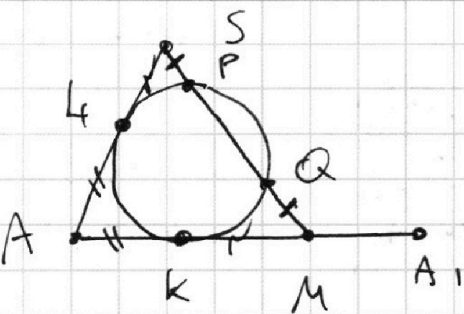
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

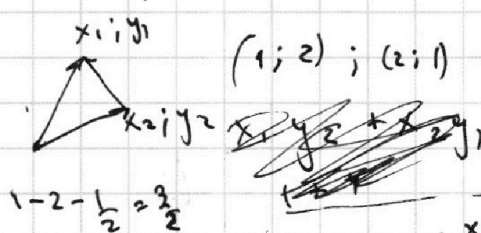
- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

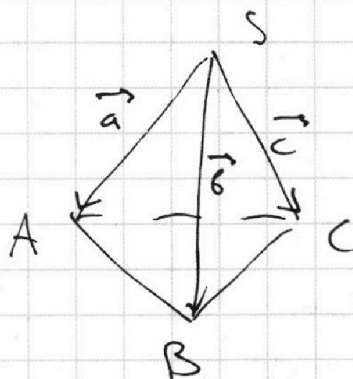


$S_{ABC} = 90$; $SA = BC = 12$

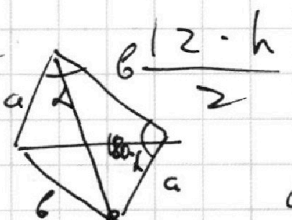


$1 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

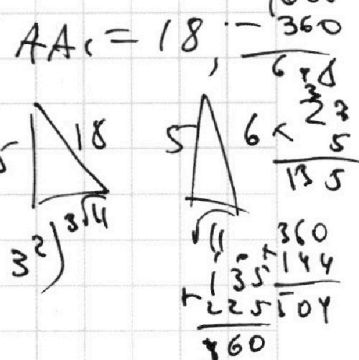
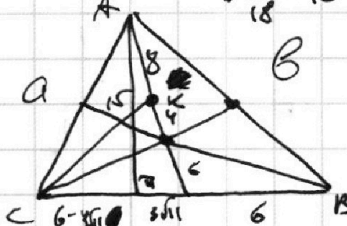
$\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{\frac{4-1}{2}} = \frac{3}{2}$



$|\vec{a}| = 12$
 $\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$
 $|\vec{c} - \vec{b}| = 12$



$h = 15$
 $\frac{10}{18} \cdot 15 = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$
 $AS = AM = 12$
 $AA_c = 18$



$SK^2 = SP \cdot SQ$
 $KM^2 = M'Q \cdot M'P$
 $a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2$
 $a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha = m^2$
 $2(a^2 + b^2) = c^2 + m^2$

$m = 36$; $c = 12$
 $2(a^2 + b^2) = 12^2 (1 + 3^2)$

$a^2 = 15^2 + 36 - 36\sqrt{11} + 99 = 360 - 36\sqrt{11}$
 $b^2 = 15^2 + 36 + 36\sqrt{11} + 99 = 360 + 36\sqrt{11}$

$m_c = \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} = \sqrt{720 - 72\sqrt{11} + 2 \cdot 12^2 - 360 - 36\sqrt{11}}$

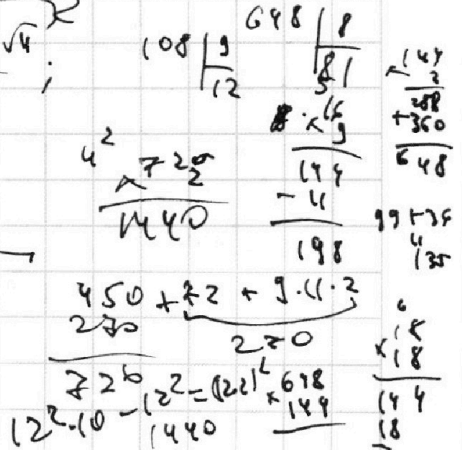
$\frac{135}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{90}{3} = 30$
 $m_c = \frac{\sqrt{648 - 108\sqrt{11}}}{2}$

$m_c = \sqrt{648 + 108\sqrt{11}}$

$m_b \cdot m_c = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{648^2 - 108^2 \cdot 11}$
 $9 \cdot 8^2 - 9^2 \cdot 12^2 \cdot 11$

$(2m)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$
 $m = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$

$9 \cdot 3 \cdot \sqrt{9 \cdot 16 - 11}$
 $\frac{648}{21} \cdot \frac{4}{11} = \frac{108}{28} \cdot \frac{4}{11}$



324

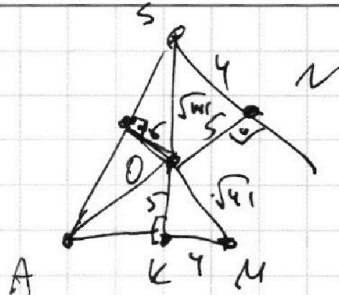
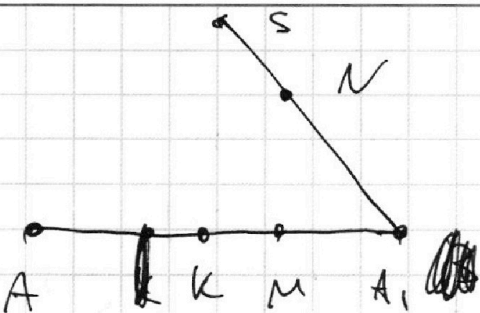
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

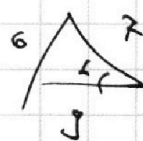
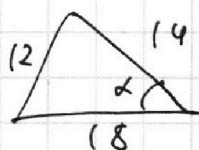
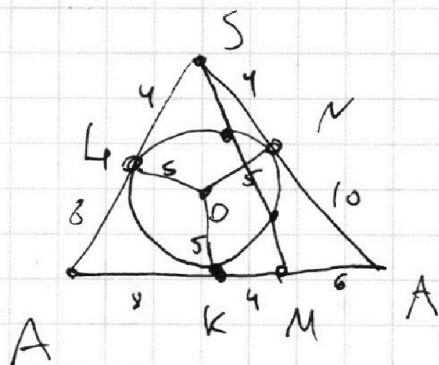
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$16 + 25 = 41$$

$$MO = SO = \sqrt{41};$$

$$KM = 4$$



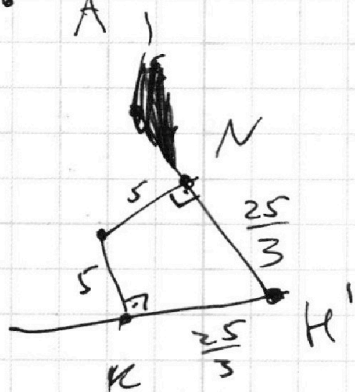
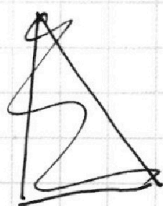
$$50 + 80$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ - 80 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$36 = 19 + 81 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{57}{63}; \quad 94$$

$$\cos \alpha = \frac{19}{21}; \quad 57$$



$$5 \frac{25}{3} \rightarrow 1 \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \rightarrow 3 \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} \cdot \sqrt{34}$$

$$\left(\frac{50}{\sqrt{34}} \right)^2 =$$

$$\frac{5}{\sqrt{11}} x - \frac{18}{\sqrt{11}} = y \quad \sqrt{1 + \frac{25}{9}} = h = \frac{125}{3 \cdot \sqrt{34}} = \frac{25}{\sqrt{34}}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + (5x - 18)^2 \cdot \frac{1}{11} = 9 \quad y^2 = (5x - 18)^2 \cdot \frac{1}{11}$$

$$11x^2 + 25x^2 - 180x + 18^2 = 99$$

$$36x^2 - 180x + 18^2 = (6x - 15)^2 = 0 \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\begin{array}{r} 18^2 - 321 \\ - 99 \\ \hline 225 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a, b, c \in \mathbb{N}$ $a, b : 2^9 3^{10} 5^{10}$

$a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3}$

$b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3}$

$c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3}$

$a_1 + b_1 \geq 9$

$a_2 + b_2 \geq 10$

$a_3 + b_3 \geq 10$

$b_1 + c_1 \geq 14$

$b_2 + c_2 \geq 13$

$b_3 + c_3 \geq 13$

$a_1 + c_1 \geq 19$

$a_2 + c_2 \geq 18$

$a_3 + c_3 \geq 30$

$a + b + c = 41$

$2 + 7 \geq 9$

$2 + 12 \geq 14$

$2 + 12 \geq 19$

$2 + 7 + 12 = 21$

$7 + 19 + 14 = 28 + 14 = 42$

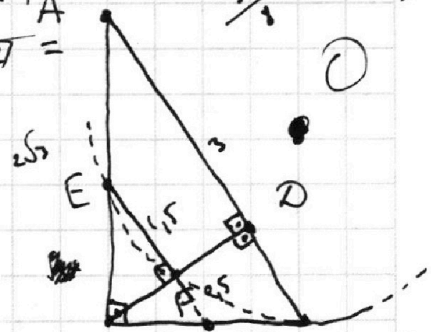
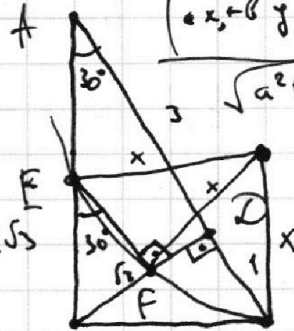
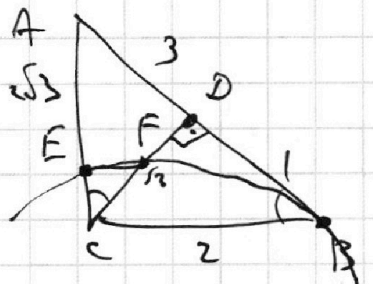
$21 =$

$ax + by + c = 0$

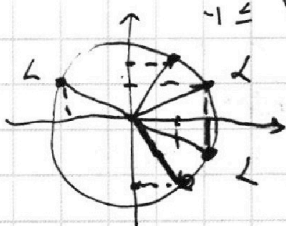
$(ax + by + c) \cdot A$

$\sqrt{a^2 + b^2} =$

$\frac{2\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 2\sqrt{3}$
 $\frac{3\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 3\sqrt{3}$
 $\frac{5\sqrt{3} \cdot 2}{2} = 5\sqrt{3}$



$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} - x = x + \frac{\pi}{2}$
 $\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$
 $2\pi = 6x$
 $x = \frac{\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{6}$
 $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
 $y = x$
 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
 $x - \frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$
 $x - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - x$
 $2x = 2\pi$
 $x = \pi$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$

$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2}$

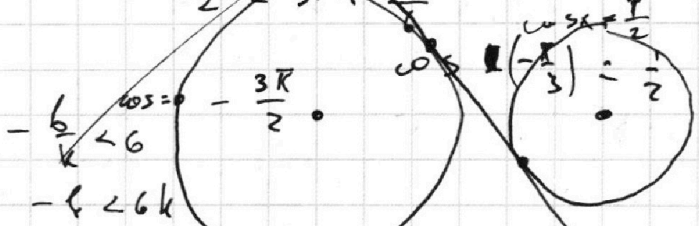
$-3\pi \leq x \leq 2\pi$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

$\cos x = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$x = -\frac{\pi}{3}$



$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $y = kx + b$
 $36k^2 = 25k^2 + 25$
 $11k^2 = 25$
 $k = \frac{5}{\sqrt{11}}$
 $y - kx - b = 0$
 $\frac{y - b}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$
 $-3.6k = 3\sqrt{k^2 + 1}$
 $\frac{18}{5}k = \sqrt{k^2 + 1}$

$6 = 3\sqrt{k^2 + 1}$

$-6k - b = 2\sqrt{k^2 + 1}$

$-18k - 3b = 2b$

$\frac{-6k - b}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$

$3.6k = 3\sqrt{k^2 + 1}$
 $\frac{18}{5}k = \sqrt{k^2 + 1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x^3 = \log_3 x^2 \cdot 243 - 8$$

$$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2} \log_3 x^3 - 8$$

$$\log_3 27 = \log_3 4 \cdot 2$$

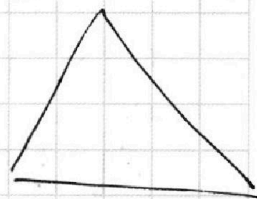
$$t = \log_3 x; \quad t^4 + \frac{3,5}{t} + 8 = 0; \quad t = -2,5 = -3,5$$

$$\log_2^4 (xy) + 2 \log_2 xy^3 = \log_2 25y^2 \cdot 3^{11} - 8$$

$$2 - 5,5 = -3,5$$

$$2 \log_2 y^3 = \frac{11}{2} \cdot \log_2 y^3 - 8$$

$$v = \log_2 y; \quad v^4 - \frac{3,5}{v} + 8 = 0 \quad (-t)$$

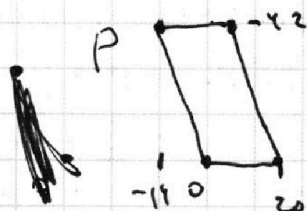


$$\log_3 x = -\log_3 5xy; \quad \log_3^2 5xy = 0$$

$$x^5 + 8x + 3,5 = 0 \quad xy = \frac{2,2}{3} \log_3 1$$

~~$$2x^5 + 16x + 7 = 0$$~~

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$



~~$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$~~

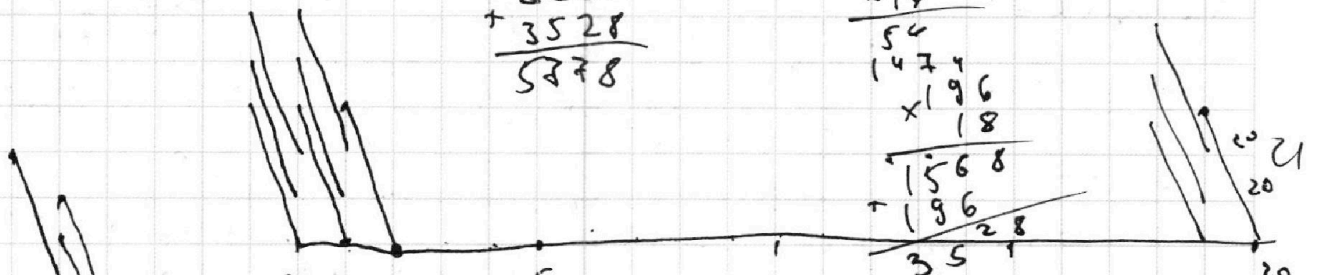
$$-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5;$$

$$3(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 33$$

$$(y_2 + 3x_2) - (y_1 + 3x_1) = 33; \quad 60 - x = 33 \quad x = 60 - 33 = 27$$

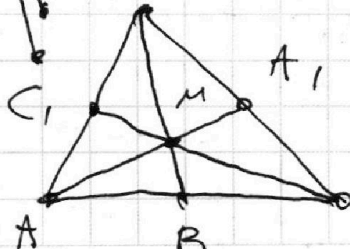
$$\begin{array}{r} 2250 \\ + 3528 \\ \hline 5778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 50 \\ 1474 \\ \times 196 \\ 18 \\ \hline 1568 \\ + 196 \\ \hline 35 \end{array}$$



$$15 \cdot 20 + 40 = 14 = 560 + 315 = 875 \quad 20 \cdot 3 + 12615 \quad 60$$

$$3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 9$$



$$9 (10 \cdot 25 + 2 \cdot 14^2)$$

$$\begin{array}{r} \times 642 \\ 3 \\ \hline 5778 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 392 \\ + 280 \\ \hline 672 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ \times 14 \\ \hline 196 \quad 21 \cdot 15 \\ \quad 2 \\ \hline 352 \quad 20 \cdot 2 = 4 \end{array}$$