МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Но $ac \vdots 5^{28}$ по условию ~~...~~

Значит $abc \vdots 5^{28}$

Так как 2, 3, 5 – взаимно простые числа,

$abc \vdots 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Значит $abc \geqslant 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$, т.к. a, b, c положительные

Пример, когда достигается равенство:

$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$ Тогда $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$b = 2^2 \cdot 3^4$ и $ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14} \vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{14}$ $bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ca = 2^{16} \cdot 3^{26} \cdot 5^{28} \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

Ответ. $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$ (1) Пусть α_1 - максимальная степень двойки, на
$bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$ (2) которую делится a;
$ac \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$ (3) α_2 - макс. степень 3, на которую делится a
α_3 - макс. степень 5, на которую делится a

Аналогично введём $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ для b и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ для c.

$ab \vdots 2^{\alpha_1+\beta_1}$; значит $\alpha_1+\beta_1 \geq 6$

$ab \not\vdots 2^{\alpha_1+\beta_1+1}$ - т.к. α_1, β_1 - максимальные степени 2, входящие в a и b

Аналогично получаем: $\begin{cases} \alpha_1+\gamma_1 \geq 16 \\ \beta_1+\gamma_1 \geq 14 \end{cases}$

Тогда ~~$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1$~~ сложим эти неравенства:

$2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1 \geq 36$

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \geq 18$ Значит $abc \vdots 2^{18}$

Теперь для $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$:

$\begin{cases} \alpha_2+\beta_2 \geq 13 & \text{- из (1)} \\ \alpha_2+\gamma_2 \geq 25 & \text{- из (3)} \\ \beta_2+\gamma_2 \geq 21 & \text{- из (2)} \end{cases}$ $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq \frac{13+25+21}{2} = \frac{59}{2} = 29{,}5$

т.к. $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2$ - число целое, $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 \geq 30$ значит $abc \vdots 3^{30}$

И для $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$:

$\begin{cases} \alpha_3+\beta_3 \geq 11 & \text{- из (1)} \\ \beta_3+\gamma_3 \geq 13 & \text{- из (2)} \\ \alpha_3+\gamma_3 \geq 28 & \text{- из (3)} \end{cases}$ $\alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \geq \frac{11+13+28}{2} = \frac{52}{2} = 26$

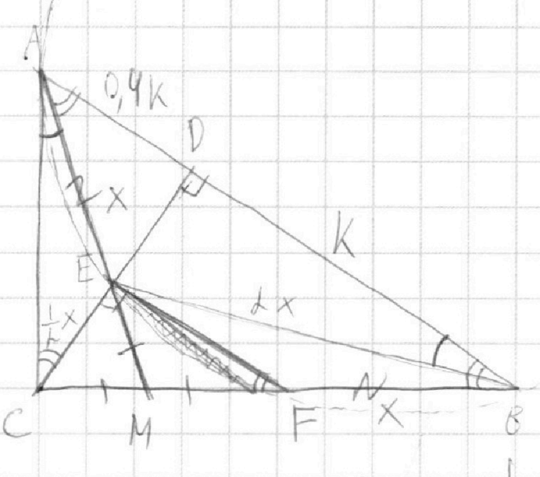
значит $abc \vdots 5^{26}$

~~Так как 2, 3, 5 числа взаимно простые,~~
~~получаем $abc \vdots 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$~~
~~$\Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\angle AEF = 180^\circ - \angle ABC$ – из впис. $AEFB$

$\angle EAB = 180^\circ - \angle AEF$ – т.к. $AB \parallel EF$ (секущая AE)

$\angle EAB = \angle ABC$

Также $\angle ACD = \angle ABC$, т.к. $\angle A$ – общий в $\triangle ACD$ и $\triangle ABC$; $\angle D = \angle ACB = 90^\circ$

$\angle CAE = \angle ABE = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AE}$, т.к. $\angle ABE$ оп. на дугу AE; AC – касательная по условию.

Надо найти $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{CD\cdot AD/2}{CE\cdot EF/2} = \frac{CD\cdot AD}{CE\cdot EF} = \frac{AD\cdot DB}{EF^2}$,

т.к. $\frac{CD}{CE} = \frac{DB}{EF}$ – из подобия $\triangle CDB$ и $\triangle CEF$ ($\angle D = \angle E = 90^\circ$; $\angle F = \angle B$ – из паралл.)

$\triangle AEC \sim \triangle AEB$, т.к. ~~$\angle A$~~
$\angle CAE = \angle EBA$;
$\angle ACE = \angle BAE$.

~~Пусть $AE = x$.~~

~~Тогда $BE = 2x$; $EC = \frac{1}{2}x$~~

~~$FB = x$, т.к. $ABFE$ р/б трапеция~~

~~$\angle EBD$~~
~~$\angle CAM = 90^\circ - 2\beta$, т.к. $90^\circ = \angle CAB + \angle CBA = \angle CAM + 2\beta$~~
~~(где $\beta = \angle CBA$)~~

~~Тогда в $\triangle AED$:~~ ; ~~в $\triangle BED$~~

~~$\sin\beta = \frac{ED}{x}$~~ ~~$\sin(90 - 2\beta) = \frac{ED}{2x} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{ED}{2x}$~~

~~$\cos\beta = \frac{0{,}4k}{x}$~~ ~~$\cos(90 - 2\beta) = \frac{k}{2x} \Leftrightarrow \sin 2\beta = \frac{k}{2x}$~~

~~$2\sin\beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{k}{2x}}{\frac{0{,}4k}{x}} = \frac{1}{0{,}4\cdot 2}$~~ ~~$\sin\beta = \frac{1}{0{,}8\cdot 2}$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$EF = 1{,}4k - 2 \cdot 0{,}4k = 0{,}6k$ (т.к. если опустить высоты в р/б. трапеции $AEFB$, они отсекут от основания по $0{,}4k$

$$\frac{AD \cdot DB}{EF^2} = \frac{0{,}4k \cdot k}{0{,}6 \cdot 0{,}6k^2} = \frac{0{,}4}{0{,}36} = \frac{10}{9}$$

Ответ. $\frac{10}{9}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$10\arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

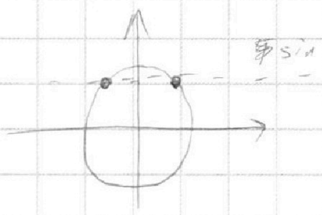
$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi-2x}{10}$ возьмём cos от обеих частей

(1) $\Downarrow$

$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right)$

$\cos\left(\frac{9\pi-2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi-2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{5\pi-9\pi+2x}{10}\right) = \sin\left(\frac{-4\pi+2x}{10}\right) =$

$= \sin\left(\frac{-2\pi+x}{5}\right)$



$\sin x = \sin\left(\frac{-2\pi+x}{5}\right)$

$\Updownarrow$

(*) $\left[\begin{array}{ll} x = \frac{-2\pi+x}{5} + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \frac{-2\pi+x}{5} + 2\pi n & n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Надо, чтобы $\frac{9\pi-2x}{10}$ лежало от 0 до π включительно, чтобы переход (1) был равносилен (т.е. взяв arccos от $\cos\frac{9\pi-2x}{10}$ мы получили бы $\frac{9\pi-2x}{10}$)

$9\pi - 2x \geq 0$ $\quad\quad$ $\frac{9\pi-2x}{10} \leq \pi$

$x \leq \frac{9}{2}\pi$ $\quad\quad$ $-2x \leq \pi$

Вернемся к системе (*) $\quad\quad$ $x \geq -\frac{\pi}{2}$ $\quad\quad$ $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9}{2}\pi\right]$

$\left[\begin{array}{l} 5x = -2\pi + x + 10\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ 5x = 5\pi + 2\pi - x + 10\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(Продолжение)

$$\left[\begin{array}{ll} 4x = -2\pi + 10\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 6x = 7\pi + 10\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n, & n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Отбор корней:

I серия:

$$-\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi k \le \frac{9\pi}{2} \quad \Big| \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$-1 \le -1 + 5k \le 9$$

$$0 \le 5k \le 10$$

$$k = 0; 1; 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2};\ 2\pi;\ \frac{9\pi}{2}$$

II серия:

$$-\frac{\pi}{2} \le \frac{7}{6}\pi + \frac{5}{3}\pi n \le \frac{9\pi}{2} \quad \Big| \cdot \frac{6}{\pi}$$

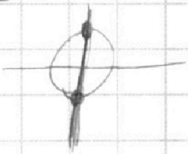
$$-3 \le 7 + 10n \le 27$$

$$-10 \le 10n \le 20$$

$$n = -1; 0; 1; 2$$

$$x = -\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{17}{6}\pi;\ \frac{9}{2}\pi$$

Корни $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$ попали в обе серии, т.к. лежат на оси симметрии



Ответ. $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; 2π; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{9\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 [x] 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Найдём коэффициент при общей внутренней касательной к окружностям. (коэфф-ты равны $-k$ и k - из симметрии отн. Oy)

~~$x^2+y^2=25$~~ ~~$x^2+(9+y)^2=$~~ для этого радиус одной окр-сти увеличим на 2, а другую (меньшую) сожмём до точки при этом касательная из этой точки к новой окр-сти параллельна искомой касательной

$$\begin{cases} y = kx - 9 \\ x^2 + y^2 = 49 \end{cases} \text{ - одно решение}$$

$$x^2 = 49 - (kx-9)^2$$

$$x^2 = 49 - k^2x^2 + 18kx - 81$$

$$(k^2+1)x^2 - 18kx + 32 = 0$$

$D=0$, т.к. одно решение

$$324k^2 - 4 \cdot 32(k^2+1) = 0 \quad |:4$$

$$81k^2 - 32k^2 - 32 = 0$$

$$49k^2 = 32$$

$$k = \pm \frac{4}{7}\sqrt{2}$$

Ответ $a \in \left(-\frac{21\sqrt{2}}{20}; \frac{21\sqrt{2}}{20}\right)$

При $k \in \left[-\frac{4}{7}\sqrt{2}; \frac{4}{7}\sqrt{2}\right]$ - пучок касается или не имеет общ. точек с окр-стью

$$-\frac{5}{6a} \in \left[-\frac{4}{7}\sqrt{2}; \frac{4}{7}\sqrt{2}\right]$$

Пучок не касается при $a \in \left(-\infty; -\frac{21\sqrt{2}}{20}\right] \cup \left[\frac{21\sqrt{2}}{20}; +\infty\right)$

$$-\frac{4}{7}\sqrt{2} \le -\frac{5}{6a} \le \frac{4}{7}\sqrt{2} \quad \Big| \cdot -\frac{5}{6}$$

$$-\frac{20}{42}\sqrt{2} \le \frac{1}{a} \le \frac{20}{42}\sqrt{2}$$ - возьмём обратное $\frac{1}{\frac{10}{21}\sqrt{2}} = \frac{21}{10\sqrt{2}} = \frac{21\sqrt{2}}{20}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

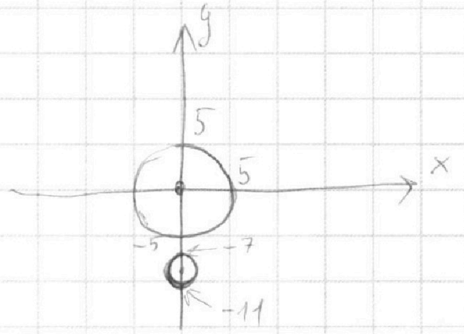
МФТИ

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

Поработаем со 2 строчкой:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5^2 \\ x^2+y^2+18y+81-4=0 \end{array}\right.$$ – эквивалентно 2 строчке

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5^2 \text{ – окр-сть с центром в } (0;0) \text{ радиуса } 5 \\ x^2+(y+9)^2=2^2 \text{ – окр-сть с центром в } (0;-9) \text{ радиуса } 2 \end{array}\right.$$



Теперь 1 строчка:

1) $a=0$

$5x-b=0$

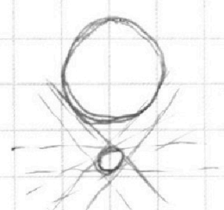
$x=\frac{b}{5}$ при $b=0$ пересекает каждую окр-сть в 2 точках

2) $a\neq 0$ – поделим на a

$\frac{5x}{a}+6y-\frac{b}{a}=0$

$y=-\frac{5}{6a}x-\frac{b}{6a}$ – прямая (изменением коэфф-та b можно её двигать вверх или вниз)

Посмотрим при каких коэфф-тах при x, если провести пучок прямых с этим угловым коэфф-том через одну окружность, этот пучок не заденет, или будет касаться другой окр-сти:



касание достигается, когда коэфф-т прямой равен коэфф-ту одной из общих внутренних касательных к окружностям.

Пучок не задевает ~~общую ок~~ большую окр-сть, когда коэфф-т лежит от $-k$ до k, (k; $-k$ – коэфф-ты общих кас.)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{11^2} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6\cdot\frac{1}{\log_{11}x} = \frac{1}{3}\cdot(-2)\log_x 11 - 5$$

$$\log_{11} x = t$$

$$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t} - 5 \quad \Big|\cdot t$$

$$\cancel{t^4 + \tfrac{1}{t}\ldots}$$

$$t^5 - 6 = -\frac{2}{3} - 5t$$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$ – монотонная функция, ед. решение (t^5 и $5t$ возрастают)

$$\log_{11}^4 \cancel{x}\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\log_{11}\left(\frac{y}{2}\right)} = \log_{\left(\frac{y}{2}\right)^3}\left(11^{-13}\right) - 5$$

$$\log_{11}^4\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\log_{11}\left(\frac{y}{2}\right)} = \frac{1}{3}\cdot(-13)\cdot\frac{1}{\log_{11}\left(\frac{y}{2}\right)} - 5$$

$$m = \log_{11}\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$m^4 + \frac{1}{m} = -\frac{13}{3}\cdot\frac{1}{m} - 5 \quad \Big|\cdot m$$

$$m^5 + 1 = -\frac{13}{3} - 5m$$

$$m^5 + 5m + \frac{16}{3} = 0$$ m^5 и $5m$ возрастают => функция строго монотонна => ед. решение

$m_0 = -t_0$, где m_0, t_0 – решения соотв. уравнений (проверяется подстановкой $m = -t$)

значит

$$\log_{11} x = -\log_{11} y$$

$$\log_{11} xy = \log_{11} x + \log_{11} y = 0,$$ значит $xy = 1$ (из монотонности $\log_{11} x$)

Ответ. 1.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Значит $AH = 14$.

$AB = \sqrt{18^2+14^2} = \sqrt{324+196} = \sqrt{520}$ — из т. Пифагора для $\triangle AHB$.

$AC = \sqrt{18^2+34^2} = \sqrt{324+1156} = \sqrt{1480}$

$AB = 2\sqrt{130}$

$AC = 2\sqrt{370}$

Найдём B_1B и C_1C. Для этого заметим, что $MA_1 = A_1B = A_1C = 10$

Значит $\angle BMC = 90^\circ$

Тогда можно записать т. Пифагора для $\triangle C_1MB$ и $\triangle B_1MC$:

$$\begin{cases} MB^2 + C_1M^2 = C_1B^2 \\ B_1M^2 + MC^2 = B_1C^2 \end{cases}$$

Обозначим $y = \frac{1}{3}C_1C$; $x = \frac{1}{3}B_1B$; $C_1B = \frac{AB}{2} = \sqrt{130}$; $B_1C = \frac{AC}{2} = \sqrt{370}$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 130 \\ x^2 + 4y^2 = 370 \end{cases}$$ подст.

$5(x^2+y^2) = 500$

$x^2+y^2 = 100$

$$\begin{cases} 3x^2 = 30 \\ 3y^2 = 270 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 10 \\ y^2 = 90 \end{cases}$$

$x = \sqrt{10}$, т.к. отрезки имеют полож. длину

$y = 3\sqrt{10}$

$C_1C = 3y = 9\sqrt{10}$

$B_1B = 3x = 3\sqrt{10}$

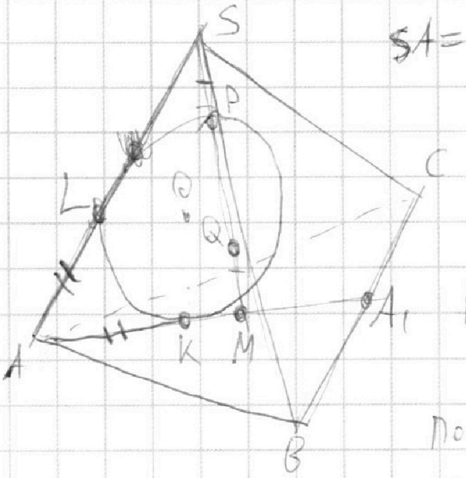
$A_1A \cdot B_1B \cdot C_1C = 30 \cdot 9\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 3^4 \cdot 10^2 = 8100$

Ответ: 8100.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$SA = BC = 20$

O – центр сферы Ω

~~Рассмотрим~~

а) $AL = AK$ – как отрезки касательных из одной точки

Посчитаем степень точки S отн. сферы Ω:

$SL^2 = SP \cdot SQ$

Посчитаем степень M отн. Ω:

$MK^2 = MQ \cdot MP$

MK – кас. по условию

$SP = MQ$ – по условию; $SQ = MP$, т.к. $\begin{cases} SM = SP + PM \\ SM = SQ + QM \end{cases}$ $\begin{cases} SM - QM = SQ \\ SM - SP = PM \end{cases}$

Значит $MK^2 = SL^2$

$MK = SL$

~~MK=~~

$AM = AK + MK = AL + SL = AS = 20$

$AA_1 = 30$, т.к. $\frac{AM}{MA_1} = 2$ – по св-ву медианы

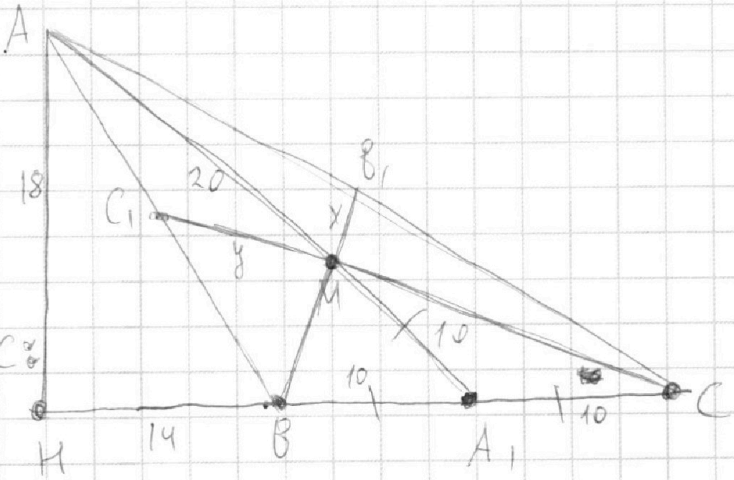
h_A – высота из точки A

$S_{ABC} = \frac{h_A \cdot BC}{2}$

$180 = \frac{h_A \cdot 20}{2}$

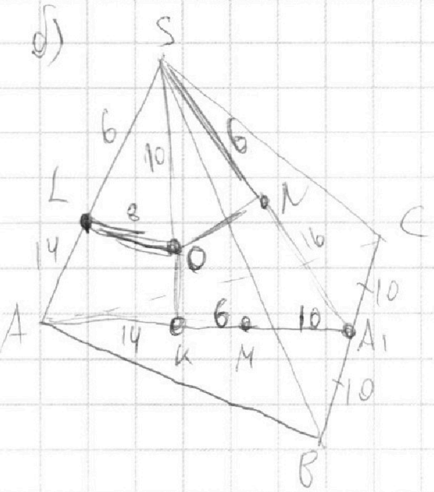
$h_A = 18$

Рассмотрим на $\triangle ABC$:



В $\triangle AHA_1$ по т. Пифагора $HA_1 = \sqrt{30^2 - 18^2} = 6\sqrt{5^2 - 3^2} = 24$

б)



$SL = SN$ как отрезки касательных из M

$SL = 6$

$AL = 14$

$AK = AL = 14$

$KM = 6$ т.к. $AM = 20$

$SO = \sqrt{LS^2 + LO^2} = 10$

$A_1N = KA_1 = 16$ – как отрезки кас.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cos(90-2\beta) = \frac{1}{2x}$

$\cos\beta = \frac{0{,}4}{x}$

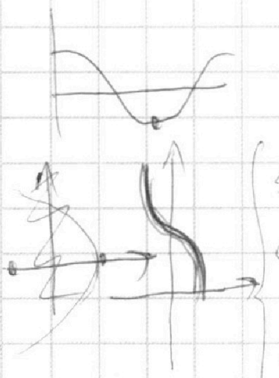
$\sin 2\beta = \frac{1}{2x}$ $\quad 2\sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2x}$

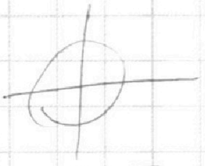
$\sin\beta = \frac{ED}{x}$ $\quad 2\sin\beta = \frac{1}{0{,}4\lambda}$

$\sin(90-2\beta) = \frac{ED}{2x}$ $\quad \sin\beta = \frac{1}{0{,}8\lambda}$

arccos - угол по солнцу

$\frac{\sin\beta}{\sin(90-2\beta)} = \lambda$





$0;\pi$

$\frac{\frac{1}{2x}}{\frac{0{,}4}{x}} = \frac{1}{0{,}4\lambda}$

$\begin{cases} \sin 2\beta = \frac{1}{2x} \\ \cos\beta = \frac{0{,}4}{x} \\ \frac{\sin\beta}{\cos 2\beta} = \lambda \end{cases}$

$\frac{\sin 2\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{2\cdot 0{,}4}$

$2\sin\beta = \frac{1}{0{,}4\lambda}$

$\sin\beta = \frac{1}{0{,}8\lambda}$

$\frac{7}{6} - \frac{5}{3} = \frac{7-10}{6} = -\frac{1}{2}$

$\frac{7}{6} + \frac{5}{3} = \frac{17}{6}$

$0{,}4 \cdot 0{,}7$

$1 - \frac{1}{28}$

$\frac{\frac{1}{0{,}8\lambda}}{1 - 2\cdot\frac{1}{0{,}64\lambda^2}} = \lambda$

$\frac{1}{0{,}8\lambda} = \lambda - 2\cdot\frac{1}{0{,}64\lambda} \quad |\cdot\lambda$

$\lambda^2 - \frac{2}{0{,}64} - 0{,}8 = 0$

$\lambda^2 =$

$10\arccos(\sin x) = 8\pi - 2x$

$\arccos(\sin x) = \frac{8\pi - 2x}{10}$

$\sin x = \cos\left(\frac{8\pi}{10} - \frac{2x}{10}\right)$

$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9}{10}\pi + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(-\frac{4\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$

$x>0$
$y>0$
$xy - ?$

$\log^4_{11} x - 6\log_x 11 = \log_{x^3}\frac{1}{121} - 5$

$\frac{1}{k}\log_x a = \log_{x^k} a$

$\log_x a^\lambda = \lambda\log_x a$

$\log^4_{11} x - 6\cdot\frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})\log_x 11 - 5$

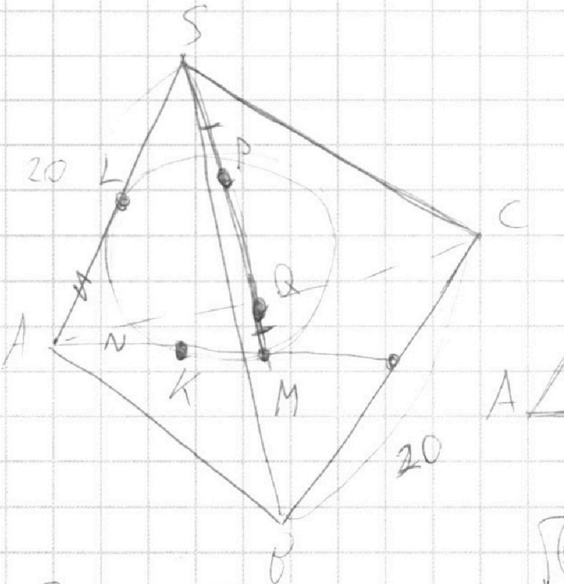
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

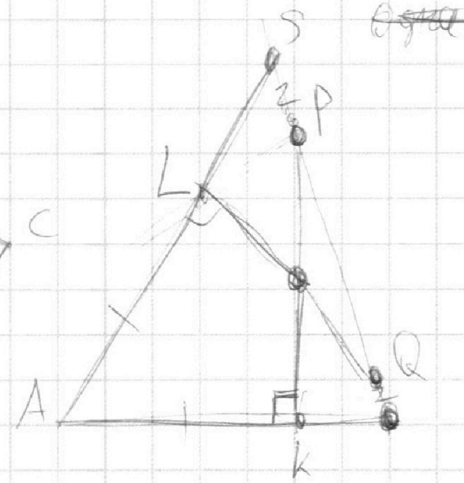
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~Одна плоскость~~





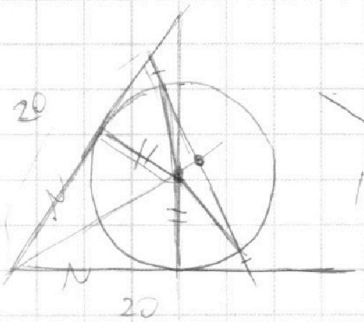
$$\sqrt{\left(\frac{a-b+20}{2}\right)+\left(\frac{a-b+20}{2}\right)\left(\frac{b-a+20}{2}\right)\left(\frac{b-a-20}{2}\right)}=180$$

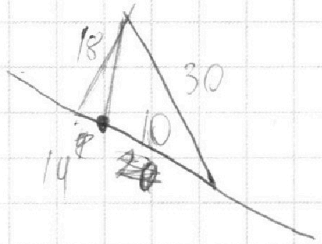
S(ABC) = 180

SA = BC = 20

$\frac{20\cdot 18}{2}$

h =





3·6

3·10

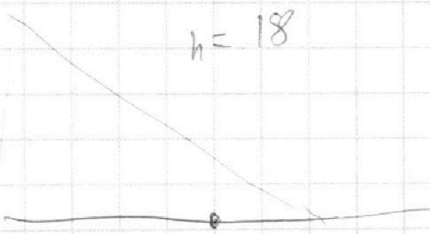
6·3 6·5

~~M~~

медиана = 30

h = 18

$\sqrt{340}$



$\sqrt{186+324}$

$\sqrt{520}$

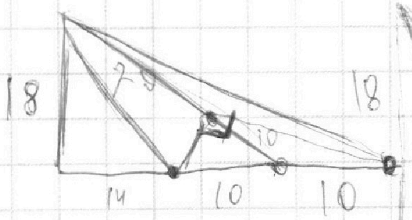
AL = AK

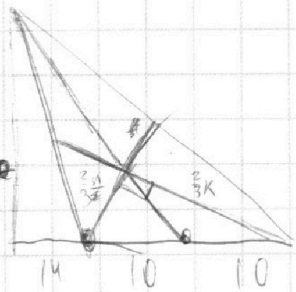
SL·SA = SP·SQ

||

MP·MQ =

MK·MA





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

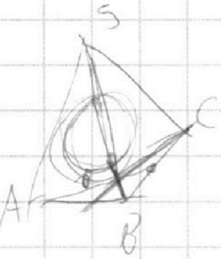
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

МФТИ

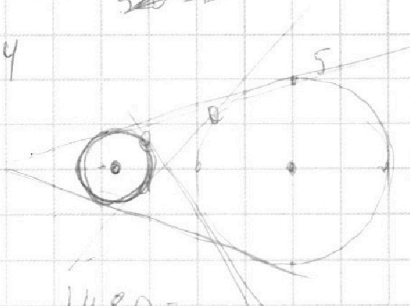
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\cos 2\beta}{\sin\beta} = \frac{\frac{ED}{2x}}{\frac{ED}{x}} = \frac{1}{2}$$

$130 \cdot 4$



$$\frac{1-2\sin^2\beta}{\sin\beta} = \frac{1}{2}$$



$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 34 \\ \hline 136 \\ +102 \\ \hline 1156 \\ +324 \\ \hline 1480 \end{array}$$

$1480 =$

$$\frac{1-2\cdot\frac{1}{0{,}64 d^2}}{\frac{1}{0{,}8d}} = \frac{1}{2}$$

$= 740 \cdot 2 = 370 \cdot 4$

$$0{,}8d\left(1-\frac{2}{0{,}64d^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$0{,}8d - \frac{1{,}6}{0{,}64 d} = \frac{1}{2} \,|\cdot d$$

$$0{,}8d^2 = 1 + \frac{1{,}6}{0{,}64} = \frac{0{,}1}{0{,}04}$$

$$0{,}8d^2 = 1 + \frac{10}{4}$$

$$\frac{8}{10} d^2 = \frac{14}{4}$$

$$d^2 = \frac{140}{32} = \frac{70}{16} = \frac{35}{8}$$

$$d = \sqrt{\frac{35}{8}}, \ (d>0)$$

$$\sin\beta = \frac{1}{0{,}8\cdot\sqrt{\frac{35}{8}}}$$

$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$, т.к. β - угол прямоуг. Δ

$$\cos\beta = \sqrt{1-\frac{1}{0{,}64\cdot\frac{35}{8}}} = \sqrt{1-\frac{1}{0{,}08\cdot 35}} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{2{,}8}} = \sqrt{\frac{18}{28}} = \sqrt{\frac{9}{14}}$$

$0{,}4k = x\cdot\cos\beta$

$x =$

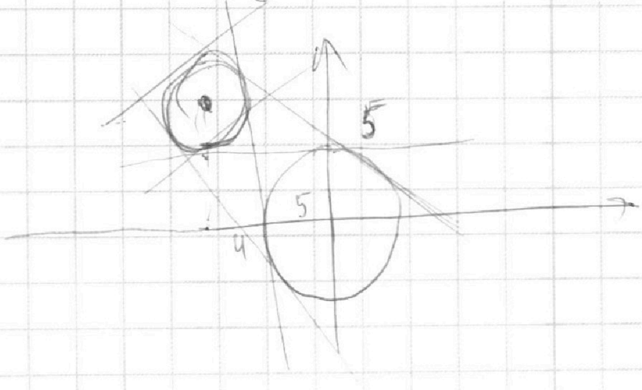
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77) = 0 \end{cases}$$

$a = 0$

$5x - b = 0$

$y^2 + 2\cdot 9y + 81$

$x^2 + (y+9)^2 = 4$



$a \neq 0$

$$\frac{5}{a}x + 6y - b = 0$$

$$y = \frac{-\frac{5}{a}x + b}{6}$$

$$\boxed{-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

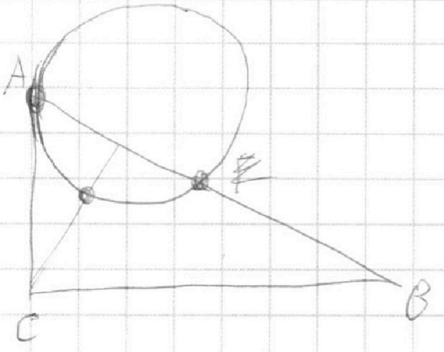
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

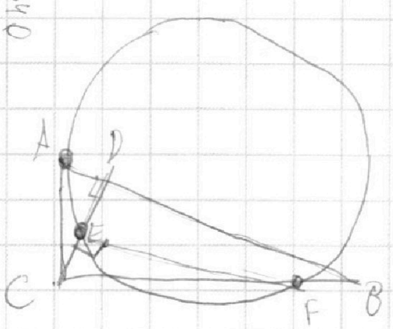
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{EF^2}{BD\cdot AD} - ?$



$\frac{EF}{AD} - ?$

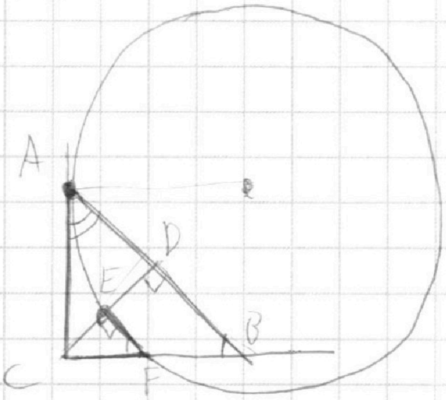
$\log_{11}x + \log_{11}y = \log_{11}xy$

$\frac{CE}{CD} - ?$

$\frac{CE}{CD} = \frac{EF}{BD}$

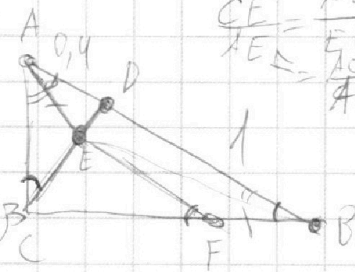
xy

$SD = 10$

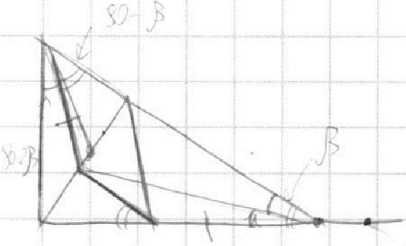


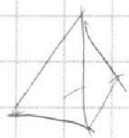
$\frac{AD}{BD} = 1,4$

$\beta,\ 2+\beta$

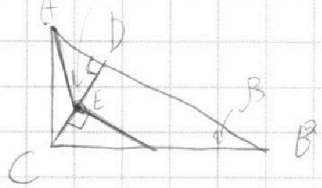


$\frac{CE}{AE} = \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{AB}$





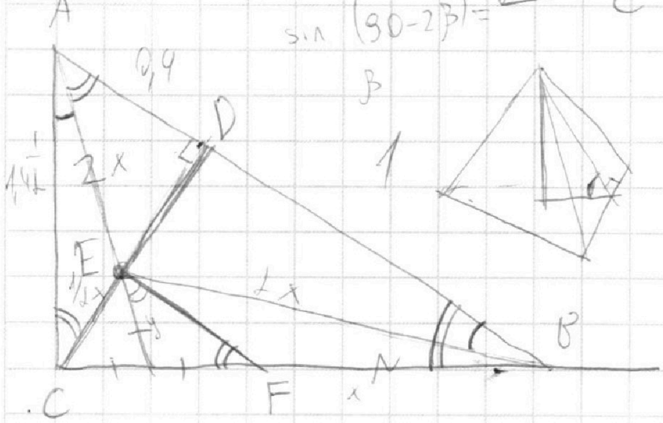
$\angle AED = 90-\beta$

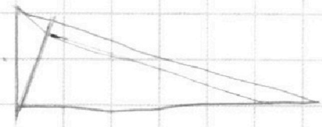


$\frac{[ACD]}{[CEF]}$

$1,4^2 = 1,4^2\cdot\frac{1}{2^2} + (2y+x)^2$

$\sin(90-2\beta) = 2x$





$\frac{CF}{CB} = \frac{CE}{CD} = \frac{EF}{1}$

$\frac{y}{x} - ?$

$\frac{y}{y+x} = \frac{EF}{1,4}$

$\frac{2y}{2y+x} = \frac{EF}{1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$abc - ?$

$abc: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$abc \geq 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$a: 2$

$\begin{cases} x+y=13 \\ y-x=4 \\ 2y=17 \end{cases}$

$a = 2^2 \cdot$

$b = 2^4 \cdot$

$c = 2^{12} \cdot$

$a: 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3}$

$b: 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$

$c: 2^{\gamma_1} \cdot 3^{\gamma_2} \cdot 5^{\gamma_3}$

$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{1}{6t} - 5 \quad | \cdot t$

$\log_{11} x = t$

$x = 11^t$

$t^5 - 6 + \frac{1}{6} + 5t = 0$

$6 \leq \alpha_1 + \beta_1$

$14 \leq \beta_1 + \gamma_1$

$16 \leq \alpha_1 + \gamma_1$

$13 \leq \alpha_2 + \beta_2$

$25 \leq \alpha_2 + \gamma_2$

$21 \leq \beta_2 + \gamma_2$

$14, 11$

$t^5 + 5t - \frac{35}{6} = 0$

$18 = \frac{6+14+16}{2} \leq \alpha_1 + \gamma_1 + \beta_1$

$2, 4, 12$

$t = 1$

$\frac{1}{36}$

$29 \leq \frac{13+21+25}{2} \leq \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$

~~6, 7, 19~~

$\gamma_2 + \alpha_2 + \beta_2 = 29$

$26 = \frac{24+28}{2} \leq \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3$

$6t^5 + 30t - 35 = 0$

$\gamma_2 \leq$

$\beta_2 \leq 4$

$\gamma_2 \leq 16$

$46 + 13 = 59$

$25 + \beta_2 \leq \gamma_2 + \alpha_2 + \beta_2 = 29$

$\cancel{28}\ 21 + \alpha_2 \leq \gamma_2 + \alpha_2 + \beta_2 = 29$

$\alpha_2 \leq 8$

$\underline{\underline{30}}$

$\gamma_2 + \alpha_2 + \beta_2 = 30$

$\beta_2 + 25 \qquad \alpha_2 + 21 \qquad \gamma_2 + 13$

$\beta_2 \leq 5 \qquad \alpha_2 \leq 9 \qquad \gamma_2 \leq 17$

$5, 9, 17$

31

$4, 9, 17$

$\beta_2\ \alpha_2\ \gamma_2$

$\gamma_3 + \alpha_3 + \beta_3 = 26$

$\gamma_3 + 21 \qquad \alpha_3 + 13 \qquad \beta_3 + 28$

$\gamma_3 \leq 15 \qquad \alpha_3 \leq 13$