



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .

3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-17; 68)$ ,  $Q(2; 68)$  и  $R(19; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{1}$

$$\begin{aligned} ab &: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} & \Rightarrow & a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 2^{7+13+14} \cdot 3^{11+15+17} \\ bc &: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} & & \cdot 5^{14+18+12} = 2^{39} \cdot 3^{43} \cdot 5^{25} \\ ac &: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} & & \end{aligned}$$

$c = 2^{13} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$ ;  $a = 2^{11} \cdot 3^{11} \cdot 5^{11}$ ;  $b = 2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^{12}$ ;  $b$

Т.к.  $ab, a, b, c$  - катеты треугольника, то  $abc$  должно делиться на кв.-т делителей  $\Rightarrow$

рассмотрим каждую делитель отдельно (очевидно, что число  $abc$  делится на  $2, 3, 5$  число не  $ц$  число не  $ц$  число не  $ц$   $\Rightarrow$   $abc$  делится на  $2, 3, 5$ )

2:  $(abc)^2 : 2^{34} \Rightarrow$  предположим, что  $abc$  делится на  $2^k$ , где  $k$  - натуральное число, тогда  $(abc)^2$  делится на  $2^{2k}$ . Показываем, что  $2^{34}$  не делится на  $2^{2k}$  для  $k < 17$ . Показываем, что  $abc$  делится на  $2^{17}$ .

$abc : 2^{17}$ , покажем, что это возможно:  
 $a = 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^{11}$ ;  $b = 2^3 \cdot 3^{13} \cdot 5^{12}$ ;  $c = 2^{10} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$   
ум. задачи выш.

3:  $(abc)^2 : 3^{43}$  из указанного выше  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow (abc)^2 : 3^{44}$ , покажем, что такая  $abc$  существует.  
возможна  $abc : 3^{22}$ .  $abc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{14+17+13}$   
 $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{11}$ ;  $b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{12}$ ;  $c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{13}$   
ум. выполняется

45: заметим, что  $ab \cdot bc : 5^{14} \cdot 5^{18} = 5^{32}$   
но в то же время  $a \cdot c : 5^{43}$   
 $\Rightarrow (abc)^2 : 5^{86}$  точно  $\Rightarrow abc : 5^{43}$ , докажем

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1    2    3    4    5    6    7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Какая фигура возможна  
пример:

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{29}$$

условия

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{29}$$

$$ca = 2^{14} \cdot 3^{18} \cdot 5^{43}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ -14 \\ \hline 29 \end{array}$$

максимум

$$abc = 2^{22}$$

минимум возможно

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

P.S. каждое значение является  
наименьшим, потому что они удовлетво-  
ряют минимальной условию. Значит,  
меньше в точности невозможно.  
для данного условия

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

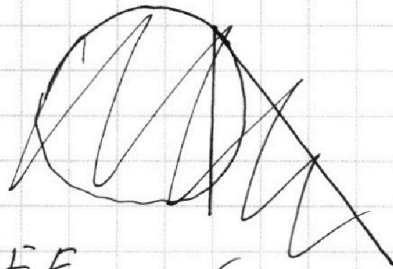
- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$\sqrt{2}$~~



$$CO^2 = (3x \cdot 10x)$$

$$CO = \sqrt{30x}$$

$\triangle CEF \sim \triangle CAB$

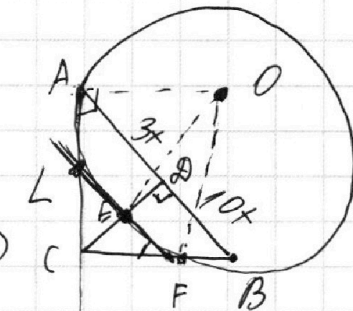
$AB \parallel EF$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$$

Пусть  $BD = 10x$   
 $AB = 13x \Rightarrow AD = 3x$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{\frac{1}{2} CD \cdot AD}{\frac{1}{2} CE \cdot EF}$$

$$= \frac{3x \cdot 30x^2}{CE^2 \cdot 10x} = \frac{9x^2}{CE^2}$$



$$CO = \frac{3x \cdot CD \cdot CD}{CE \cdot \frac{EF}{CE} \cdot DB}$$

$$CO = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{30x}$$

Пусть  $\angle CAF = \angle$ , тогда  $\angle FAO = 90^\circ - \angle$

$\angle CFA = 2\angle = \angle AOF$

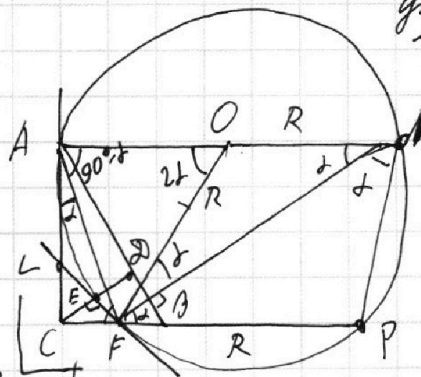
$\angle AOF = \angle = \angle CFE$

$\triangle AFH$  - углы  $\angle F$  -  $\angle AFH = 90^\circ$  -  $\angle AFH = 90^\circ$  -  $\angle AFH = 90^\circ$

$\angle OFH = \angle = \angle HFP$   
 $OH \parallel FP$  ( $AO \perp AC$ ,  $CP \perp AC$ )  $\Rightarrow$

$OH \parallel FP$   
 $\Rightarrow OF \parallel HP$   
 $OF = OH = R$

$\Rightarrow OFHP$  - параллелограмм  $\Rightarrow HP = R$   
 $AFPH$  - вписанный четырехугольник  $\Rightarrow AF = HP = R$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\triangle AFO: AF = AO = FO = R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 90^\circ - \alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \triangle CAF: CF = AC : \sqrt{3} \\ AC = \sqrt{3x \cdot 13x} = \sqrt{39x} \end{aligned} \Rightarrow CF = \sqrt{13x} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \triangle CAF: CF = AC : \sqrt{3} \\ AC = \sqrt{3x \cdot 13x} = \sqrt{39x} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow$$
$$CB = \sqrt{10x \cdot 13x} = \sqrt{130x}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{13x}}{\sqrt{130x}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\triangle CEF \sim \triangle ACB \text{ (т.к. } AB \parallel CF) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\& \text{ т.к. } CF \perp CD \text{ т.к. } CF \parallel AB.$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = \frac{1}{2} \sqrt{30x} \cdot 3x$$

$$\& \text{ т.к. } S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DB.$$

$$\& \triangle CEF \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{CE}{CB} = k = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\frac{S_{CEF}}{S_{ACB}} = k^2 \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ACB}} = \frac{S_{ACD}}{S_{CEP}} = \frac{S_{ACD}}{k^2 \cdot S_{ACB}} =$$

$$= \frac{AD}{k^2 \cdot DB} = \frac{3}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 \cdot 10} = 3$$

Ответ: 3

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{3}$ .

$$5 \arccos(\sin 4x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$\arccos(\sin 4x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}.$$

$$\sin 4x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right).$$

$$\sin 4x = \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \cdot 5. \\ x = \pi - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \cdot 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - x = \frac{3\pi}{2} + 5\pi + 10\pi n. \\ 5x + x = -\frac{3\pi}{2} - 5\pi + 5\pi + 10\pi n. \end{cases}$$

$$4x = -\pi + 10\pi n.$$

$$6x = -4\pi + 5\pi + 10\pi n.$$

$$4x = -\pi + 10\pi n.$$

$$6x = -\pi + 10\pi n.$$

1. К.  $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2}n \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$-3 \leq \frac{1}{2} + 5n \leq 7$$

$$-3,5 \leq 5n \leq 6,5 \Rightarrow n = -3, -2, -1, 0, \dots, 6.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi k}{3} \leq \frac{7\pi}{2} \Leftrightarrow -4,5 \leq k \leq 10,5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -4, -3, -2, -1, \dots, 9, 10.$$

ODS.

$$0 \leq \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$0 \leq \frac{3\pi}{2} + x \leq 5\pi.$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{2}.$$

$\cup$   
 $\sin 4x$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$X = +\frac{\pi}{6} + 2,5\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$X = \pi + 2,5\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ИД Т.К.  $-\frac{3\pi}{2} \leq X \leq \frac{7\pi}{2}, \text{ИД.}$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2,5\pi n \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{5\pi}$$

$$-\frac{3}{5} \leq -\frac{1}{10} + n \leq \frac{7}{5}$$

$$-0,6 \leq -0,1 + n \leq 1,4 \Rightarrow n = 0; 1.$$

$$X = -\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}$$

$$\text{ИД. } -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2,5\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{2}{5\pi}$$

$$-0,6 \leq \frac{2}{5} + k \leq 1,4$$

$$-1 \leq k \leq 1 \Rightarrow X = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}$

$$\left[ \begin{array}{l} X = \pi + 2,5\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ X = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{ИД Т.К.} \\ X \in \left[ -\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right] \end{array}$$

ИД. ①  $-\frac{3\pi}{2} \leq \pi + 2,5\pi n \leq \frac{7\pi}{2}$

$$-0,6 \leq 0,4 + n \leq 1,4$$

$$-1 \leq n \leq 1 \Rightarrow n = 0; \pm 1 \Rightarrow X = -\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{7\pi}{2}$$

②  $-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \leq \frac{7\pi}{2} \quad | \cdot \frac{6}{\pi}$

$$-3,6 \leq 1 + 2,5k \leq 7,3 \quad \rightarrow k = -1; 0; 1 \Rightarrow$$

$$X = \frac{\pi}{6} - \frac{10\pi}{6} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$-9 \leq 1 + 10k \leq 21$$

$$X = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + \frac{10\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Ответ:  $-\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{2\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Иском. видное  $54$  ур-ние; оно равносильно совокупности  $54$  ур.

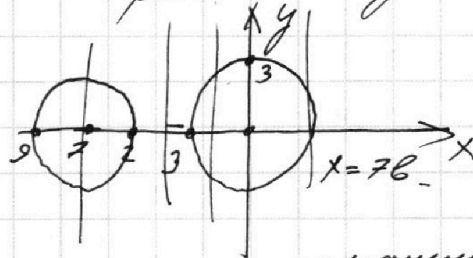
$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 & \text{— окружность с центром } (-7; 0) \text{ и } R_1 = 2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 & \text{— окружность с центром } (0; 0) \text{ и } R_2 = 3. \end{cases}$$

$x + 3ay - 7b = 0$  — уравнение прямой

Если  $a = 0$ , то  $x = 7b$  — верт. прямая.

Очевидно, что решение есть  $2$  (или  $1$  или  $0$ ) точек



Если  $a \neq 0$ , то

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

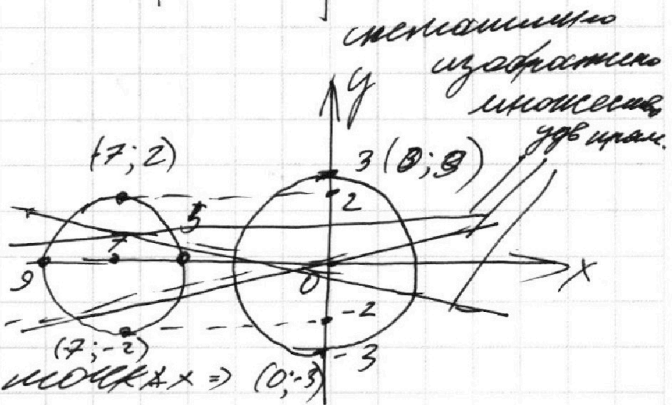
прямая, тогда

ур-ние имеет

4 реш, нужно, чтобы

прямая пересекала каждую окр в двух точках  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  она должна быть между крайними точками окр., т.е. должна содержать



методом изобразить множество ур-н

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} -2 < y(-7) < 2 \\ -3 < y(0) < 3 \end{cases}$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

$$\begin{cases} -2 < \frac{7}{3a} + \frac{7b}{3a} < 2 \\ -3 < \frac{7b}{3a} < 3 \end{cases}$$

нравится  
в одну сторону  
коэффициент  
положительный

① Если  $a > 0$

$$\begin{cases} -6a < 7 + 7b < 6a \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a - 7 < 7b < 6a - 7 \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

в существеет  
всех.

$$\begin{cases} -9a < 6a - 7 \\ -6a - 7 < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a > 7 \\ 15a > -7 \end{cases} \Rightarrow a > \frac{7}{15} > 0 \Rightarrow a > \frac{7}{15}$$

② Если  $a < 0$ .

$$\begin{cases} 6a < 7b + 7 < -6a \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a < 7b < 6a + 7 \\ -9a < 7b < 9a \end{cases}$$

в существеет  
всех.

$$\begin{cases} 6a - 7 < 7b < -6a - 7 \\ 9a < 7b < -9a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a - 7 < -9a \\ 9a < -6a - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a < 7 \\ 15a < -7 \end{cases} \Rightarrow a < -\frac{7}{15} < 0$$

$$\text{Итого } a \in (-\infty; -\frac{7}{15}) \cup (\frac{7}{15}; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -\frac{7}{15}) \cup (\frac{7}{15}; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_7^5 6x = \log_7 36x^2 - 343 - 4. \\ \log_7^4 y + 6 \log_7^5 y = \log_7 y^2 - 7^5 - 4. \end{cases}$$

$\times y$ ...? На ODS:

Пусть  $\log_7 6x = t$ , а  $\log_7 y = u$ , тогда  $t \neq 0, u \neq 0$ . (каждому  $x$  можно подобрать  $y$  и наоборот, или наоборот с  $u$ )

$$\begin{cases} t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \quad | \cdot t \quad t \neq 0 \\ u^4 + 6 \cdot \frac{1}{u} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{u} - 4 \quad | \cdot u \quad u \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^5 - 3,5t + 4t = 0 \\ u^5 + 4u + 3,5 = 0 \\ t^5 + 4t - 3,5 = 0 \\ u^5 + 4u + 3,5 = 0 \end{cases}$$

Рассм  $f = f(a) = a^5 + 4a$   
 $f'(a) = 5a^4 + 4$   
 $f'(a) = 0$   
 $5a^4 + 4 = 0$

Ф-ция монотонно возрастает на  $\mathbb{R} \Rightarrow$  ф-ция  $f'(a) = 5a^4 + 4 > 0 \Rightarrow f'(a) \neq 0$

$t^5 + 4t - 3,5 = 0$  и  $u^5 + 4u + 3,5 = 0$  имеют ровно три корня, от т.к. в  $\log_7 6x = t$   $\log_7 y = u$  можно монотонно возрастает  $\Rightarrow$  существуют

по крайней мере одна пара действ.  $x$  и  $y$ .  
Заметим, что  $\forall t \in \mathbb{R}$   $\exists$   $u \in \mathbb{R}$  ф-ции  $f$  и  $g$

$$f(t) = t^5 + 4t - 3,5 \quad \text{и} \quad g(u) = u^5 + 4u + 3,5$$

$$f(t) = 0 \quad \text{и} \quad g(u) = 0 \quad \text{равносильны}$$

$$-t^5 - 4t - 3,5 = 0 \Leftrightarrow t^5 + 4t + 3,5 = 0 = g(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  что корни  $f$  являются корнями  $g$  и наоборот

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



и проинволаментим по знак  $y$ , и это  
т.е.  $u = -t \Rightarrow \log_7 6x = -\log_7 y$ . *единств. решение*

т.е.  $\log_7 6x + \log_7 y = 0$  *ва*

~~т.е.~~  $\log_7(6xy) = 0 \Rightarrow 6xy = 1$ , т.е.  $xy = \frac{1}{6}$ .

и это единственное возможное знач.  
 $xy$  (в других случаях оно не  $xy$ ).

Ответ:  $\frac{1}{6}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

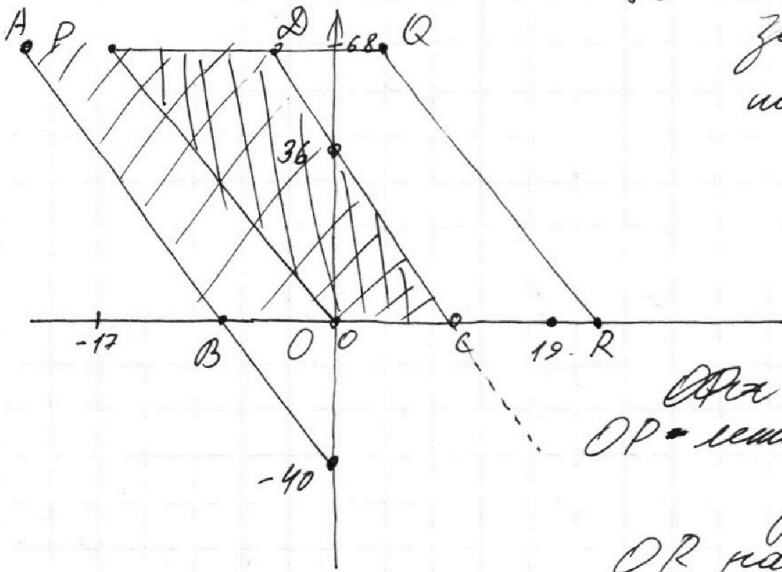
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{6}$



зафиксируем  $A(x_1; y_1)$   
 тогда  $4x_2 + y_2 = 4x_1 + y_1$   
 $y_2 = -4x_2 + 40 + 4x_1 + y_1$   
 прямая, явл.  
 множеством  
 точек B.

Для  $OP$   
 $OP$  — линия на прямой

$y = -4x$

$OR$  на  $y = -4x + 76$

$PQ$  на  $y = 68$

$OR$  на  $y = 0$ .

Заметим, что

$y_2 = -4x_2 + 40 + 4x_1 + y_1$

и  $y = -4x + 76$ . и  $y = -4x$  наклонены под  
 одним углом, а т.к B лежит внутри  
 пар-линии, то необходимо выписать условие:

$0 \leq 40 + 4x_1 + y_1 \leq 76$

$-40 \leq 4x_1 + y_1 \leq 36$ , т.е.  $\begin{cases} y_1 \leq 36 - 4x_1 \\ y_1 \geq -40 - 4x_1 \end{cases}$

Каждая прямая проходит через пар-линии  
 прямой всегда  $y = -4x + c$ , где  $c \in \mathbb{Z}$   
 лежит.  $\frac{68}{4} + 1 \pm 17 + 1 = 18$  точек, однако,

мно рассматривая, скажем, точку A  
 заданную пар-линии множества B, и фиксируем  
 координаты  $(x_1, y_1) \in [0; 68]$  (но т.к.  $A(x_1, y_1) \in$  пар-линии  
 через пар-линии  
 с угл.  $\sqrt{6}$ .)

т.е.  $A(36 - 4x_1) \Rightarrow x_1 \in [0; 9]$

P.S A = B (в условии еще что это можно  
 не сказано).



- 1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$AB \perp AC \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 4x_1$$

$AC \perp BC$ , но мы ограничиваем, что  $x_1 \in [0; 68]$

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = 4x_1 \\ x_1^2 + y_1^2 = 36 - 4x_1 \end{cases}$$

система уравнений

$$\begin{cases} y_1 = 36 - 4x_1 \\ y_1 = 40 - 4x_1 \end{cases}$$

удов. заданию точки  $x_1$  и  $y_1$ , что множество  $B$  многоугольник  $OPQR$

задача ставит так же множество  $B$  многоугольник  $OPQR$  (назовем его  $ABCD$ ) - замкнутое множество

- замкнутое множество  $OPQR$ , но точки  $D$  и  $C$  удовлетворяют двум условиям, внутренн. часть  $PD \subset O$  (внутренн. часть и точки на границе в новых координатах).

$DC$  - лежит на прямой  $y = 36 - 4x$ .

$$D: 68 = 36 - 4x \quad x = -8 \quad D(-8; 68)$$

$$C: 0 = 36 - 4x \quad x = 9$$

внутри этой области:  $18 \cdot 18 (8 + 1 + 9) \cdot 18 = 18^2$  точек  $A$  каждая из которых

Затем множеством 18 точек  $B \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  всего пар  $(A; B) = 18^2 \cdot 18 = 324 \cdot 18 = 6832$

Ответ: 6832 пар



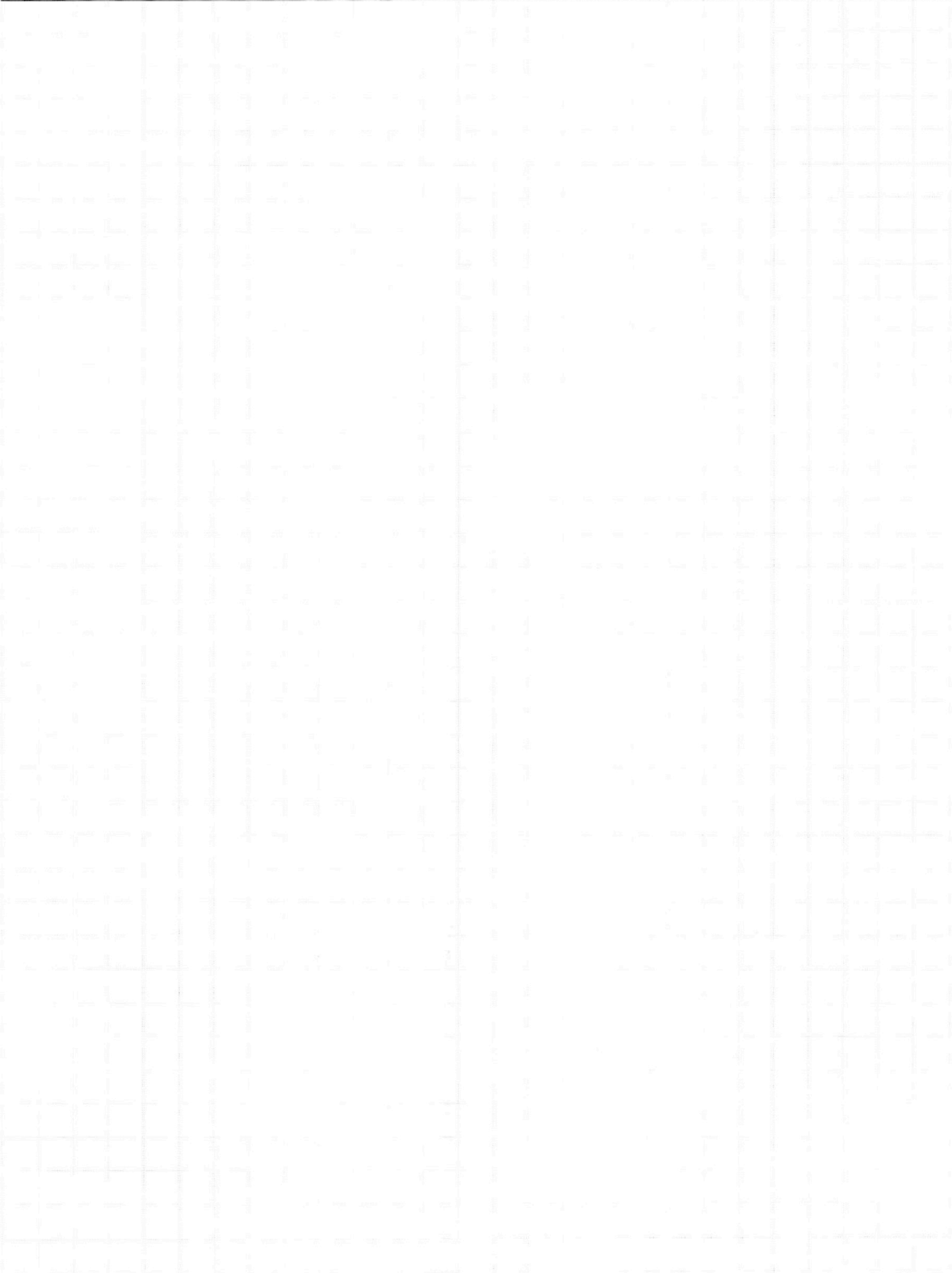
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Черновик*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2 \\ (x^2 + 14x + 49) - 49 + y^2 + 45 = 0 \end{cases}$$

$$(x+7)^2 + y^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$8 + 10 = 18$$

$\sqrt{5}$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline 18 \\ 144 \\ \hline 324 \end{array}$$

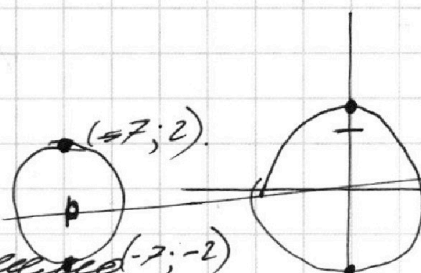
$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$$

если  $a=0$ .

то  $x=7b$ .

*Чрез точку невозможна*  
*Вершина*



*Иногда упр. система*

*3 реал. прямая должна*

*решать.*

$$\begin{cases} -2 < y(-7) < 2 \\ -3 < y(0) < 3 \end{cases}$$

$$0,4 \cdot 8 = 6,8$$

$$\frac{7}{4} + 1 \quad \frac{8}{4} + 1$$

$$\log_7(6x) = t$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2t} - 4$$

$$u^4 + 6 \cdot \frac{1}{u} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{u} - 4$$

$$t^5 + 4t - 3,5 = 0$$

$$u^5 + 4u + 3,5 = 0$$

$$5t^4 + 4 = 0$$

$$t^4 = -\frac{4}{5} \phi$$

$$\log_7 y = t$$

$$-t = u$$

$$\log_7 y = -\log_7 6x$$

$$\log_7(6y) = 0$$

$$6yx = 1$$

$$yx = \frac{1}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



*Шерковеев*

$$ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$$

$$bc = 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

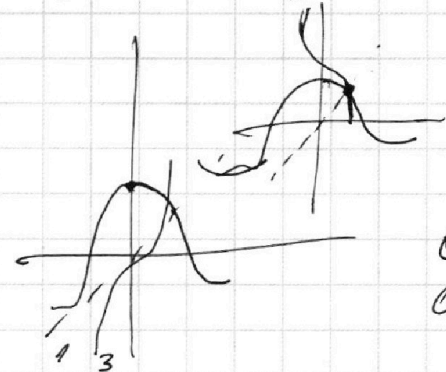
$$\begin{array}{r}
 24 + 11 \\
 + 17 \\
 \hline
 43
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 14 \\
 + 18 \\
 \hline
 32 \\
 + 43 \\
 \hline
 75
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 26 \\
 \overline{) 38} \\
 52 \\
 \hline
 12
 \end{array}$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{44}$$

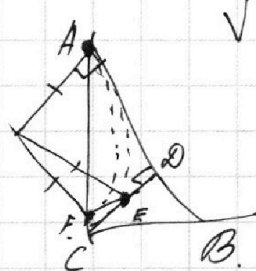
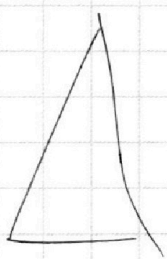
$$b = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{42}$$

$$\begin{array}{r}
 43 - 24 \\
 \hline
 19 \\
 + 14 \\
 \hline
 33
 \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 324 \\
 + 18 \\
 \hline
 92
 \end{array}$$

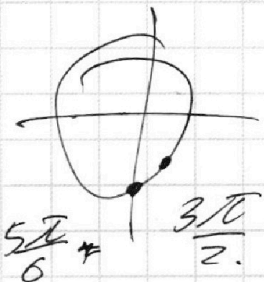


$$\sqrt{2} \cdot \frac{5\pi}{2} - \frac{1}{4} = \frac{10 \cdot 12.79}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\sqrt{3} \cdot \text{sarccos}(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

*3A AX 124*

$$\cos(\text{sarccos}(\sin x)) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$



*(sin x = sin x)*

*2πk*

$$\cos \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos \sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{cases}
 x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\
 x = \pi - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k
 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

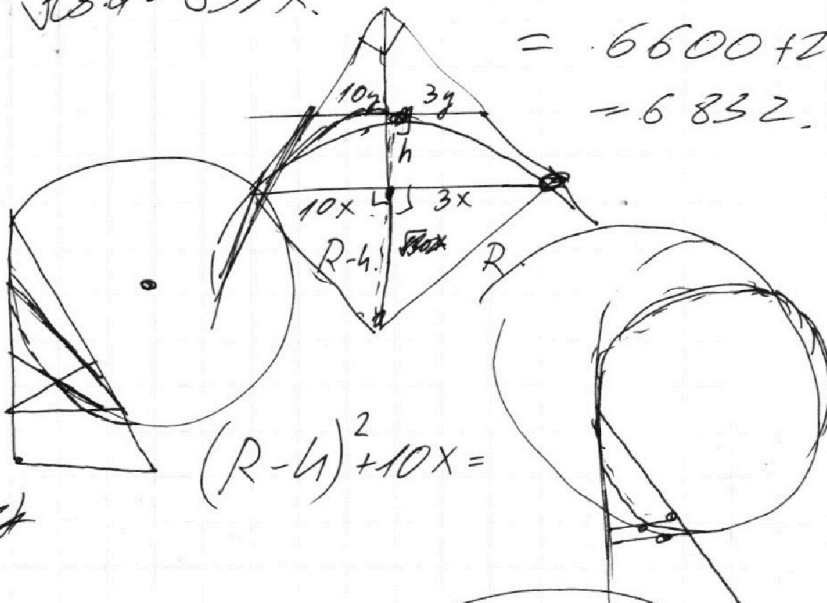
$$+ \begin{array}{r} 324 \\ 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ \times 18 \\ \hline 2592 \\ 324 \\ \hline 5832 \end{array}$$

Черковец

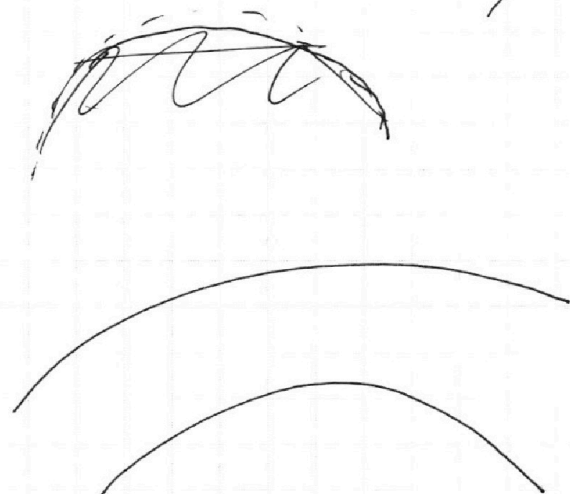
$$\begin{aligned} (20-2)^3 &= 8000 - \\ &- 6 \cdot 400 + 12 \cdot 20 - 8 = \\ &= 8000 - 2400 + \\ &+ 240 - 8 = \\ &= 6600 + 240 - 8 = \\ &= 6832. \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{324} \sqrt{39x}$$

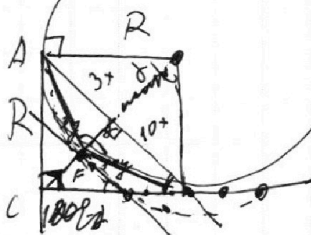


$$(R-h)^2 + 10x =$$

Знач  
 $A+B =$



$$R^2 = CE \cdot (CE + 2R)$$



$$R^2 = 3x \cdot 13x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

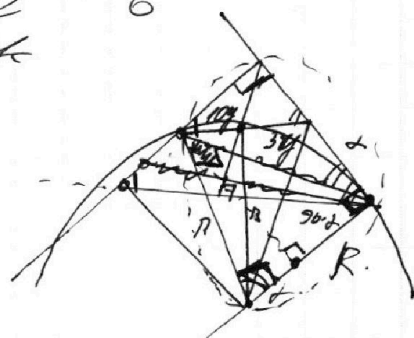
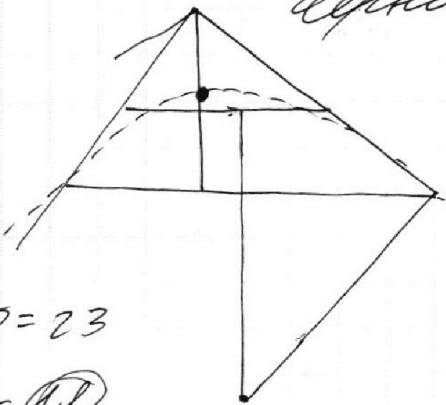


$$\frac{1}{2}$$

~~$$\frac{5\pi}{3}$$~~

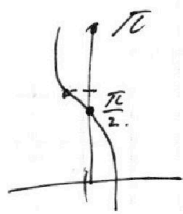
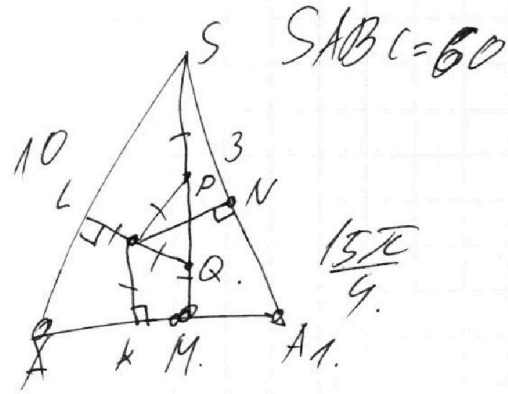
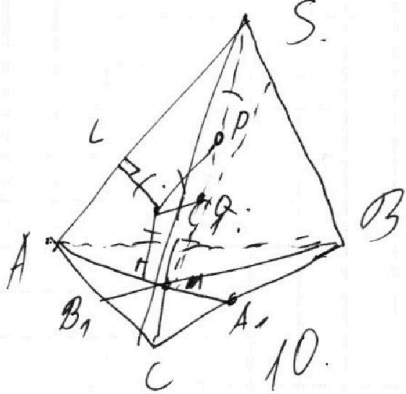
$$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = 10 \times 10\pi$$

Черновик



$$\begin{aligned}
 &4 \\
 &+ 4 \\
 &+ 5 \cdot 3 = \\
 &= 15 + 8 = 23 \\
 &5 + 6 = \textcircled{11}
 \end{aligned}$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$



$$\frac{5\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} + \pi$$

$$-1 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{7\pi}{2}$$

$$\frac{15\pi}{4} \quad \frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$5\pi$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad \frac{13\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

~~$$\frac{3\pi}{4}$$~~

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} \quad \frac{9\pi}{4}$$

$$\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$\frac{9\pi}{4} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$$