МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)\left(x^2 + y^2 - 12x + 32\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По условию: $\begin{cases} ab = 2^9 3^{10} 5^{10} k \\ bc = 2^{14} 3^{13} 5^{13} n \\ ac = 2^{19} 3^{18} 5^{30} m \\ n, m, k \in N \end{cases}$ Т.к. 2, 3 и 5 - простые числа, то можно сказать, что $a = 2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} A$, $b = 2^{b_1} 3^{b_2} 5^{b_3} B$, $c = 2^{c_1} 3^{c_2} 5^{c_3} C$, где $a_i, b_i, c_i \geq 0$ и $\in Z$ и $A, B, C \in N$,

причём: $\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 \\ a_2 + b_2 \geq 10 \\ a_3 + b_3 \geq 10 \end{cases}$, $\begin{cases} b_1 + c_1 \geq 14 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 + c_1 \geq 19 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \end{cases}$

Сначала рассмотрим степень двойки: $\begin{cases} a_1 + b_1 \geq 9 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \\ a_1 + c_1 \geq 19 \end{cases}$

Попробуем решить систему $\begin{cases} a_1 + b_1 = 9 \\ a_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 9 - b_1 \\ 9 - b_1 + c_1 = 19 \\ b_1 + c_1 = 14 \end{cases}$, отсюда $\begin{cases} a_1 = 7 \\ b_1 = 2 \\ c_1 = 12 \end{cases}$

Пусть $x \geq 9$, $y \geq 14$, $z \geq 19$, тогда: $\begin{cases} a_1 + b_1 = x \\ b_1 + c_1 = y \\ a_1 + c_1 = z \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = x - b_1 \\ b_1 + c_1 = y \\ x - b_1 + c_1 = z \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = x - b_1 \\ b_1 + c_1 = y \\ x + 2c_1 = y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{x + z - y}{2} \\ b_1 = \frac{y - z + x}{2} \\ c_1 = \frac{y + z - x}{2} \end{cases} \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 = \frac{x + z - y + y - z + x + y + z - x}{2} = \frac{x + y + z}{2}$, таким образом,

увеличивая x, y, z мы увеличиваем сумму степеней 2-ки, чего нам не надо $\Rightarrow$ min сумма степеней 2-ки $\left\lceil \frac{9 + 14 + 19}{2} \right\rceil = 21$

Аналогично: min Σ ст. 3-ки $\left\lceil \frac{10 + 13 + 18}{2} \right\rceil = 21$

min Σ ст. 5-ки $\left\lceil \frac{13 + 10 + 30}{2} \right\rceil = 27$

$abc = 2^{a_1 + b_1 + c_1} 3^{a_2 + b_2 + c_2} 5^{a_3 + b_3 + c_3} = 2^{21} 3^{21} 5^{27}$ (числа A, B и C можно приравнять к 1, т.к. условие не поменяется, а произведение станет больше)

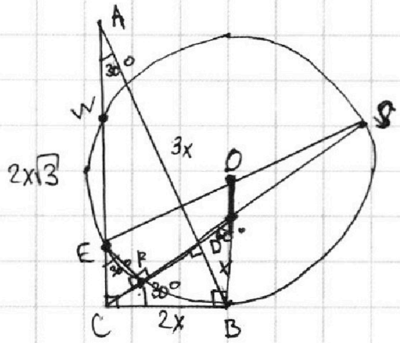
Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. $AB \parallel EF$ и $AB \perp CD$, то $EF \perp CD$ $\Big\}\Rightarrow$
$\angle CEF = \angle CAB$ (как накр. лем.)
$\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle BAC$ (по двум углам).
$\exists$ $AD = 3x$, $BD = x$, тогда:

$CD^2 = 3x \cdot x \Rightarrow CD = x\sqrt{3}$

По т. Пиф.: $BC = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$, $AC = \sqrt{9x^2 + 3x^2} = 2x\sqrt{3}$

$\sin\angle CAD = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2x\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \angle CAD = \angle CEF = 30^\circ$

Пусть $FS \cap (\text{окр.}) = \{F, S\}$, тогда т.к. $\angle EFS = 90^\circ$, то ES – диаметр и $O \in (ES)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$, т.к. $\arcsin t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, при $t \in [-1; 1]$, то $5\arcsin t \in \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \Big| \cdot 2$.

$-5\pi \leq 2x + \pi \leq 5\pi$; $-6\pi \leq 2x \leq 4\pi$; $-3\pi \leq x \leq 2\pi$ – ограничение.

Т.к. $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin a = \frac{\pi}{2} - \arccos a \Rightarrow$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)$.

Рассмотрим несколько случаев: 1) $x \in [-3\pi; -2\pi)$: $5\left(\frac{\pi}{2} - (-(x+2\pi))\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{2} + 5(x + 2\pi) = x + \frac{\pi}{2}$, $2\pi + 5x + 10\pi = x$, $12\pi = -4x \Rightarrow x = -3\pi$

2) $x \in [-2\pi; -\pi)$: $5\left(\frac{\pi}{2} - (x + 2\pi)\right) = x + \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2} - 5x - 10\pi = x + \frac{\pi}{2}$,

$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \overset{2}{10\pi} = 6x$, $\frac{5\pi - \pi - 20\pi}{2} = 6x$, $-8\pi = 6x \Rightarrow x = -\frac{4}{3}\pi$

3) $x \in [-\pi; 0)$: $5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{5\pi}{2} + 5x = x + \frac{\pi}{2}$, $2\pi = -4x \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$

4) $x \in [0; \pi)$: $5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$, $2\pi = 6x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

5) $x \in [\pi; 2\pi]$: $5\left(\frac{\pi}{2} - (-(x - 2\pi))\right) = x + \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2} + 5(x - 2\pi) = x + \frac{\pi}{2}$

$2\pi + 5x - 10\pi = x$, $-8\pi = -4x \Rightarrow x = 2\pi$

Ответ: $x \in \left\{-3\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

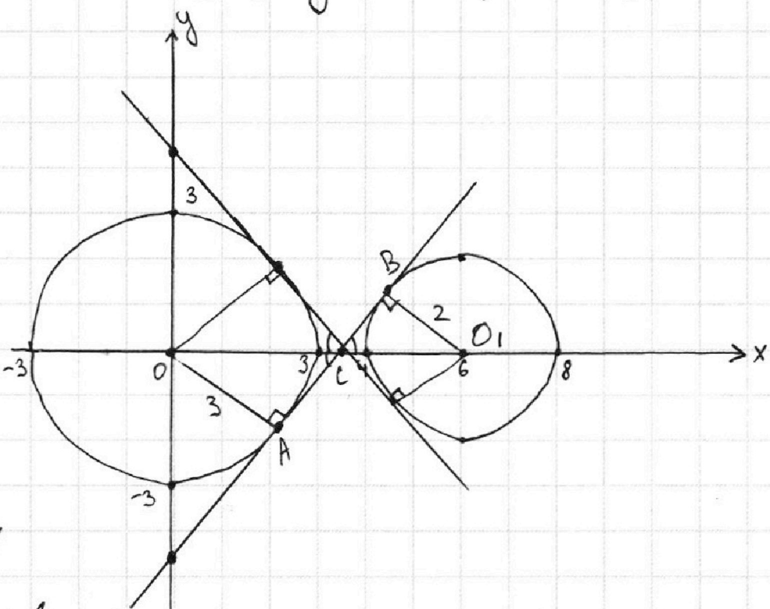
$ax+2y-3b=0$ – прямая, угл. коэф. $-\frac{a}{2}$ и т. п. с Oy $(0;\ \frac{3}{2}b)$

$(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0$ – две окружности

$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \text{ – окр-ть с ц. в } (0;0) \text{ и } R=3. \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right.$

$x^2+y^2-12x+32=0$

$x^2-12x+36+y^2+32=36 \Leftrightarrow (x-6)^2+y^2=4$ – окр-ть с ц. в $(6;0)$ и $R=2$



Т.к. прямая с окр-ью имеет не более 2-х т. пересеч., а нам необходимо 4, то прямая должна пересекать обе окр-ти в 2-х точках, тогда прямая должна лежать между внутр. касательными этих окр-тей.

A и B – точки касания, $AB \cap OO_1 = C$.

$tg\alpha = \angle BCO_1$ – угол между касательной и Ox.

$\left.\begin{array}{l} \angle OAC = \angle O_1BC = 90^\circ \text{ (радиус в т. кас.)} \\ \angle OCA = \angle O_1BC \text{ (как верт.)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OCA \sim \triangle O_1CB: \begin{cases} \frac{OC}{CO_1} = \frac{3}{2} \\ OC + CO_1 = 6 \end{cases}$, отсюда

$\left.\begin{array}{l} OC = \frac{18}{5},\ CO_1 = \frac{12}{5} \Rightarrow \sin\angle BCO_1 = \frac{BO_1}{CO_1} = \frac{2}{\frac{12}{5}} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \\ \cos\angle BCO_1 = \sqrt{1-\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow tg\alpha = \frac{5}{6} : \frac{\sqrt{11}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$.

Другая внутренняя кас. будет образовывать с Ox угол $\pi-\alpha$. $\Rightarrow$ её угл. коэф. $tg(\pi-\alpha) = -tg\alpha = -\frac{5\sqrt{11}}{11}$

Таким образом: $-\frac{5\sqrt{11}}{11} < -\frac{a}{2} < \frac{5\sqrt{11}}{11} \Leftrightarrow -\frac{10\sqrt{11}}{11} < a < \frac{10\sqrt{11}}{11}$ – для каждого a можно будет найти такой b, что прямая пересекает окр-ти в 4-х точках.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10\sqrt{11}}{11};\ \frac{10\sqrt{11}}{11}\right)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$, $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{1}{2}\log_x 243 - 8$

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8 \,|\cdot 2.$

$2\log_3^4 x + 12\log_x 3 = 5\log_x 3 - 16$; $2\log_3^4 x + 7\log_x 3 + 16 = 0$;

$2\log_3^4 x + \frac{7}{\log_3 x} + 16 = 0$, $t = \log_3 x$, $t \neq 0$., тогда:

$2t^4 + \frac{7}{t} + 16 = 0$, $2t^5 + 7 + 16t = 0$, $f(t) = 2t^5 + 16t + 7$ — монот. возраст.
$\Rightarrow f(t) = 0$ — не более одного корня.

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{(5y)^2}(3^{11}) - 8$, $\begin{cases} y > 0 \\ y \neq \frac{1}{5} \end{cases}$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8 \,|\cdot 2.$

$2\log_3^4(5y) + 4\log_{5y} 3 = 11\log_{5y} 3 - 16$

$2\log_3^4(5y) - 7\log_{5y} 3 + 16 = 0$, ~~пусть $t = \log_{5y} 3$~~

$2\log_3^4(5y) - \frac{7}{\log_3 5y} + 16 = 0$, $t = \log_3 5y$, $t \neq 0$, тогда:

$2t^4 - \frac{7}{t} + 16 = 0$, $2t^5 - 7 + 16t = 0$, $2t^5 + 16t - 7 = 0$.

$\begin{cases} f(\log_3 x) = 2\log_3^5 x + 16\log_3 x + 7 \\ g(\log_3 5y) = 2\log_3^5 5y + 16\log_3 5y - 7 \end{cases}$, т.к. обе функции монот. возраст., то $f(\log_3 x) = 0$ и $g(\log_3 5y) = 0$ имеет ровно один корень.

Заметим, что если $f(x_0) = 0$, то $-x_0$ — корень ур-я $g(t) = 0$:
$2(-x_0)^5 + 16(-x_0) - 7 = -2x_0^5 - 16x_0 - 7 = -\underbrace{(2x_0^5 + 16x_0 + 7)}_{f(x_0)=0} = 0$, таким образом, $\log_3 x + \log_3 5y = 0 \Leftrightarrow \log_3(5xy) = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$

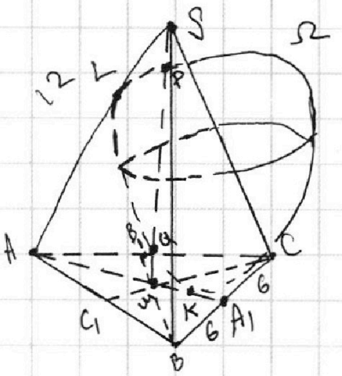
Ответ: $\frac{1}{5}$

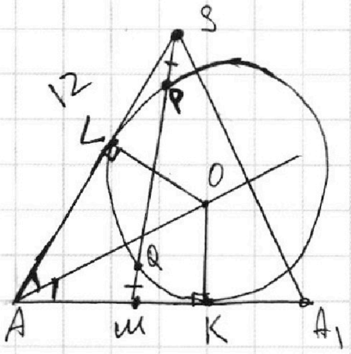
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ





Заметим, что ц. окр-ти O лежит на биссектрисе $\angle SAM$, т.к. равноудалён от SA и SK.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик: $x>0, x\neq 1$, $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \frac{5}{2}\log_x 3 - 8 \,|\cdot 2.$

$2\log_3^4 x + 12\log_x 3 = 5\log_x 3 - 16$

$2\log_3^4 x + 7\log_x 3 + 16 = 0$

$2\log_3^4 x + \frac{7}{\log_3 x} + 16 = 0$, $t = \log_3 x$, $2t^5 + 7 + 16t = 0$, $2t^5 + 16t + 7 = 0.$

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 - 8 \,|\cdot 2.$

$2\log_3^4(5y) + 4\log_{5y} 3 = 11\log_{5y} 3 - 16$, $2\log_3^4(5y) - 7\log_{5y} 3 + 16 = 0.$

$2\log_3^4(5y) - \frac{7}{\log_3 5y} + 16 = 0$, $b = \log_3 5y$

$2b^4 - \frac{7}{b} + 16 = 0$, $2b^5 + 16b - 7 = 0.$

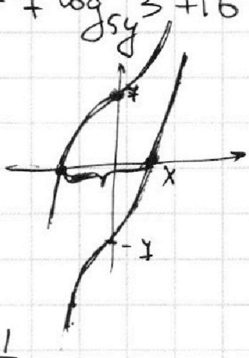
$2b^4 + 16 = 0.$

$2(-x)^5 - 16x + 7 = -2x^5 - 16x + 7 = 0$

$2x^5 + 16x - 7 = 0.$ верно.

$\Rightarrow \log_3 x + \log_3 5y = 0.$ $\log_3(5xy) = 0.$

$5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}.$



$\log_3 x$ и $\log_3 5y$ - единственны. $\log_3 x + \log_3 5y = a.$

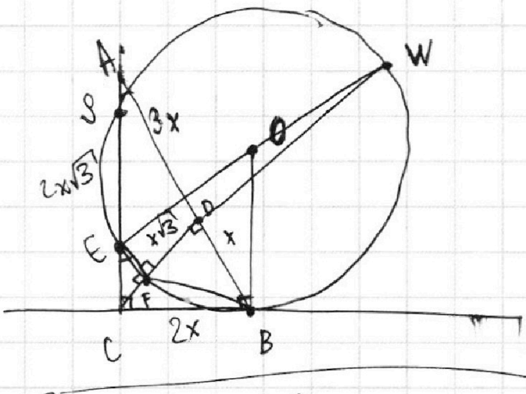
$\cancel{(a - \log_3 5y)}$

$2(a - \log_3 x)^5 + 16(a - \log_3 x) - 7 = 2(a-t)^5 + 16(a-t) - 7 = (a-t)(2(a-t)^4 + 16) - 7 =$

$= (a-t)(2(a^4 - t)^{22}$

$(a-t)^4 = ((a-t)^2)^2 = (a^2 - 2at + t^2)^2 = (a^2 - 2at)$

$2t^5 + 16t + 7 = 0.$



$\sqrt{3x \cdot x} = x\sqrt{3}.$

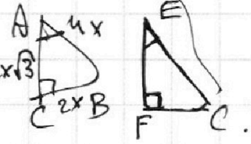
$\frac{S_{CEF}}{S_{ACD}}$

ст. т. $= d^2 - R^2$

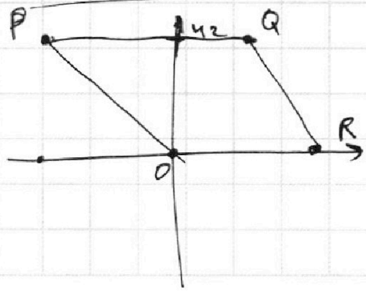
$CB^2 = CE \cdot AS.$

$\sqrt{9x^2 + 3x^2} = \sqrt{12x^2} = 2x\sqrt{3}$

$\sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x$



$\frac{S_{CEF}}{S_{CC}}$



$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33.$

Δx Δy

$3\Delta x + \Delta y = 33.$ $\Delta y = 33 - 3\Delta x_1$

$\vdots 3$

Δy - кр. 3.

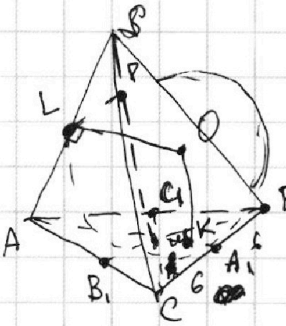
~~Δx - кр.~~

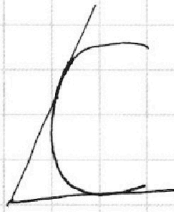
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

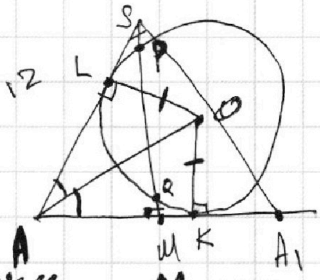
1 2 3 4 5 6 7

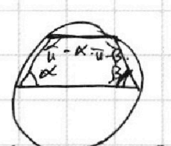
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

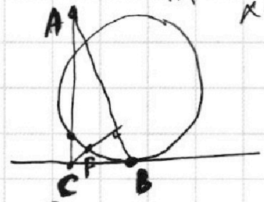


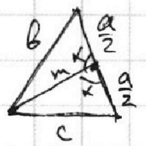






$\pi-\beta+\alpha=180^\circ$.
$\alpha=\beta$





$b^2=m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot m\cos k$

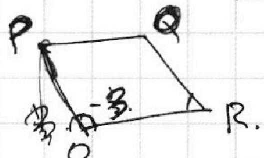
$c^2=m^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+2\cdot\frac{a}{2}\cdot m\cdot\cos x.$

$b^2+c^2=2m^2+2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$, $b^2+c^2=2m^2+\frac{a^2}{2}$, $2b^2+2c^2=4m^2+a^2.$

$m=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}.$

$4+4+10=18.$ $16y^2-12x^2$

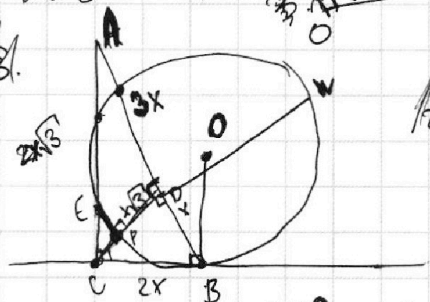
$\frac{\sqrt{(2b^2+2c^2-a^2)(2a^2+2c^2-b^2)(2b^2+2a^2-c^2)}}{8}.$

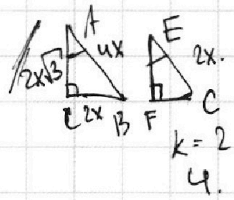


$3x_2+y_2=33.$ 42

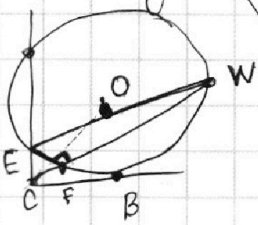
~~$3(x_2-x_1)+(y.$~~

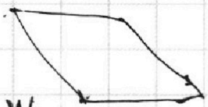
$\frac{y_1}{y_2}=\frac{1}{3}$

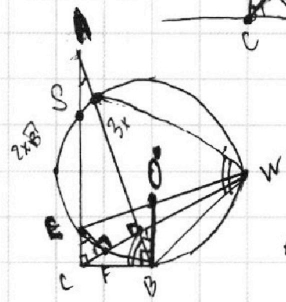




$k=2.$
4.

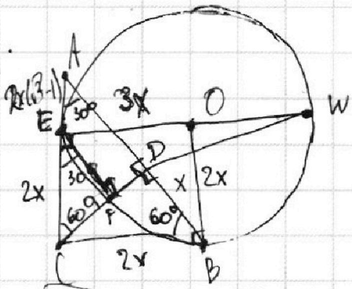




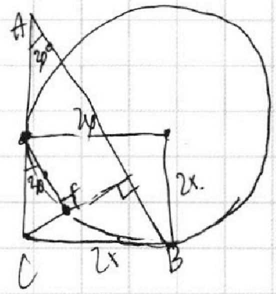


$CB^2=CE\cdot CS.$

$EF^2+FW^2=$

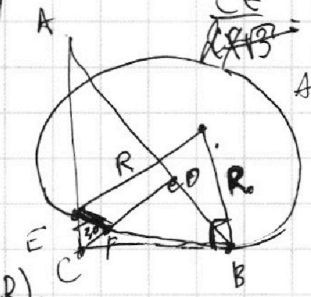


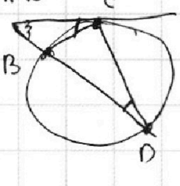
$AE=2x\sqrt{3}-2x=$
$=2x(\sqrt{3}-1)$

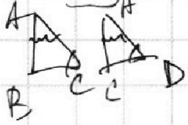


$\frac{CE}{CF\sqrt{3}}=\frac{CF}{x\sqrt{3}}\Rightarrow$ $\frac{CF}{CE}=\frac{1}{2}.$

$\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}.$







~~$W=CF+R$~~

~~$W^2=CF\cdot(CF+2R)$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

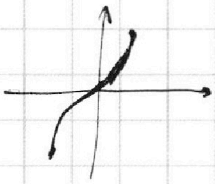
$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ $\quad -\frac{5\pi}{2} \le 5\arcsin t \le \frac{5\pi}{2}$ $\quad \arccos \in [0;\pi]$

$-\frac{5\pi}{2} \le x + \frac{\pi}{2} \le \frac{5\pi}{2} \Big| \cdot 2.$

$-5\pi \le 2x + \pi \le 5\pi$

$-6\pi \le 2x \le 4\pi$

$-3\pi \le x \le 2\pi.$

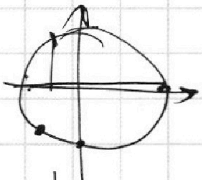


$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$ если $x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k]$

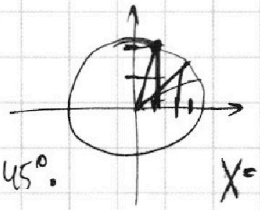
$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}.$ $\quad \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2} \Big| \cdot 2$

$5\pi - 10x = 2x + \pi$

$4\pi = 12x \Rightarrow x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}.$



$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$



$5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$-(x - 2\pi)$

$\arccos(\cos(-45^\circ)) = 45^\circ.$ $\quad x =$ $\quad \cos x \in [-1; 1]$

$2y = -ax + 3b$

$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}b.$ $\quad 4 - 20 = -16$ $\quad -(x + 2\pi).$

$-3\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{2}$

$\cos(-3\pi) = \cos(3\pi) = \cos(\pi) = -1.$

$5(\arcsin(-1)) = -\frac{5\pi}{2}$ $\quad \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} =$

$5\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\pi}{6}$ $\quad -\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{-8\pi + 3\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$ $\quad = -\frac{1}{2}.$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$ $\quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$ $\quad 5\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ $\quad \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$

$5\arcsin(0) = 0$ $\quad \cos 2\pi = 1.$ $\quad 5\arcsin 1 = \frac{5\pi}{2}$ $\quad 2\pi + \frac{\pi}{2}$

1 I

$x^2 + y^2 = 9$

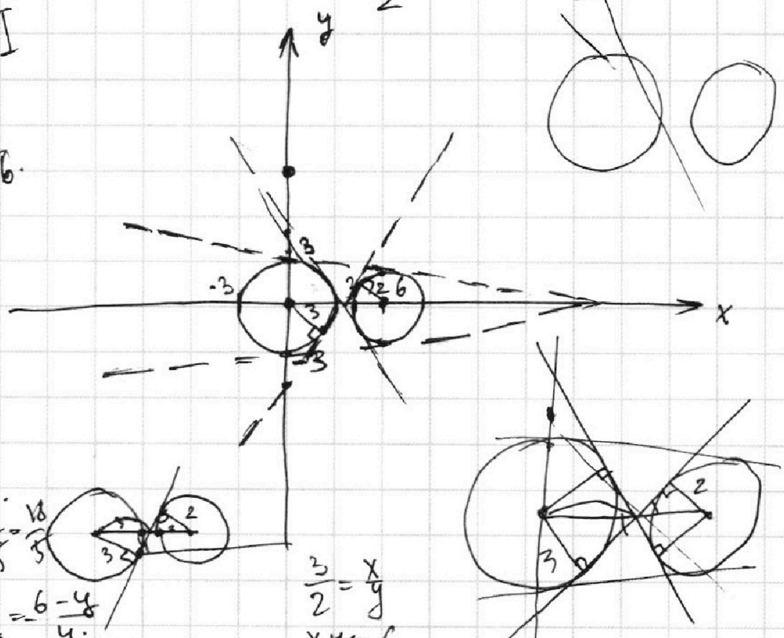
$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 32 = 36.$

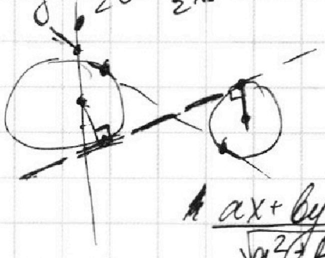
$(x - 6)^2 + y^2 = 4$

$2y = 3b - ax$

$y = \frac{3}{2}b - \frac{a}{2}x.$

$\frac{\cancel{6} \cdot 5}{\sqrt{86}} = \frac{5}{6}.$





$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2.$

$3y = 12 - 2y.$

$5y = 12$

$y = \frac{12}{5}$

$x = 6 - \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$

$\frac{3}{2} = \frac{6 - y}{y};$

$\sin\alpha = \frac{3}{\frac{12}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{\sqrt{...}} =$

$\frac{3}{2} = \frac{x}{y}$

$x + y = 6.$

$x = 6 - y.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$2t^5+16t+7=0 \,|\, :2.$ $\quad -\frac{5\sqrt{11}}{11} \le -\frac{a}{2} \quad a \le \frac{10\sqrt{11}}{11}$

$t^5+8t+\frac{7}{2}=0.$ $\quad \frac{5\sqrt{11}}{11} \geqslant \frac{a}{2}$ $\quad 14+9=23$

$(\log_3^4 x+6\log_x 3)(\log_3^4(5y)+2\log_{5y}3$

$2c_1=19+14-9.$

$\log_3^4(5y)+2\cdot\log_{5y}3=\frac{11}{2}\log_{5y}3-8$ $\quad c_1=1$ $\quad -\frac{a}{2} \le \frac{5\sqrt{11}}{11}$

$\log_3^4 x+6\log_x 3+\log_3^4 5y+2\log_{5y}3=\log_{x^2}3^5+\log_{5y^2}3^{11}+16$ $\quad \frac{a}{2} \geqslant -\frac{5\sqrt{11}}{11}$

~~$\log_3^4 x-\log_3^4 5y=(\log_3^2 x-\log_3^2 5y)(\log_3^2 x+\log_3^2 5y)=\log$~~

$ab=$ НОД $\cdot$ НОК.

$a_1+b_1=x$

~~$a_1+b_1\geqslant 9$~~ $\quad a_1+c_1=y$

$2^{a_1+b_1+c_1}3^{a_2+b_2+c_3}5^{a_3+b_3+c_3}$

$a_1+b_1+c_1\geqslant 9+c_1$ $\quad b_1+c_1=z$

$\begin{cases} a_1+b_1+c_1\geqslant 28-a \\ a+b+c\geqslant 23-b \end{cases}$

$b_1+9+c_1\geqslant 23.$ $\quad a_1=x-b_1.$

$9+c_1\geqslant 23-b.$ $\quad \begin{cases} x-b_1+c_1=y. \\ b_1+c_1=z \end{cases}$

$\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1b_1c_1}$ $\quad a_1+b_1+c_1\geqslant 3\sqrt[3]{a_1b_1c_1}$

$a_1+9+c_1\geqslant 28.$

$9+c_1\geqslant 28-a.$ $\quad x+2c_1=z+y.$

$2a+b+c\geqslant 28$ $\quad a_1+b=9.$ $\quad b=9-a.$ $\quad 2c+9=33$ $\quad c_1=\frac{z+y-x}{2}$

$a+2b+c\geqslant 23.$ $\quad a+c=19$ $\quad \begin{cases} a+c=19 \\ 9-a+c=14 \end{cases}$ $\quad 2c=24$

$a\geqslant\frac{28-b-c}{2}.$ $\quad b+c=14.$ $\quad \begin{cases} c=12. \\ a=7. \\ b=2. \end{cases}$ $\quad a_1=z-\frac{z+y-x}{2}=$

$=\frac{2z-z-y+x}{2}=$

~~$\frac{z+y-x+z-y+x+x-z+y}{2}$~~ $=\frac{z-y+\cancel{z}}{2}.$ $\quad =\frac{z-y+x}{2}.$

$y=-ax+3b$

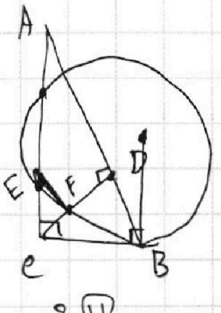
$y-\frac{y+z-x}{2}=\frac{2y-y-z+x}{2}=\frac{y-z+x}{2}$ $\quad y=-\frac{a}{2}x+\frac{3}{2}b.$ $\quad a_1=\frac{2}{2}x-\frac{z-y+x}{2}=$

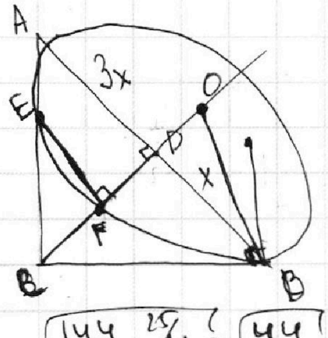
$\frac{2}{2}z-\frac{y+z-x}{2}=\frac{2z-y-z+x}{2}=\frac{x+z-y}{2}$ $\quad =\frac{2x-z+y-x}{2}=\frac{x-z+y}{2}.$

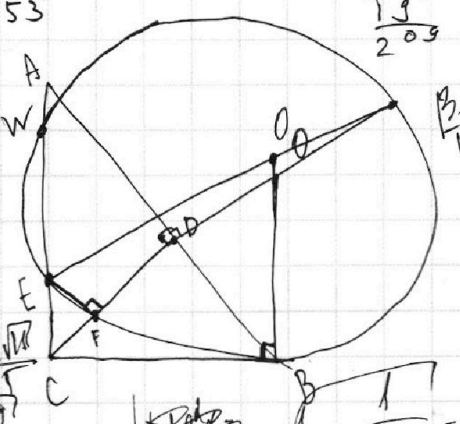
$-10+18+13=28+13=41$

$\frac{9+19+14}{2}=\frac{28+14}{2}=\frac{42}{2}=21$

$13+40=53$ $\quad 54:2=27$ $\quad 19\cdot 11=209$ $\quad \frac{1}{\frac{11}{36}}$







$\left|\frac{36}{11}-1\right|=\frac{25}{11}$

$\frac{\sin(\alpha-\alpha)}{\cos\alpha}$

$\frac{2\sqrt{11}}{5}:2.$ $\quad \sqrt{\frac{144}{25}-\frac{25}{1}}=\sqrt{\frac{44}{25}}=\frac{2\sqrt{11}}{5}$

$tg^2\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{\frac{44}{25}}}=\sqrt{1-\frac{25}{44}}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{44}}=\frac{\sqrt{19}}{4\sqrt{11}}$ $\quad 1+tg^2\alpha$ $\quad \sqrt{1-\frac{1}{\frac{11}{25}}}=\sqrt{1-\frac{25}{11}}=$

$\sqrt{\frac{25}{11}-1}=\sqrt{\frac{14}{11}}=\frac{\sqrt{154}}{11}$