МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A\left(x_1; y_1\right)$ и $B\left(x_2; y_2\right)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

Обозначим кол-во двоек в a, b и c как a_2, b_2 и c_2.
тогда $a_2+b_2 \geq 6$, так как $ab \vdots 2^6$.
Аналогично: $b_2+c_2 \geq 14$ и $c_2+a_2 \geq 16$

$$\begin{cases} a_2+b_2 \geq 6 \\ b_2+c_2 \geq 14 \\ a_2+c_2 \geq 16 \end{cases}$$

$2a_2+2b_2+2c_2 \geq 36$

$a_2+b_2+c_2 \geq 18$

$(a_2+b_2+c_2 = 18$ при $a_2=4,\ b_2=2,\ c_2=12)$

количество троек обозначим a_3, b_3 и c_3.

тогда:

$$\begin{cases} a_3+b_3 \geq 13 \\ b_3+c_3 \geq 21 \\ c_3+a_3 \geq 25 \end{cases}$$

$2a_3+2b_3+2c_3 \geq 59$

$a_3+b_3+c_3 \geq 29{,}5$ – a_3, b_3, c_3 – целые числа значит их сумма не может равняться не целому числу, а значит $a_3+b_3+c_3 \geq 30$.

это возможно при $a_3=9$, $b_3=5$, $c_3=16$.

Кол-во пятерок обозначим a_5, b_5 и c_5.

$a_5+c_5 \geq 28 \Rightarrow a_5+c_5+b_5 \geq 28$ Это возможно при $a_5=14$, $c_5=14$, $b_5=0$.

Итог: $a_2+b_2+c_2 \geq 18 \Rightarrow abc \vdots 2^{18}$

$a_3+b_3+c_3 \geq 30 \Rightarrow abc \vdots 3^{30}$

$a_5+b_5+c_5 \geq 28 \Rightarrow abc \vdots 5^{28}$

Наименьшее значение $abc = \underline{2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}}$ ← Ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

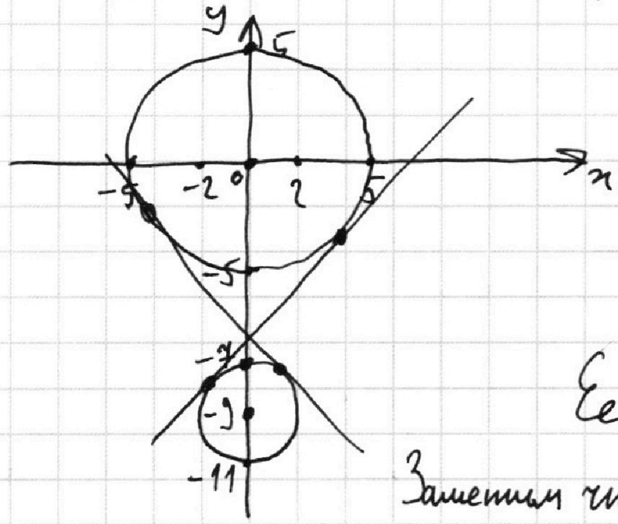
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4

Нарисуем $(x^2+y^2-25)(x^2+(y+9)^2-4)=0$

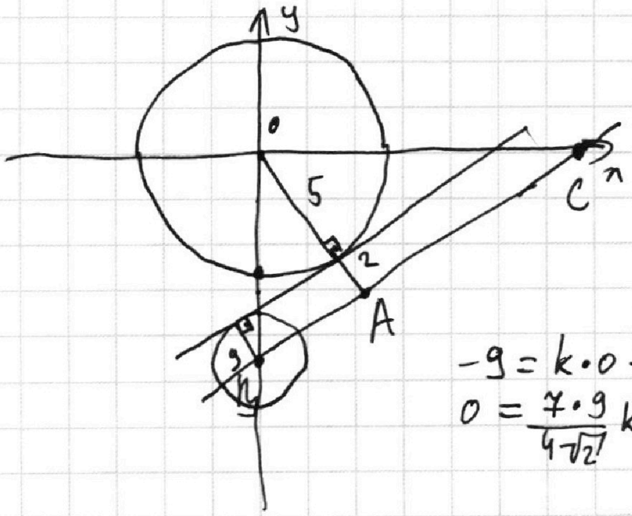


Заметим что $5x+6ay-b=0$ это прямая.

$x = \frac{b}{5} - \frac{6a}{5}y$

Ее уклон равен $-\frac{6a}{5}$.

Заметим что если ее уклон меньше чем у касательной к обеим окружностям (как на рисунке) то всегда можно найти ~~касательную~~ линию которая будет пересекать обе окружности а значит будет 4 ~~решения~~ корня. Если уклон больше, ~~то~~ более 2 ~~решений~~ корней быть не может.



$AB = \sqrt{9^2-7^2} = 4\sqrt{2}$

$\cancel{\frac{OC}{BC} = \frac{OA}{OB} = \frac{7}{9}}$

$OC = \frac{OA\cdot OB}{AB} = \frac{7\cdot 9}{4\sqrt{2}}$

$-9 = k\cdot 0 + b$

$0 = \frac{7\cdot 9}{4\sqrt{2}}k + b$

$k = \frac{9\cdot 4\sqrt{2}}{7\cdot 9} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

МФТИ

№ 5

$$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} 11^{-2} - 5$$

$$\log_{11}^4 x = 6\log_x 11 - \frac{2}{3}\log_x 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 x = 5\frac{1}{3}\,\frac{1}{\log_{11} x} - 5$$

Обозначим $a = \log_{11} x$

$$a^4 = 5\frac{1}{3}\,\frac{1}{a} - 5$$

$$a^5 + 5a = 5\frac{1}{3}$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{(0,5y)^3}(11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) = \left(-\frac{13}{3} - 1\right)\frac{1}{\log_{11}(0,5y)} - 5$$

$$\log_{11}^5 (0,5y) = -\frac{16}{3} - 5\log_{11}(0,5y)$$

Обозначим $b = \log_{11}(0,5y)$

$$b^5 + 5b = -5\frac{1}{3}$$

Заметим что функция x^5 возрастающая и $5x$ тоже возрастающая, значит $x^5 + 5x$ возрастающая, значит a и b имеют единственный корень.

$a^5 + 5a = 5\frac{1}{3}$ $\cdot(-1)$

$(-a)^5 + 5(-a) = -5\frac{1}{3}$

$b = -a$.

$\log_{11} x = -\log_{11}(0,5y)$

$x = \dfrac{1}{0,5y}$

$0,5xy = 1$ $xy = 2$

Ответ: 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

№6

Посмотрим какими прямыми ограничен параллелограмм.

Правая прямая (точки Q и R) Q: $90 = k \cdot 2 + b$

R: $0 = k \cdot 17 + b$

$$\begin{cases} 90 = 2k + b \\ 0 = 17k + b \end{cases} \quad -90 = 15k \quad k = -6, \ b = 102$$

Правая прямая: $y = -6x + 102$

левая прямая (точки O и P) O: $0 = k \cdot 0 + b$

P: $90 = -15k + b$

$$\begin{cases} b = 0 \\ 90 = -15k + b \end{cases} \quad k = -6 \quad b = 0$$

левая прямая: $y = -6x$

Верхняя и нижняя прямые $y = 90$ и $y = 0$.

Разделим весь параллелограмм на прямые по типу $6x + y = m$

~~получится 18 прямых в каждой из которых 16 точек с целыми координатами~~

Получится 18 прямых в каждой из которых 16 точек и еще 75 прямых в каждой из которых 15 точек с целыми координатами.

продолжение →

(продолжение)

Заметим что если мы берем две точки находящиеся на одной прямой ($6x+y=m$), то $6x_1+y_1=6x_2+y_2$.

Если точка B лежит на прямой $6x+y=102$, то точка A должна лежать на прямой $6x+y=54$.

Если точка B лежит на прямой $6x+y=m$, то точка A должна лежать на прямой $6x+y=k$, $m-k=48$.

Посчитаем сначала прямые на которых 16 точек.

Точка B может лежать на 10 из них. Всего пар точек тогда: $16\cdot16\cdot10$.

Посчитаем для прямых на которых 15 точек.

Точка B может лежать на $102-48+1-10=45$ прямых

Всего пар точек тогда: $15\cdot15\cdot45$

Всего пар A и B тогда: $16\cdot16\cdot10+15\cdot15\cdot45=$

$=2^9\cdot5+3^4\cdot5^3=2560+10125=12685$.

Ответ: 12685.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$

$bc \vdots 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac \vdots 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$a+b=13$ $\quad$ $a+b=11$

$b+c=21$ $\quad$ $b+c=13$

$a+c=25$ $\quad$ $a+c=28$

$a-b=4$ $\quad$ $c-a=2$

$2a=17$ $\quad$ $2c=30$

$2a+2b+2c=46+13$ $\quad$ $c=15$

$=59$

30

$\begin{array}{r} 81 \\ -77 \\ \hline 4 \end{array}$

$\begin{array}{r} 24 \\ +28 \\ \hline 52 \end{array}$ $\quad 26$

$\cancel{a}=18$ $\quad 9$

$\cancel{c}=$

$a=9$

$c=16$

$b=5$

$y^2+18y+81$

$x^2+(y+9)^2-4$

$a+b=6$ $\quad 3$

$b+c=14$ $\quad 7$

$a+c=16$ $\quad 8$

$a-b=2$

$2a=8$

$a=4$

$b=2$

$c=12$

2^{18}

$x = \dfrac{b-6ay}{5}$

$\cancel{x = \frac{b}{5} - \frac{6a}{5}y}$

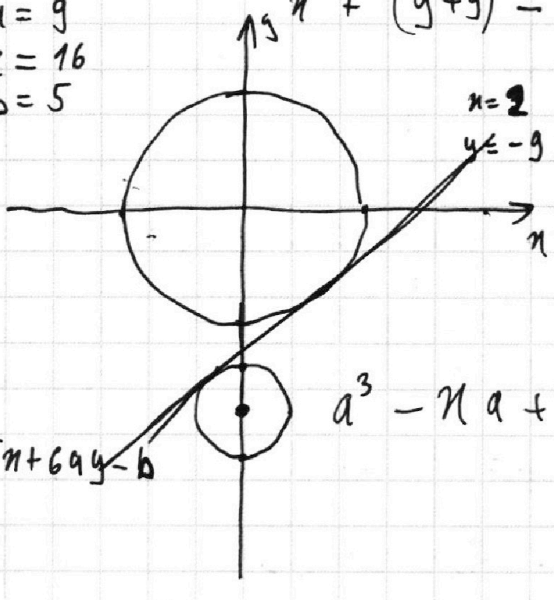
$6ay = b-5x$

$y = \dfrac{b-5x}{6a}$

$y = \dfrac{b}{6a} - \dfrac{5}{6a}x$

$0 \le 6x+y \le 102$

$\begin{array}{r|l} 102 & 6 \\ -6 & \overline{17} \\ \hline 42 & \end{array}$



$x^2+y^2-25=5x+6ay-b$

$a^3 - xa + (x^2+5)\frac{1}{a}$

16

$\begin{array}{l|l} a^5 + \cancel{0a^4} + 0a^3 + \cancel{0a^2} + 5a + 5\frac{1}{3} & a^2+x \\ -\; a^5 + xa^3 & \overline{a^3} \\ \hline \quad -xa^3 + \cancel{0}5a & \\ \quad -\; -xa^3 - x^2a & \\ \hline \qquad (x^2+5)a + 5\frac{1}{3} & \end{array}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$900a^2-b^2+625=0$$

$52\cdot 52$, 104, 260, 2704

$140+14=154$, $154+154=308$

$18\cdot18=144+18\cdot 10=324$, $324-308=16$

$500\cdot500=250000$, $55\cdot55=275+275\ldots$, 302500

$$25(4-(y+9)^2)=b^2+36a^2y^2-12aby$$

$$36a^2y^2-12aby+b^2=\cancel{100-25\cdot\ldots}-25y^2-25\cdot18y-77\cdot25$$

$$(36a^2+25)y^2-(12ab-25\cdot18)y+b^2+77\cdot25=0$$

$$(12ab-25\cdot18)^2-4(36a^2+25)(b^2+77\cdot25)=$$

$$=144a^2b^2+25^2\cdot18^2-50\cdot12\cdot18ab-4(36a^2b^2+36a^2\cdot$$

$$\cdot77\cdot25+25b^2+625\cdot77)=25^2\cdot18^2-50\cdot12\cdot18ab$$

$$-144\cdot77\cdot25a^2-100b^2-4\cdot625\cdot77=$$

$$=625\cdot18^2-625\cdot308-144\cdot77\cdot25a^2-50\cdot12\cdot18ab$$

$$-100b^2=625\cdot16-7\cdot11\cdot5^2\cdot3^2\cdot2^4a^2-5^2\cdot2^4\cdot3^3ab$$

$$-5^2\cdot2^2b^2=100\cancel{00}-7\cdot11\cdot3^2\cdot2^2a^2-2^2\cdot3^2ab-b^2=$$

$$=100-77\cdot36a^2-36ab-b^2$$

$36\cdot77=252+2520=2772$, $2772-324=2448$

$$\begin{cases}2772\;\; 77\cdot36a^2+36ab+b^2-100=0\\ 900a^2-b^2+625=0\end{cases}$$

$$b=\pm\sqrt{900a^2+625}\qquad b^2+2\cdot18a\cdot b+324a^2+2448a^2-100=0$$

$$b=\cancel{\frac{-36a\pm\sqrt{36a^2+4\cdot100\cdot2772a^2}}{}}\;-18a\pm\sqrt{324a^2+100\cdot2772a^2}=$$

$$=-18a\pm\sqrt{277524a^2}\qquad 900a^2+625=324a^2+277524a^2\pm$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

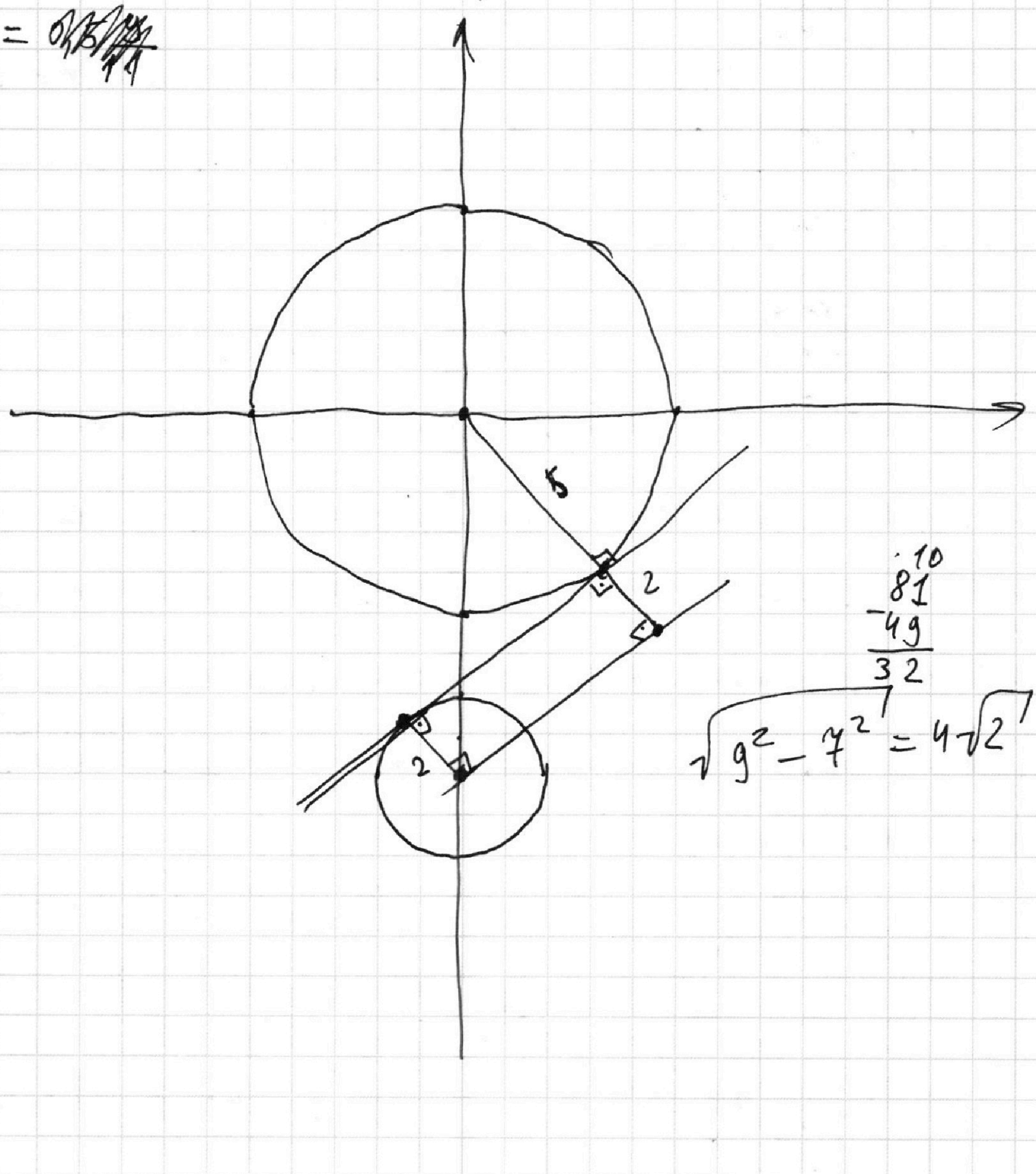
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_{11} x = -\log_{11}(0{,}5y)$

$x = \cancel{11^{-1} \cdot 2 \cdot 0{,}5y}$ $\quad x = \frac{1}{0{,}5y}$

$x = \cancel{0{,}5}$



$$\begin{array}{r} 81 \\ -\ 49 \\ \hline 32 \end{array}$$

$\sqrt{9^2 - 7^2} = 4\sqrt{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

48

18 · 91

55

10

8

102

$$\begin{array}{r} \times\ 91 \\ 18 \\ \hline 728 \\ 91 \\ \hline 1638 \end{array}$$

5120

2560

$$\begin{array}{r} 910 \\ -\ 102 \\ 48 \\ \hline 54 \end{array}$$

$\times$ 512
5

$$\begin{array}{r} 2^4 \\ \times\ 125 \\ 81 \\ \hline 125 \\ 1000 \\ \hline 10125 \\ +\ 2560 \\ \hline 12685 \end{array}$$

0

102

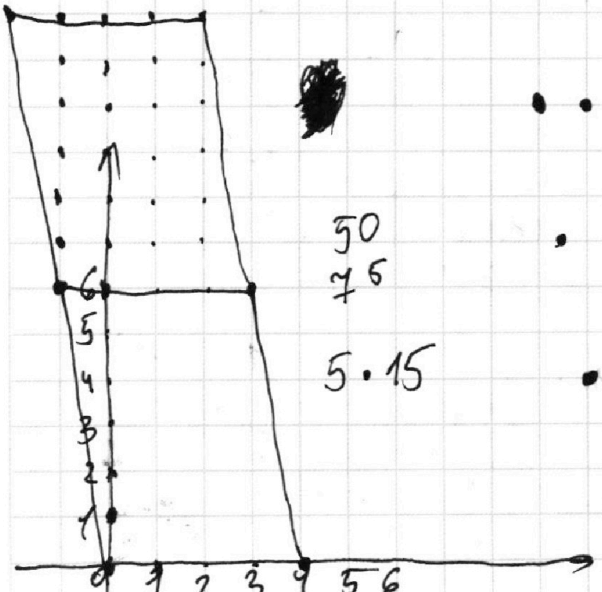
$3^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$

$3^4 \cdot 5^3$

$2^8 \cdot 10$

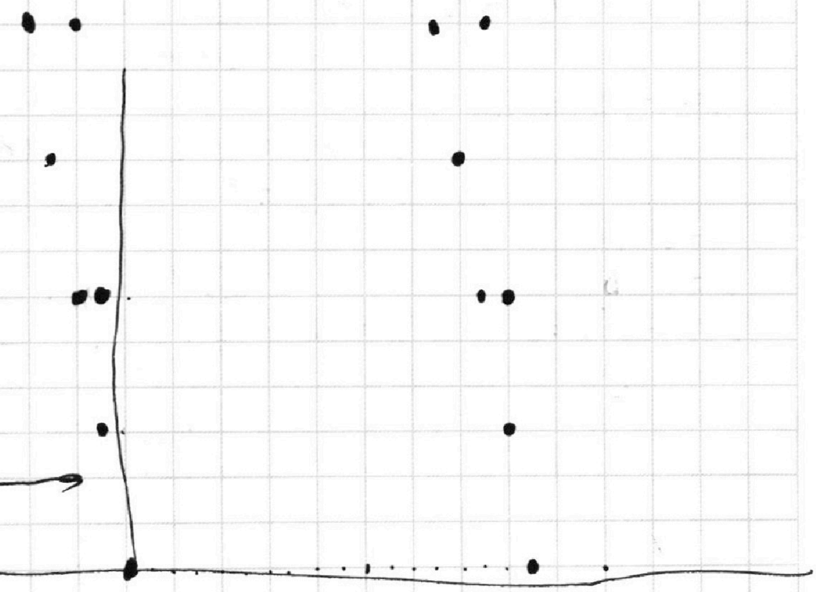
$2^9 \cdot 5$

512 · 5



50
75

5 · 15



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

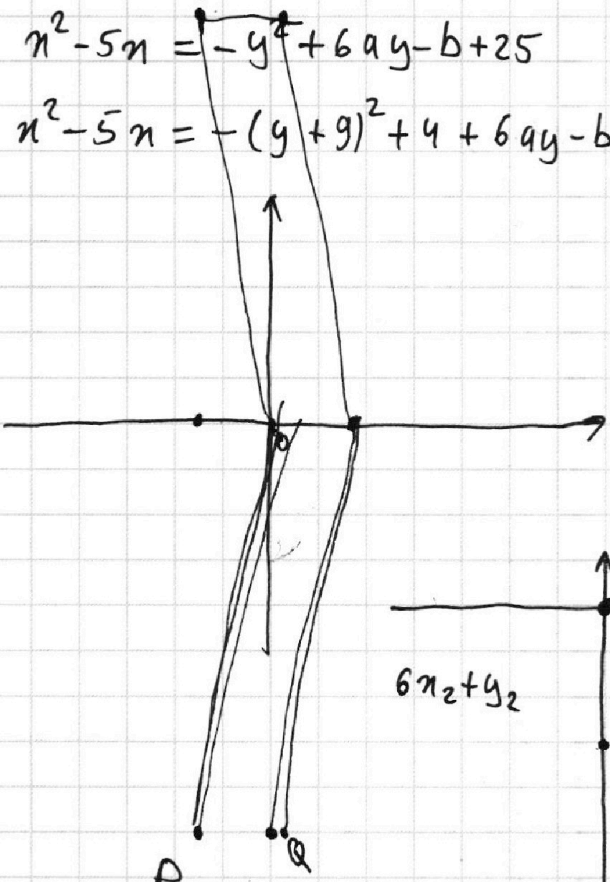
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^2-5x=-y^2+6ay-b+25$

$x^2-5x=-(y+9)^2+4+6ay-b$



$\times\begin{array}{r}525\\525\end{array}$

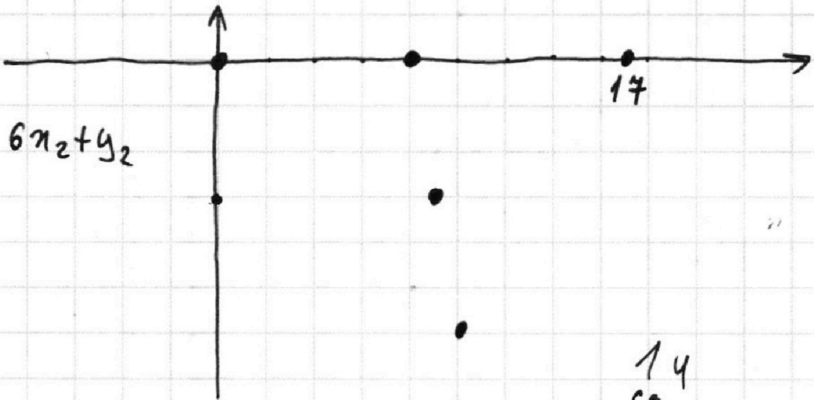
2625
1050
2625
275625

$6x_2-6x_1+y_2-y_1$

$6(x_2-x_1)+y_2-y_1=48$

$x_1=0 \quad 6x_2+y_2=48$

$y_1=0$



$6x_2+y_2$

$y=kx+b$

$0=k\cdot 17+b \qquad 17k=2k-90$

$90=k\cdot 2+b \qquad 15k=-90$

$k=-6$

$y=-6x+102$

$6x+y=102$

$6x+y=0 \qquad 90\geq y\geq 0$

$y=kx+b$

$0=0+b$

$90=-15k+b \qquad k=-6$

14
601
26
102

$\times\begin{array}{r}528\\528\end{array}$

4224
1056
2640
278784

277524 | 4
24 | 69381
37
36
15
12
32
32

69381 | 9
63 | 779
63
63
0

$\times\begin{array}{r}13\\6\end{array}$ 60 18

780 − 779

$\times\begin{array}{r}27\\27\end{array}$

189
54
829

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{2}{3}\log_x 11 - 5$

$\log_{2^3} 2^3$ $\qquad \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\log_{11} x} - 5$

$\frac{1}{3}\log_2 2^3$

$\log_2$ $\qquad \log_2 2^3 = 3$ $\qquad \log_{11}^4 x = 5\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\log_{11} x} - 5$

$\frac{1}{\log_{2^3} 2}$

$a^4 - 5\frac{1}{3}\frac{1}{a} + 5 = 0$

$a^5 + 5a - \frac{16}{3} = 0$

$\log_{11}^4 (k) + \log_k 11 = -\frac{13}{3}\log_k 11 - 5$

$\log_{11}^4 (k) = -\frac{16}{3}\frac{1}{\log_{11} k} - 5$

$\times\, 0,9$
$0,9$

$b^4 = -\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{b} - 5$

5 $\quad \times\, 0,81$
$0,$

$b^5 = -\frac{16}{3} - 5b$

$0,9 \quad 4$

$\times\, 81$
81
81
648

$b^5 + 5b = -5 - \frac{1}{3}$

$\cancel{a^5 + b^5 + 5(a+b) = 0}$

$a = -b$ $\quad 0,6561$

$\frac{-5 \pm \sqrt{25 - 21\frac{1}{3}}}{2}$

$+\,0,6561$
$4,5$
$5,1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

~~$x^2+y^2-25=5x+6ay-b$~~ 72 144

$y=\sqrt{25-x^2}$

$x=\sqrt{25-y^2}$

$x=\frac{b-6ay}{5}$

$\sqrt{25-y^2}=\frac{b-6ay}{5}$

$25(25-y^2)=b^2-12aby+36a^2y^2$

$36a^2y^2-12aby+b^2+25y^2-625$

$36a^2y^2-(12ab-25)y+b^2-625$

$(12ab-25)^2-4\cdot36a^2\cdot(b-25)(b+25)=0$

$144a^2b^2+625-2\cdot12\cdot25ab-4\cdot36\cdot a^2b^2+4\cdot36\cdot625a^2$

$144\cdot625a^2-24\cdot25ab+625=0$

$x=\sqrt{4-(y+9)^2}$

$x=\frac{b-6ay}{5}$

$(x^2+y^2-25)(x^2+(y+9)^2-4)=0$

$x=\sqrt{25-y^2}$ $x=\sqrt{4-(y+9)^2}$

$x=\frac{b-6ay}{5}$ $x=\frac{b-6ay}{5}$

$25(25-y^2)=b^2+36a^2y^2-12aby$

$(36a^2+25)y^2-12aby+b^2-625=0$

$144a^2b^2-4\cdot(b^2-625)(36a^2+25)=0$

$144a^2b^2-4b^2\cdot36a^2-100b^2+4\cdot625\cdot36a^2+400\cdot625$

$100\cdot900a^2-100b^2+62500=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ