



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-14; 42)$ ,  $Q(6; 42)$  и  $R(20; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна  $90$ ,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен  $5$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~1  
Числа  $a, b$  и  $c$  должны быть вида  $2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$ ;  $2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$ ;  $2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$ , т.к.  $x_1, y_1, z_1$  и т.д. — натуральные числа!!!  
если у них есть ещё какие-то простые множители, т.е.  $a, b, c$  точно не будет наименьшим  
 $abc = 2^{x_1+x_2+x_3} \cdot 3^{y_1+y_2+y_3} \cdot 5^{z_1+z_2+z_3}$

При этом  $ab: 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$  и т.д. по условию  
для иском:  $\Rightarrow x_1+x_2 \geq 9$ ;  $x_2+x_3 \geq 14$ ;  $x_1+x_3 \geq 19$

Тогда  $x_1+x_2+x_3 \geq \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{2} \geq \frac{9+14+19}{2} = 21$   
(знак '+' т.к. при произведении степени складываются)  
 $x_1+x_2+x_3 \geq 21$

Аналогично для  $y$  и  $z$  и т.д.:

$$y_1+y_2+y_3 \geq \frac{10+13+18}{2} = 20\frac{1}{2} \Rightarrow \text{и } y \text{ и } z \text{ целые} \Rightarrow y_1+y_2+y_3 \geq 21$$

$$z_1+z_2+z_3 \geq \frac{10+13+30}{2} = 26\frac{1}{2}$$

$$z_1+z_2+z_3 \geq 27$$

Чтобы  $abc$  было минимально,  $x_1+x_2+x_3$ ,  $y_1+y_2+y_3$ ,  $z_1+z_2+z_3$  тоже должны быть минимально возможными

$$\Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 21; y_1+y_2+y_3 = 21; z_1+z_2+z_3 = 27$$

И минимальное  $abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

Ответ:  $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~2. по условию:

$\angle C = 90^\circ$ .  $CD \perp AB$

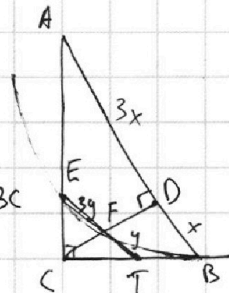
$B$  - точка касания

$AB \parallel EF$ ,  $\frac{AD}{BC} = \frac{3}{1}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

$\triangle ACD \sim \triangle BCD \sim \triangle ABC$

$\triangle ACD \sim \triangle ECF$   
по 2 углам.



Пусть  $T \in EF \cap BC$ .

Тогда  $TB$  - касательная к окр.,  $TE$  - секущая

$\Rightarrow TF \cdot TE = BT^2$

Пусть еще  $AD = 3x$  и  $BD = x$  и  $EF = 3y$  и  $FT = y$

(Заметим, что  $\frac{EF}{TF} = \frac{AD}{BD}$  из подобия  $\triangle CEF \sim \triangle ACD$  по 2 углам)

Тогда  $BT = \sqrt{TF \cdot TE} = \sqrt{y \cdot (3y + y)} = 2y$

При этом  $CD$  - высота  $\triangle ABC$

$\Rightarrow CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{3}x$

$\Rightarrow$  из  $\triangle BCD$ :  $BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 2x$

и  $CT = \frac{y}{x} \cdot 2x = 2y \Rightarrow BT = 2y$

$\Rightarrow 2y = 2x - 2y$

$y = 2x$

$\Rightarrow$  т.  $T$  - середина  $BC$ . Тогда и т.  $E$  - середина  $AC$

$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}$ . (из подобия)  
(т.к. одна высота)

$S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ACD} \cdot \left(\frac{CE}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot S_{\triangle ACD}$  (из подобия)

$\Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3}{16} S_{\triangle ABC}$

Ответ:  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~3.

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}. \quad \text{Мы знаем, что } \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{Тогда } 5 \arcsin(\cos x) = 5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right),$$

где  $n$  - такое целое число, что  $\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

(интервал такой, т.к.  $\arcsin$  может принадлежать только ему)

$$\Rightarrow 5\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 10\pi n + 2\pi = 2\pi(5n + 1)$$

$$x = \frac{\pi}{3}(5n + 1)$$

$$\cancel{\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq -x + 2\pi n \leq 0$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{3}(5n+1) + 2\pi n \leq 0$$

$$-1 \leq -\frac{5n+1}{3} + 2n \leq 0$$

$$-3 \leq -5n-1+6n \leq 0$$

$$-2 \leq n \leq 1 \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$  Возможные значения  $n$ :  $-2; -1; 0; 1$ .

Им соответствуют решения уравнения:

$$x_1 = \frac{\pi}{3}(5 \cdot (-2) + 1) = -3\pi$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}(5 \cdot (-1) + 1) = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3}(0 + 1) = \frac{\pi}{3}$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}(5 \cdot 1 + 1) = 2\pi$$

Ответ:  $-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \quad a = ? \quad (\text{такие, что найдётся } b, \text{ при которых у системы 4 решения})$$

Решим задачу графически.

Второе уравнение системы задаёт окружности:

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \text{центр} - (0, 0); \quad r = 3$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$$

$$(x - 6)^2 + y^2 = 4 \quad \text{центр} - (6, 0); \quad r = 2$$

Запомним, что у этих окружностей нет общих точек.

$ax + 2y - 3b = 0$  - прямая

$$y = -\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}$$

Когда угол наклона этой прямой между

$\angle > \frac{\pi}{2}$  (наклоном касательной) или  $\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$  (наклоном касательной с отриц. знаком) и  $-\frac{\pi}{2}$ , система не будет иметь 4 решения ни при каком  $b$ , т.к. у прямой с окружностями будет от 0 до 2 точек пересечения

найдем  $\alpha$  - угол наклона общей касательной к окружностям, причём внутренней. ( $\alpha > 0$ )

см. рис:  $A, B$  - т. касания  $O_1$  и  $O_2$  - центры окр.

$$O = O_1, O_2 \perp AB$$

$$\alpha = \angle BO_2O \Rightarrow -\frac{\alpha}{2} = \text{tg } \alpha = \text{tg } \angle BO_2O$$

$$b = O_1O_2 = OO_1 + OO_2 = \frac{AO_1}{\sin \alpha} + \frac{BO_2}{\sin \alpha} = \frac{AO_1 + BO_2}{\sin \alpha} = \frac{2 + 3}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin \alpha}$$

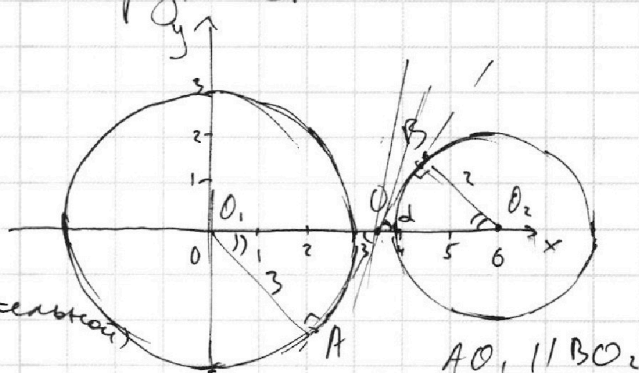
$$(0 <) \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 25}}{b} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{5}{\sqrt{b^2 - 25}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{b^2 - 25}} < -\frac{\alpha}{2} < \infty \Rightarrow -\frac{10}{\sqrt{b^2 - 25}} > a > -\infty$$

$$a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{b^2 - 25}})$$

Также в ответе будет  $a \in (-\frac{10}{\sqrt{b^2 - 25}}; +\infty)$ , т.к. график симметричен относительно осей  $\rightarrow$  у второй внутр. кас. угол наклона =  $-\alpha$

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -\frac{10}{\sqrt{b^2 - 25}}) \cup (-\frac{10}{\sqrt{b^2 - 25}}; +\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sim 5$ .  
 $xy = ?$

$$243 = 3^5$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 243 - 8$$

$$\log_3^4 (5y) + 2 \log_3 3 = \log_{5y} (3^5) - 8$$

пусть  $a = \log_3 x$  и  $b = \log_3 5y$

$$a = \log_3 3; \frac{1}{6} = \log_{5y} 3$$

Тогда используя различные преобразования логарифмов получим:

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8; \quad b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2} - 8$$

Упростим:  $2a^5 + 16a + 7 = 0; a \neq 0$  (\*)

"  $2b^5 + 16b - 7 = 0; b \neq 0$

$f(a) = 2a^5 + 16a + 7$  ↑ т.к. это сумма возрастающих функций

⇒ ур-е  $2a^5 + 16a + 7 = 0$  имеет 1 корень на  $\mathbb{R}$

⇒ единственно возможное число  $x$  удовлетворяет ур-ю  $a = \log_3 x$

Аналогичные рассуждения можно провести для  $5y$  "  $f(b)$

$x$  и  $y$  - единственные ⇒  $xy$  тоже.

Теперь сложим ур-я (\*):  $\Rightarrow 2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$   
 $2(a + b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 8) = 0$

$a + b = 0$

$\log_3 x + \log_3 5y = 0$

$\log_3 (5xy) = 0$

$5xy = 1$

$xy = 0,2$

... решать не надо, т.к. уже нашли единственные

возможные значения  $xy$ .

Заметим еще, что  $x$  и  $y$ , при которых ур-я \* имеют решение, точно есть, т.к.

'исключения ОДЗ' в виде  $x=1$  и  $y=1$  - не корни.

Ответ:  $xy = 0,2$ . (больше значений  $xy$  нет)

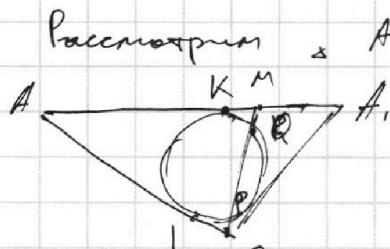
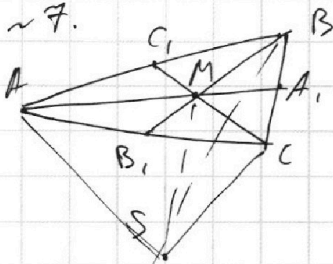
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$SP = MQ$$

сфера в сечении  $S$  представляет собой окружность, вписанную в  $\triangle ASA_1$   
По т. об отрезках  $SM$  о кас. и секущей:

$$SP \cdot SQ = SL^2; \quad MQ \cdot MP = KM^2$$

Но по условию  $SP = MQ$

$$\Rightarrow SL^2 = KM^2; \quad SL = MK$$

При этом  $AK = AL$  (касая. из одной точки)

Получим, что  $AS = AL + SL = AK + KM = AM$

$$\Rightarrow AM = AS = 12. \quad \Rightarrow AA_1 = \frac{3}{2} AM = 18$$

Тогда  $AA_1M = 18 - 12 = 6 = A_1B = A_1C$

$\Rightarrow \triangle BMA_1$  и  $\triangle CMA_1$  - р/б  $\triangle$

$\Rightarrow$  т.  $A_1$  равноудалена от т.  $B, M$  и  $C$

$\Rightarrow A_1$  это центр окр. в  $\triangle BCM$   
 $R = A_1M = 6$

$\Rightarrow \angle M$  в этом  $\triangle$  опирается на диаметр  
 $\Rightarrow \angle BMC = 90^\circ$

$$\Rightarrow S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} BM \cdot CM$$

Также т.к. медианы делят треугольник  $ABC$  на 6 равных  $\triangle$  попарно,  $\Rightarrow S_{\triangle BMC} = S_{\triangle A_1BM} + S_{\triangle CA_1M}$

$$= 2 \cdot S_{\triangle BMC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{3} = \frac{90}{3} = 30.$$

$$\Rightarrow BM \cdot CM = 2 S_{\triangle BMC} = 60$$

$$\text{Тогда } AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = AA_1 \cdot \frac{3}{2} BM \cdot \frac{3}{2} CM =$$

$$= \frac{9}{4} AA_1 \cdot BM \cdot CM = \frac{9}{4} \cdot 18 \cdot 60 = 2430$$

Ответ: а) 2430

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~78 (а.а на другом месте)

$SN=4$ ,  ~~$SO=5$~~   $NO=5$  (где  $O$  - центр сферы)

$\Rightarrow$  По т. Пифагора из  $\Delta SON$ :  
 $SO = \sqrt{NO^2 + SN^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

$$OK = ON = 5$$

$KO \perp ABC \Rightarrow KO \perp BC$   
 $NO \perp BC \Rightarrow NO \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (NOK)$

$\Rightarrow$  Пусть  $F = BC \cap NOK \Rightarrow KF \perp BC$

$\Rightarrow \angle KFN$  - мин. угол двугр. угла при ребре  $BC$  (т.е. искомого угла)

Пусть  $AM$  - высота основания

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC; \quad AM = \frac{2 \cdot 90}{12} = 15$$

$$\frac{KF}{AM} = \frac{AN}{AA_1}$$

из подобия  $\Delta AKF$  и  $\Delta A_1AN$   
по углам





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

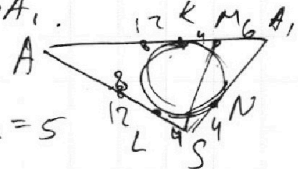
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~н.д. (н.д.) от на другой странице!)~~

Продолжим 'рассматривать'  $\triangle ASA_1$ .  
 из условия н.д. следует, что  
 окружность с радиусом  $r = r_{сфера} = 5$   
 вписана в  $\triangle ASA_1$ ;  $K, L$  и  $N$  — точки касания  
 $SN = 4$ .  $AS = 12$ ;  $AA_1 = 18$ .  
 $\angle(ABC; SBC) = \angle AA_1S$  т.к. из н.д. ясно,  
 что т.к. сфера касается граней в т.  $M$  и  $N$  и ребра  $AS$   
 в т.  $L$ ,



то  $AA_1 \perp BC$  и  $SA_1 \perp BC$   
 Найдём  $\angle AA_1S$ .  $LS = SN = 4 \Rightarrow AL = 12 - 4 = 8 = AK$   
 $\Rightarrow MK = 12 - 8 = 4$ ;  
 $A_1M = A_1N = KM + A_1M = 4 + 6 = 10$ .  $\Rightarrow A_1S = 4 + 10 = 14$   
 $\Rightarrow$  стороны треугольника =  $12; 14; 18$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$ab: 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^0$

$bc: 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^5$   
 $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$

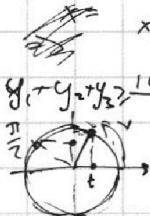
$ac: 2^9 \cdot 3^8 \cdot 5^{30}$   
 $a = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$

$x_1 + x_2 \geq 9$

$x_2 + x_3 \geq 14$

$x_1 + x_3 \geq 19$

$2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{21}$



$x_1 + x_2 + x_3 \geq 21$

$y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{10+13+18}{2} = 20,5 \Rightarrow \geq 21$

$\frac{10+13+30}{2} = \frac{53}{2} = 26,5$

$\frac{9+14+19}{2}$

$= \frac{2B+14}{2} = 7+10$

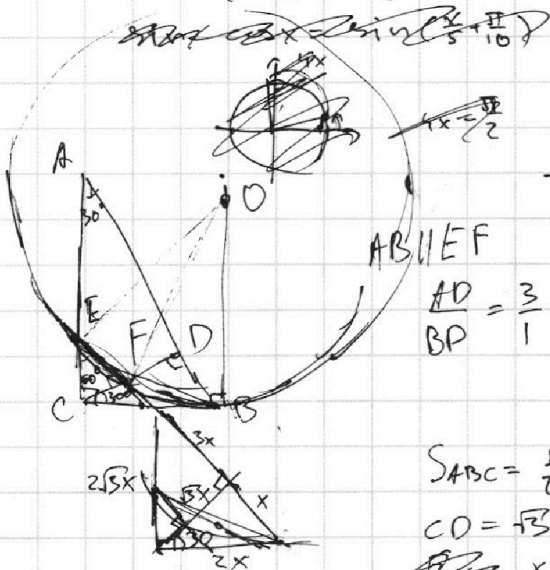
$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

$\sin(\arcsin(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10})) = t = \cos x$

$\arcsin(\cos x) =$

$\arcsin t = \arccos(\sqrt{1-t^2})$



$AB \parallel EF$

$\frac{AD}{BP} = \frac{3}{1}$

$EF \cdot CF \dots$

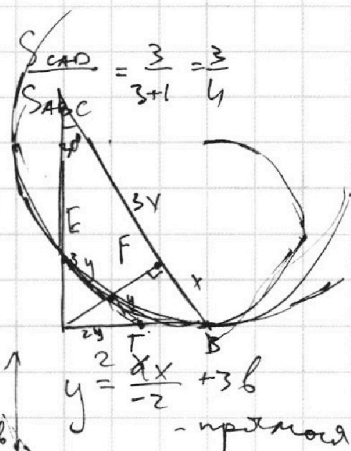
$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$

$\frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$

$CD = \sqrt{3}x$

$\frac{x}{\sqrt{3}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$ax + 2y - 3b = 0$

$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 37) = 0$

$x^2 + y^2 = 9 \quad (x-6)^2 + y^2 = 4$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \sqrt{y = \frac{ax}{-2} + 3b}$

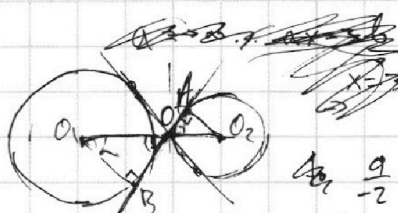
$BF^2 = GF \cdot FE =$

$= 4(x-y)^2 = y \cdot 4y^2 = 4y^3$

$x = 2y$

$x - y = y$

$\frac{9}{-2}$  - показывается наклон прямой

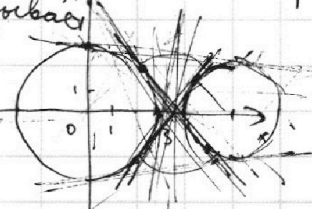


$\frac{9}{-2} = \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

$0, 0,2 = 6 = \frac{5}{11}$

$\sin \alpha = \frac{5}{6}$

$\cos \alpha = \frac{5}{11}$



$\frac{\sqrt{11}}{6} \frac{11}{5x}$

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{\sqrt{11}}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$~~   ~~$x \in \frac{\pi}{2}$~~   ~~$\arcsin(\cos x)$~~   $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

$\frac{\pi}{2} - x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$5 \arcsin(\cos x) = 5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$

$= 5(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi n) = x + \frac{\pi}{2}$

$10\pi n + \frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$

$6x = 2\pi + 10\pi n = 2\pi(5n+1)$

$x = \frac{\pi}{3}(5n+1)$

$y = \frac{3}{2} \delta$

$-1 \leq -\frac{5n_1}{3} - \frac{1}{3} + 2n_1 \leq 0$

$-1 \leq \frac{n_1-1}{3} \leq 0$

$-3 \leq n_1 - 1 \leq 0$

$n_1 = -4; -3; -2; -1; 0; 1$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}(5n_1+1)$

$5 \cdot \arcsin(\cos 2\pi) = \frac{5\pi}{2}$

$\arcsin(\cos 1) = \frac{\pi}{2}$



~~$\Rightarrow -\frac{13\pi}{3}; -\frac{14\pi}{3}; -3\pi; -\frac{4\pi}{3}$~~

$\log_3(5xy) = \log_3 x + \log_3 5y$

$x^5 + y^5 = x^4 y + x^3 y^2 + x^2 y^3 + x y^4 + y^5$

$\log_3^4 x + 6 \log_3^3 = \log_3 x^2 243 - 8$

$\log_3^4(5y) + 2 \log_3^3 5y = 8$

$\log_3^4 x + \frac{6}{2 \log_3 x} = \frac{5}{2 \log_3 x} - 8$

$2 \log_3^5 x + 2 \log_3^5(5y) + 6 \log_3^4 5xy = 0$

$2 \log_3^5 x + 6 \log_3^4 x + 7 = 0$

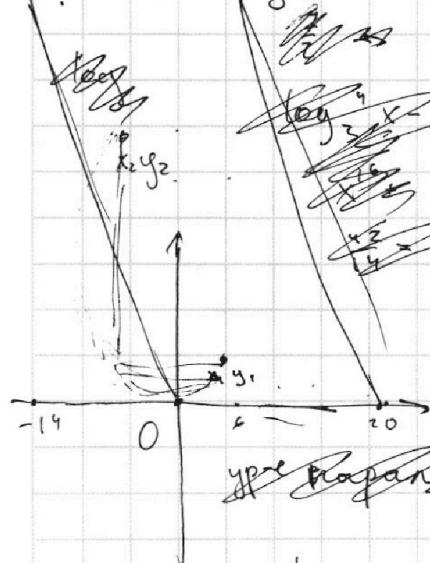
$2 \log_3^4(5y) + 2 \log_3^3 5xy = 8$

$\log_3 x = 2$

$2 \log_3^3 5xy = 8$

~~$2 \log_3^5 x + 6 \log_3^4 x + 7 = 0$~~

$= \frac{11}{2} \log_3^2 5y - 8$



$2 \log_3^5(5y) - 7 + 6 \log_3^4 5y = 0$   
 $2 \log_3^3(5y) (8 + \log_3^4 5y) + \log_3^4 5y = 0$   
 $2 \log_3^5(5y) + 16 \log_3^4 5y - 7 = 0$

$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$   
 $3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$   
 $y_2 - y_1 = 3$

$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$   
 $1 = 11 - x_1 + x_2$   
 $x_1 - x_2 = 10$   
 $3(11 - x_1 + x_2) = 33$   
 $3| -1 \quad 42 = 3 \cdot 14$

$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$
3	11
6	10
9	9
12	8
15	7
18	6
21	5
24	4
27	3
30	2
33	1
36	0
39	-1
42	-2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten mathematical solution on grid paper for a geometry problem involving a pyramid and a sphere.

**Initial Equations:**

$$18^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \cos \alpha = 12^2$$

$$AM = AS = 12$$

$$AK \perp BC \Rightarrow AA_1 = 18$$

$$SN = 4 \quad BC = 12$$

**Area Calculations:**

$$S_{ABC} = 90$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A$$

$$9^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos \alpha = 6^2$$

$$\cos \alpha = \frac{81 + 49 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{94}{14 \cdot 9}$$

$$S_{BAM} = 18 \cdot \sin \angle BAM = \frac{90}{6} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\sin \angle BAM = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

**Trigonometric Identities:**

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{94}{126} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{94 + 126}{126}}{2}} = \sqrt{\frac{220}{252}} = \sqrt{\frac{110}{126}} = \sqrt{\frac{55}{63}}$$

$$BM = 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{55}{63}}{2}} \cdot 6 = 12 \sqrt{\frac{1 + \frac{55}{63}}{2}}$$

$$CM = 12 \sqrt{\frac{1 - \frac{55}{63}}{2}} = \frac{9}{14} \cdot 30 \cdot 9 = 144 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{11}{6}} \sqrt{1 + \frac{11}{6}} = 81 \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{11}{36}} = \frac{5}{6} \cdot 81 \cdot 2 = 5 \cdot 27$$

**Other Notes:**

- Don't you Dave
- gubatte!  $\Rightarrow AM = \frac{2 \cdot 90}{12} = 15$
- 130-36
- 44 \cdot 5 = 18 \cdot 12
- sin \angle BAM
- cos \frac{\alpha}{2}
- очень любопытная оценка
- или нулистая помага?
- 12, 14, 18
- BB, CC
- AA, BC

**Diagrams:** Several hand-drawn diagrams showing a pyramid with a sphere inscribed inside, various cross-sections, and geometric relationships between points A, B, C, M, N, K, S, A1, B1, C1.

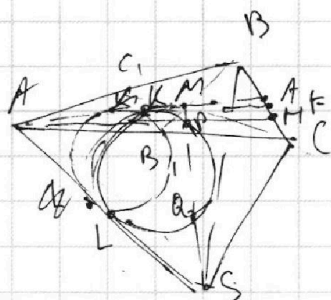
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$AM = \frac{180}{12} = 15$$

$$SP = MQ$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = ?$$

$$S_{ABC} = 90$$

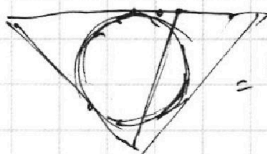
$$AS = BC = 12$$

$$(2b-c)(2c-b)$$

$$AK = AL$$

$$SL^2 = SQ \cdot SP =$$

$$= SQ \cdot MQ = MP \cdot MQ =$$



$$(2a+2b-c)(2a+2c-b) = 4a^2 + 2ab + 2ac + 5bc - 2c^2 - 2b^2$$

$$\Rightarrow \triangle ASM \text{ - p.d. } AM = AS$$

$$\Rightarrow AM = BC$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} \cdot BC = 18$$

$$4AA_1^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$$

$$4CC_1^2 = 2(BC^2 + AC^2) - AB^2$$

$$4BB_1^2 = 2(BC^2 + AB^2) - AC^2$$

$$AB^2 + AC^2 = 4 \cdot 38^2 + 12^2 = 21$$

$$= 18^2 \cdot 1024$$

$$5bc - 2c^2 - 2b^2 = ?$$

$$t = \log_3 x$$

$$1 \cdot x - 1 \cdot x \cdot 36$$

$$\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x \cdot 39$$

$$7 \cdot x - 7 \cdot x \cdot 42$$

$$t + 0 = \frac{7}{2} \cdot x - \frac{7}{2} \cdot x$$

$$5 \arcsin(-1) = -\frac{5\pi}{2}$$

$$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3 x^2 43 \cdot 8$$

$$t^4 + \frac{6}{t} - \frac{5}{2} t \cdot 8 = 0$$

$$8a^5 + 16 = 8(a^5 + 2) \Rightarrow 2t^5 + 76t + 57 = 0$$

$$2a^5 + 16a + 7 = 0$$

$$2b^5 + 16b + 7 = 0$$

$$2(a^5 + b^5) + 16(a + b) = 0$$

$$(a+b)(2a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + 16 = 0$$

$$2 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$42 \geq y_2 + y_1 \geq -42$$

$$3(x_2 + 14) + y_2 - 42 = 33$$

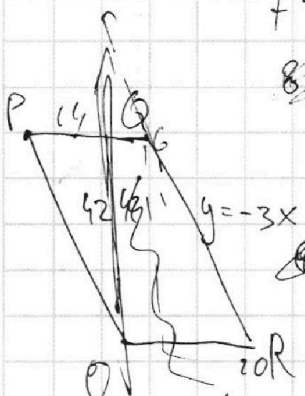
$$\begin{cases} 3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33 \\ y_1 \leq -3x_1 + 60 \\ y_2 \leq -3x_2 + 60 \\ y_1 \geq -3x_1 \\ y_2 \geq -3x_2 \end{cases}$$

$$42 \geq y_1 \geq 0$$

$$42 \geq y_2 \geq 0$$

$$y_1 \geq -3x_1$$

$$y_2 \geq -3x_2$$



$$y_1 \leq -3x + 60$$