



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^8 3^{14} 5^{12}, bc : 2^{12} 3^{20} 5^{15}, ac : 2^{14} 3^{27} 5^{39}$$

Пусть  $a : 2^x$ , тогда  $b : 2^{8-x}$ ,  $c : 2^{14-(8-x)} = 2^{6+x}$   
 $c : 2^{14-x}$ , тогда  $14-x = 6+x \Rightarrow x = 5$

Проверим сами  $a : 2^5, b : 2^3$  то  $ab : 2^8$ ,  
 $c : 2^9$  тогда  $bc : 2^{12}$ ,  $ac : 2^{14}$  - верно!

Пусть  $a : 3^y$ , тогда  $b : 3^{12-y}$ ,  $c : 3^{20-(12-y)} = 3^{8+y}$   
 $c : 3^{12-y}$ , тогда  $12-y = 8+y \Rightarrow y = 15$

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то рассм.  $\frac{y}{2}$  или  $\frac{y}{3}$ ,  
 значит  $y \in \mathbb{N}$ , получим:  $y = 5$

При  $y = 5$ :  $a : 3^5 \Rightarrow b : 3^7 \Rightarrow c : 3^{15} \Rightarrow ac : 3^{20}$ , а  
 наоборот то же  $bc : 3^{27}$  значит не  
 подходит.

При  $y = 8$ :  $a : 3^8, b : 3^4, c : 3^{12} \Rightarrow ac : 3^{20}$  -  
 подходит

Пусть  $a : 5^z$ , тогда  $b : 5^{12-2z}$ ,  $c : 5^{15-(12-2z)} = 5^{3+2z}$

$c : 5^{12-2z}$ , тогда  $12-2z = 3+2z \Rightarrow 3 \cdot 4 = 2z \Rightarrow z = 1.5$

проверим:  $a : 5^{1.5} \Rightarrow c : 5^{2.25} \Rightarrow ac : 5^{3.75}$ ,  
 $ab : 5^{1.5} (удовлет.)$   $bc : 5^{2.25} (удовлет.)$

Итого  $abc = 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 =$   
 $= 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$  - мин. возм. произв.

Ответ  $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

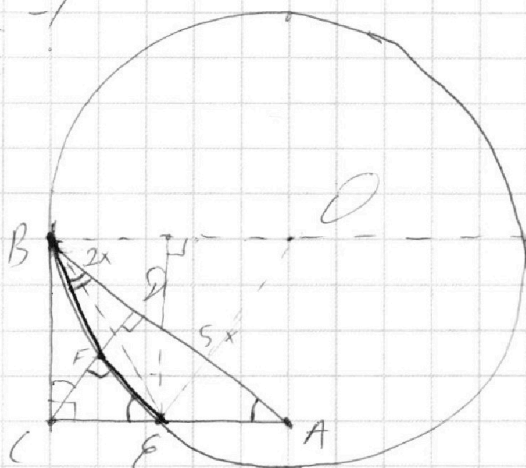
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$S_{ABC} \rightarrow$   
 $S_{CFE}$



1) Пусть  $AD = 5x$ , тогда

$$BD = 2x$$

2)  $ABFE \sim \triangle ABC$

т.к.  $FE \parallel AB$  и  $AB \perp DC$ ,  
то  $FE \perp DC \Rightarrow \angle CFE = 90^\circ$

3)  $\triangle ABC \sim \triangle CFE$

$$CB^2 = CE \cdot CA$$

4)  $CD = \sqrt{BD \cdot AD}$  т.к.  $AB \perp CD$

$CD \perp AB$  - свойство высот в  $\triangle ABC$

$$CD = \sqrt{2x \cdot 10x} = 2\sqrt{5}x$$

5) Пусть  $O$  - центр окружности, тогда  $OB \perp BC$  по свойству касательной к окружности.

$$6) S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AB; S_{CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot FE$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{CD \cdot AB}{CF \cdot FE} = \frac{\triangle CFE \sim \triangle CDA \text{ по 2 угл. } \angle A}{\triangle CFE \sim \triangle CDA \text{ по 2 угл. } \angle A}$$

$$\angle DCA = \angle CFE, \angle CFE = \angle CPA = 90^\circ$$

$$\text{след. } \frac{CF}{CA} = \frac{CE}{CD} = \frac{FE}{DA}, \text{ тогда } \frac{S_{ABC}}{S_{CFE}} = \frac{AB \cdot AD}{FE \cdot FE} = \frac{45x^2}{FE^2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{TO } \sin(\cos x) = 2 - 2x$$

$$\sin(\cos x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ при } x \in [-1; 1]$$

$$\text{TO } \sqrt{1-x^2} = 2-2x, \text{ т.к. } x \in [-1; 1], \text{ то } 2-2x > 0$$

т.к.  $x \approx 3,79$   $2x \leq 2$

следов. возв. в квадрат обе части уравн.

$$\text{TO } (1-x^2) = 2^2 - 4x + 4x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 104x^2 - 4x + 2^2 - 100 = 0$$

$$D = 16^2 - 4 \cdot 104 \cdot 2 = 100(416 - 42^2)$$

$$x = \frac{42 \pm 10\sqrt{416-42^2}}{208}$$

$$\frac{42 + 10\sqrt{416-42^2}}{208} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{416-42^2} < 208-42 \quad 2 > 3$$

$$10\sqrt{416-36} < 196$$

$$330 \cdot 100 < 196 \cdot 196$$

следов. нест.

следов.  $x > 0$

$$\frac{42 - 10\sqrt{416-42^2}}{208} > -1$$

$$\text{т.к. } \frac{42}{208} - \frac{10\sqrt{416-42^2}}{208}$$

$$\text{нест. } > 0, \text{ а } \frac{42}{208} + x < 1$$

$$\text{Ответ: } \frac{42 \pm 10\sqrt{416-42^2}}{208}$$

5835
796
+ 796
1796
+ 264
196
38416 > 38000

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

предел не равен

$$\operatorname{tg} \angle B C = \frac{\alpha}{3} \quad \operatorname{tg}^2 \angle B C + 7 = \frac{7}{\cos^2 \angle B C} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg}^2 \angle B C = \left(\frac{70}{7}\right)^2 - 7 = \frac{700 - 49}{49} = \frac{57}{49} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} \angle B C = \pm \frac{\sqrt{57}}{7} = \frac{\alpha}{3} \rightarrow \alpha = \pm \frac{3}{7} \sqrt{57}$$

Всегда при  $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57})$  - 4 рещ. ~~то~~  
при нек. зн.  $\alpha$

$\alpha \in [-\frac{3}{7} \sqrt{57}; \frac{3}{7} \sqrt{57}]$  - все  $\rightarrow$  4 рещ. ~~то~~ при  
люб. зн.  $\alpha$

$\alpha \in (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$  - 4 рещ. ~~то~~ при нек. зн.  $\alpha$

Ответ:  $\alpha \in (-\infty; -\frac{3}{7} \sqrt{57}) \cup (\frac{3}{7} \sqrt{57}; +\infty)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4 2x - 3 + \log_{2x} 5 = \log_{2x^3} 625 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 2x - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3} \frac{1}{\log_5 2x} - 3 \\ 2x \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{т.к. } 8x^3 = (2x)^3 \\ 625 = 5^4 \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 2x = m \Rightarrow 5^m = 2x, \quad x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \neq 0, \text{ тогда } m^4 - \frac{3}{m} = \frac{4}{3} \frac{1}{m} - 3 \Rightarrow \cdot m \neq 0$$

$$\Rightarrow m^5 + 3m - \frac{13}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\log_5^4 4 + 4 + \log_{\frac{4}{5}} 5 = \log_{\frac{4}{5^3}} 0,2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_5^4 4 + \frac{4}{\log_5 4} = -\frac{7}{3} \frac{1}{\log_5 4} - 3 \\ 4 \neq 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{т.к.} \\ 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1} \end{array}$$

$$\text{Пусть } \log_5 4 = n \Rightarrow 5^n = 4, \quad 4 \neq 1 \Rightarrow n \neq 0$$

$$\text{тогда } n + \frac{4}{n} = -\frac{7}{3} \frac{1}{n} - 3 \quad \cdot n \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^5 + 3n + \frac{7}{3} = 0 \quad (2) \quad \text{Сом. (1) и (2):}$$

$$n^5 + m^5 + 3(m+n) = 0 \Rightarrow (m+n)(m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 -$$

$$- mn^3 + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m+n=0 \\ m^4 + n^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + 3 = 0 \end{cases}$$

нет реш.

$$xy = \frac{5^m \cdot 5^n}{2} = \frac{5^{m+n}}{2} \quad \text{т.к. } m+n=0, \quad x \neq 0$$

$$xy = \frac{5^0}{2} = \frac{1}{2}$$

Ответ:  $\frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$x_2 - x_1 \leq 9 \text{ или } y_2 - y_1 \geq 0$$

9)  $x_2 - x_1 \leq 8$  или  $y_2 - y_1 \leq 0$   
т.е. граница пересечения  $x \leq 8$

$$L = \frac{80}{16} = 5 - \text{услов. колл. 2-ой интервал}$$



т.е. координаты 5 отч. по оси  $y$   
выбраны. Цельные коор. по оси  $x$   
при  $y=0$ :  $9$  кар  $(x_2 - x_1) = 9$

т.е. во всем карате  $M = \left(\frac{80}{5} + 1\right) = 17$

$= 17 \cdot 9 = 153$  кар  $y$  сотор одит. знак.  
по оси  $y$  и выкат.  $y_1 \geq 0$  и  $y_2 - y_1 \geq 0$ ,  
повторяется

при  $y_2 - y_1 = 7$   $5(x_2 - x_1) = 44 = 2 \cdot 2 \cdot 11$  колл.  
должно делится  $(y_2 - y_1) : 5$ , т.е.

при  $\left. \begin{matrix} y_2 - y_1 = 5, & x_2 - x_1 = 8 \\ y_2 - y_1 = 10, & x_2 - x_1 = 9 \end{matrix} \right\} 9 \text{ случаев}$   
 $y_2 - y_1 = 45 \quad x_2 - x_1 = 0$

- I  $18 - 8 + 7 = 17$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $16$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $16 \cdot 17$  кар  $y$  сотор  $y_1 \geq 0$
- II  $18 - 7 + 7 = 18$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $8$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $12 \cdot 8$  кар  $y$  сотор  $y_1 \geq 0$
- III  $18 - 6 + 7 = 19$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $6$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $13 \cdot 6$  кар  $y$  сотор  $y_1 \geq 0$
- IV  $18 - 5 + 7 = 20$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $4$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $14 \cdot 4$  кар  $y$  сотор  $y_1 \geq 0$
- V  $18 - 4 + 7 = 21$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $3$  кар  $(y_2 - y_1)$   
итого  $15 \cdot 3$  кар  $y$  сотор  $y_1 \geq 0$
- VI  $18 - 3 + 7 = 22$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $2$  кар  $(y_2 - y_1)$
- VII  $18 - 2 + 7 = 23$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $1$  кар  $(y_2 - y_1)$
- VIII  $18 - 1 + 7 = 24$  кар  $(x_2 - x_1)$  и  $0$  кар  $(y_2 - y_1)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



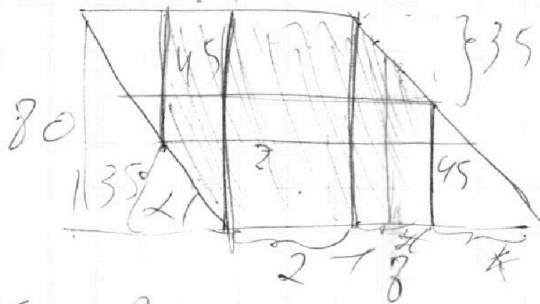
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

кредитовые

1X (ср.)



$$h/L = 5$$

$$y_2 - y_1 = 45$$

$$\frac{k}{k+t} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

$$k+t = \frac{80}{5} = 16$$

$$\frac{k+t}{k} = \frac{80}{45} = \frac{16}{9} \text{ (ср.)}$$

тогда  $k = 9 \Rightarrow t = 5$  тогда ср. 44 руб.

$$80 - 45 + 7 = 36 \text{ см. в сеч. } (y_2 - y_1) = 45$$

36 · 3; ~~так~~ расчет тр. (ср. сеч.)

при сеч. 45 + см при 46 - 2 см 80 36 см

$$\text{итого } \frac{7+36}{2} \cdot 36 = 37 \cdot 36 \text{ см } y \text{ сеч.}$$

$$\text{трапеция } \text{итого в } \text{X} \text{ см. } 37 \cdot 36 \cdot 2 + 36 \cdot 3 = 36 \cdot 40 \text{ метров.}$$

W - всего метров, тогда при  $(y_2 - y_1) \geq 0$

$$\frac{W}{2} \text{ метров } \frac{W}{2} = \frac{1}{2} (120 + 76 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 + 77 + 78 + 79 + 80 + 36 \cdot 40 + 702)$$

$$\frac{W}{2} = \frac{1}{2} (120 + 76 \cdot 2 + 72 \cdot 2 + 73 \cdot 2 + 74 \cdot 2 + 75 \cdot 2 + 76 \cdot 2 + 77 \cdot 2 + 78 \cdot 2 + 79 \cdot 2 + 80 \cdot 2 + 36 \cdot 40 + 702) = 2 \cdot 2163 = 4326$$

Ответ: 4326

$$\text{Ответ } W = 2(120 + 76 \cdot 2 + 72 \cdot 2 + 73 \cdot 2 + 74 \cdot 2 + 75 \cdot 2 + 76 \cdot 2 + 77 \cdot 2 + 78 \cdot 2 + 79 \cdot 2 + 80 \cdot 2 + 36 \cdot 40 + 702)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

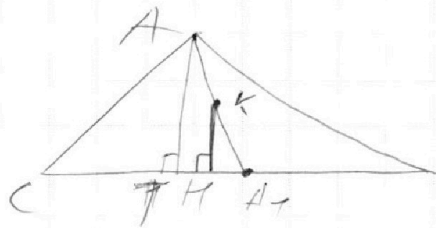
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Углы при вершине  $BC$   $12^\circ$  - значит  $\cos 12^\circ$   
тогда  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{kH}$ , где  $v=5$  - радиус сферы



$$SL = SN = 4 \text{ км} \text{ от } K \text{ к } S$$

проб. от  $T$  к  $T$  от  $S$

$$\text{Итого } AL = AS - SL = 16 - 4 =$$

$$= 12 = AK \Rightarrow KA_T = AA_T$$

$$- AK = 24 - 12 = 12, \text{ т. к.}$$

сер.  $AA_T$

Положим  $AT \perp BC$ , т. к.  $AT \perp BC$ ,  $KH \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow AT \parallel HK$ , т. к.  $K$  - сер.  $AA_T$  и  $AT \parallel HK$  - то

$HK$  - ср. линия  $\Rightarrow AT = 2HK$  или  $HK = \frac{AT}{2}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AT \cdot BC = \frac{1}{2} AT \cdot 16 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AT = \frac{25}{2} \Rightarrow HK = \frac{AT}{2} = \frac{25}{4}$$

$$\text{Тогда } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{v}{HK} = \frac{5 \cdot 4}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 2 \arcsin \frac{4}{5}$$

Ответ:  $AA_T, BB_T, CC_T = 3600$ ;  $\alpha = 2 \arcsin \frac{4}{5}$

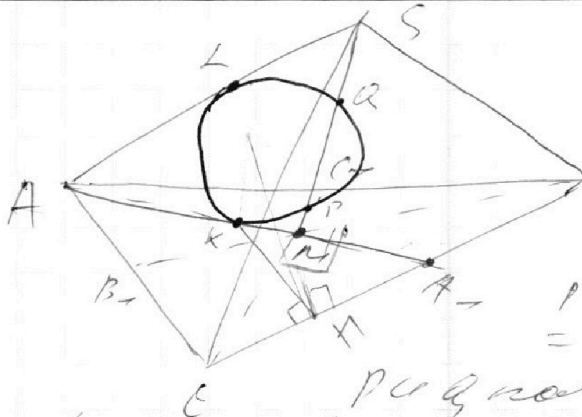
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



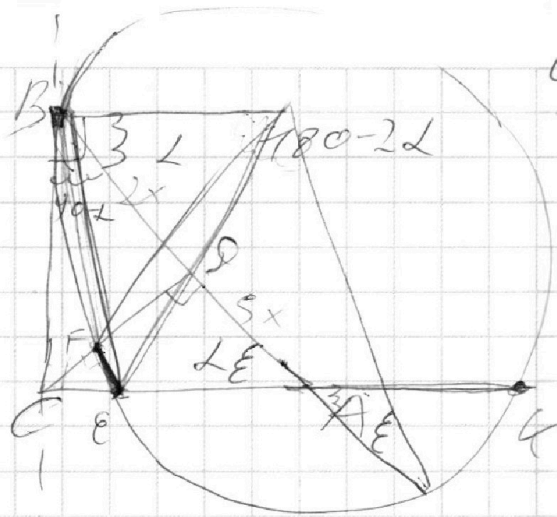
Пусть  $MP = x$ , тогда  $PQ = r - x \Rightarrow SQ = r - (r - x) = x = MP$ , следовательно  $PQ \perp AC$  по теореме Пифагора, то  $MP \perp AC$ .

тогда  $MP \perp AC$  и  $MP \perp BC$ , то  $MP \perp ABC$ .  
 $SL^2 = SQ \cdot SP = x(r - x) = MP^2 \Rightarrow ML = SL$  (т.к.  $MP \perp AC$ )  
 $AL = AK$  по теореме о биссектрисе  $AK$  в  $\triangle ABC$ .  
 тогда  $AM = AK + MK = AL + SL = AS = BC = TB$   
 По теореме Пифагора  $\frac{AM}{TA} = \frac{2}{7} \Rightarrow MA = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$   
 $CA = AB$  (т.к.  $AA_1$  - высота) и  $CA = AB = BC = \frac{14 - 8}{2} = 3$

тогда  $\triangle ABC$  равнобедренный,  $\angle BMC = 90^\circ$   
 Пусть  $MC = 24$ ,  $MB = 2x$ , тогда по в. теореме  $MC^2 = MB^2 + BC^2$   
 $24^2 = (2x)^2 + 3^2 \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$   
 $S_{ABC} = 100$  по в. теореме  $S_{BMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{100}{3}$   
 $= \frac{1}{2} MB \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 24 \Rightarrow 2x \cdot 24 = \frac{100}{3} \Rightarrow xy = \frac{50}{3}$

$\Rightarrow 24 \cdot \frac{50}{3} = 4250 = 3600$

Пусть  $KH \perp BC$ , т.к.  $K$  - центр описанной окружности  $\triangle ABC$ , то  $KH$  - высота  $\triangle ABC$ .  
 Пусть  $O$  - центр описанной окружности  $\triangle ABC$ ,  $OH \perp BC$ .  
 $KH \perp BC$ ,  $KH$  - высота  $\triangle ABC$ ,  $OK \perp BC$  - радиус описанной окружности  $\triangle ABC$ .  
 $\Rightarrow KO \perp BC$  - высота  $\triangle OKC$ ,  $\Rightarrow KO \perp BC$  - высота  $\triangle OKC$ .  
 Рассмотрим  $\triangle OKC$ , где  $\angle OKC = 90^\circ$ , где  $K$  - центр описанной окружности  $\triangle ABC$ .



$$CFE \sim BCE$$

$$\frac{FE}{CE} = \frac{BE}{CE}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (DAB)}$$

$$\sum_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{CFE} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CA}{CE}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CA}{CE} = \frac{AB}{EF}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AB}{EF}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AB}{EF}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AB}{EF}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AB}{EF}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{AB}{EF}$$

$$CE \cdot CK$$

$$\frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) = \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn)$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn)$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn)$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn)$$

$$z = mn$$

$$m+n = a$$

$$\frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn)$$

$$\frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn)$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn)$$

$$= \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn) + \frac{1}{2} (m^2 + n^2 - 2mn)$$

$$0 = \frac{z^2}{4} + \frac{z}{m} - \frac{z}{n} - \frac{z}{m} + \frac{z}{n} - \frac{z}{m} + \frac{z}{n}$$

$$0 = z^2 + m^2 z + n^2 z - m^2 z + m^2 z - n^2 z + n^2 z$$

$$(m+n)(m^2 + n^2 + mn) + (m-n)(m^2 + n^2 - mn)$$

$$m^2(m+n) + n^2(m+n) + m^2(m-n) - mn(m-n)$$

$$0 = (m+n)(m^2 + n^2 + mn) + (m-n)(m^2 + n^2 - mn)$$

На одной странице можно оформить только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7



МФТИ

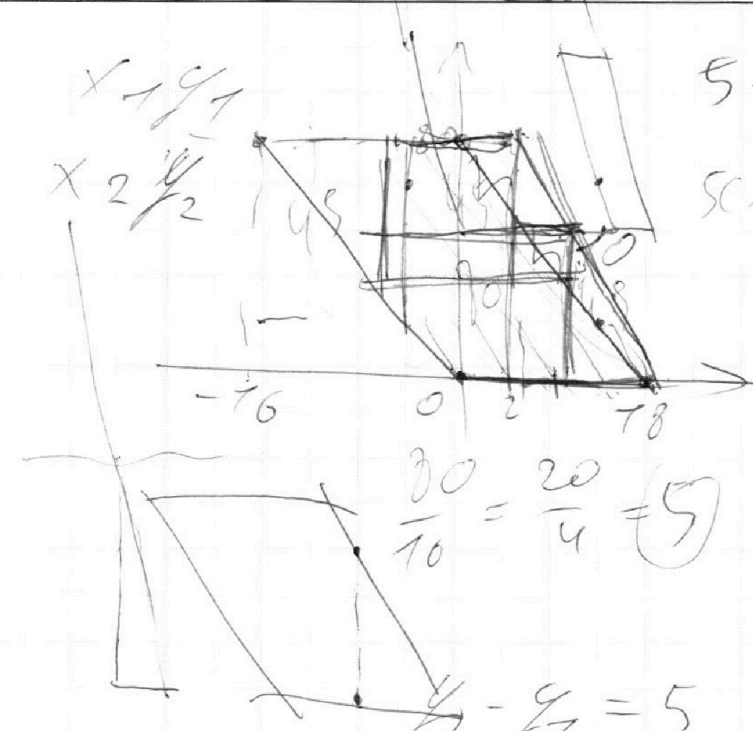
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

~~$$x_2 - x_1 \leq 9$$~~

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$4 \cdot 11$$

$$4 \cdot 43$$

$$3 \cdot 42$$

$$2 \cdot 2$$

$$x_2 - x_1 = 8$$

$$x_2 - x_1 = 4$$

$$x_2 - x_1 = 0$$

$$\frac{5}{2} = 2$$

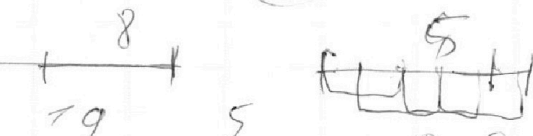
000000

9

$$5 - 3 = 2$$

$$78 - 9$$

15



000000

0000000000

30	380
	380
	380

$$80/15 = 6$$

$$80/25$$

$$\frac{44}{5} = 8.8$$

$$2 \cdot 2 = 2 \cdot 2$$

33  
82  
33

Handwritten scribbles and circled numbers: 9, 15, 145, 140.

9 + 0 + 0 + 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1      2      3      4      5      6      7
- 



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 227 \\
 96 \\
 \hline
 333 \\
 643 \\
 323 \\
 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4326 \\
 2 \\
 \hline
 2763 \\
 8723 \\
 0447 \\
 782 \\
 207 \\
 457 \\
 54 \\
 734
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 943 \\
 957 \\
 037 \\
 734 \\
 56 \\
 837
 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{то как } \sin(\cos x) = \sqrt{e} - 2x$$

$$\cos x = 2 \in [-0, 2]$$

$$\cos 2 = x \in [-\pi, \pi]$$

$$\sin x = \sqrt{1 - 2^2}$$

$$\sin 2 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\arcsin 2 = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{то } \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{e} - 2x$$

$$100(1 - x^2) = 7^2 - 49x + 4x^2$$

$$104x^2 - 49x + 9^2 - 100 = 0$$

$\Delta = 49^2 - 4(104 - 100) \cdot 109 =$

$$= 49^2 - 4 \cdot 4 \cdot 109 = 49^2 - 1744 = 2401 - 1744 = 657$$

$$x = \frac{49 \pm \sqrt{657}}{208}$$

$$\sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\sin 2 = 6 \quad \sin 2 = \cos x$$

$$\arcsin 6 = 2$$

$$\cos x = \sqrt{1 - 6^2} = \sqrt{1 - 36} = \sqrt{-35}$$

$$6^2 + 2^2 = 40$$

$$1 - 81x^2 = 36x^2 - 1$$

$$1 - 81x^2 - 36x^2 + 1 = 0$$

$$ax - 3y + 4b = 0$$

$$(x^2 + y^2 - 1) \vee (x^2 + y^2 - 209 + 64) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 209 + 64 = 0$$

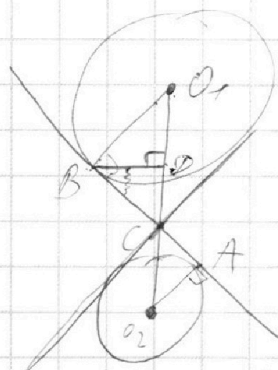
$$x^2 + (y - 10)^2 = 36$$

$$y = \frac{ax + 4b}{3}$$

Упр. упрел.

$$O_1 B D \sim O_1 C B$$

$$\frac{6}{60} = \frac{BD}{BC} = \frac{O_1 D}{O_1 B}$$



$$O_1 B C \sim O_2 A C$$

$$\frac{6}{7} = \frac{O_1 C}{O_2 B}$$

$$O_1 C = O_2 \cdot 6$$

$$O_1 C + O_2 C = 10$$

$$O_2 C + 6O_2 C = 10$$

$$O_2 C = \frac{10}{7}$$

$$b = \frac{75}{14}$$

$$\frac{46}{3} = \frac{10}{4}$$

$$O_1 C = \frac{60}{7}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a \cdot b : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{72}$ ,  $b \cdot c : 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{72}$ ,  $a \cdot c : 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$   
 $abc = ?$

~~$a : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{72}$~~   
 ~~$b : 2^{12} \cdot 3^{26} \cdot 5^{72}$~~   
 ~~$c : 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{39}$~~

$c : 3^{27-x}$      $b : 3^{20-27+x} = 3^{x-7}$

$a : 3^{15-x}$      $75-x = x$

$x = \frac{75}{2}$      $x = 8$

$b : 3^7$

$c : 3^{13}$

$b : 3^6$

$c : 3^{14}$

$a : 5^x$

$c : 5^{24-x}$

$a : 3^8$      $b : 3^6$      $c : 3^{14}$

$b : 5^{12-x}$

$c : 5^{13-34+x}$

$12-x = x-22$

$34 = 2x$      $x = 17$

$a : 5^{15}$      $c : 5^{22}$

$a : 2^x$

$b : 2^{8-x}$

$c : 2^{12-8+x}$

$c : 2^{14-x}$

$4+x = 14-x$

$2x = 10$      $x = 5$

$a : 2^5$      $b : 2^3$      $c : 2^9$

Тогда  $abc = 3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot 5^{22} \cdot 2^5 \cdot 2^3$

$AC = 3^8 \cdot 5^{15} \cdot 2^5$

$\frac{AC}{BC} = \frac{3^8 \cdot 5^{15} \cdot 2^5}{3^6 \cdot 5^{22} \cdot 2^3} = \frac{3^2 \cdot 5^{-7} \cdot 2^2}{1} = \frac{18}{125}$

$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3^8 \cdot 5^{15} \cdot 2^5}{3^8 \cdot 3^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{15} \cdot 5^{22} \cdot 2^5 \cdot 2^3} = \frac{1}{3^6 \cdot 5^{22} \cdot 2^3}$

$\frac{AC}{BC} = \frac{18}{125}$

$\frac{AC}{BC} = \frac{18}{125}$

$\frac{AC}{BC} = \frac{18}{125}$

$\frac{AC}{BC} = \frac{18}{125}$





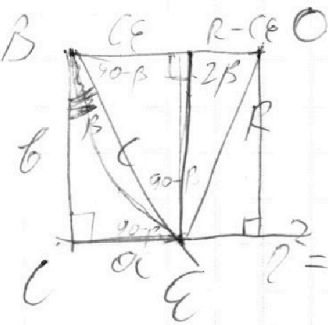
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin 2\beta = \frac{b}{R} = 2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c}$$

$$2aR = c^2$$

$$R = \frac{c^2}{2a}$$

$$R^2 = b^2 + R^2 - 2R \cdot a + a^2$$

$$25x^2 + 100x^2 = \sqrt{725x^2}$$

$$25 + 100 = \sqrt{725} \cdot x$$

$$R = \frac{49x^2}{2\sqrt{725x^2}} = \frac{49x}{10\sqrt{5}} = 25.5$$

$$c = 25x$$

$$R = \frac{2c}{3\sqrt{5}} = 25.5$$

$$R^2 - 2R(c + c^2 + R^2) = 2$$

$$R = \frac{49}{50} \sqrt{5} \cdot x \quad AC = 5\sqrt{5} \cdot x$$

$$24x^2 + \frac{4}{9}FE^2 = 2 \cdot \frac{25}{3}FE \cdot R$$

$$\frac{2c}{3\sqrt{5}} = 25.5 \Rightarrow c = 25.5 \cdot 3\sqrt{5}$$

$$\cos \gamma = \frac{FE}{R} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \gamma = \frac{FE}{R} = \frac{3}{5} \Rightarrow FE = \frac{3}{5}R$$

$$\frac{BC}{R} = \cos \beta$$

$$\frac{3a}{c} = \sin \beta = 2\beta \Rightarrow B = 3\beta$$

$$FE = 2R \cdot \sin(\frac{\beta}{2}) = 3a$$

$$R^2 = 4x^2 + 20x^2 = 24x^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{6}x$$

$$BOF = 2\alpha$$

$$\angle BOE = 2\beta$$

$$\angle CBE = \beta$$

$$\angle FBE = \angle CBE - \angle CBF$$

$$\frac{FE}{2R} = \frac{3a}{2\sqrt{6}x} = \frac{3 \cdot 25.5 \cdot 3\sqrt{5}}{2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 25.5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

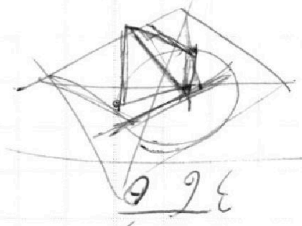
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



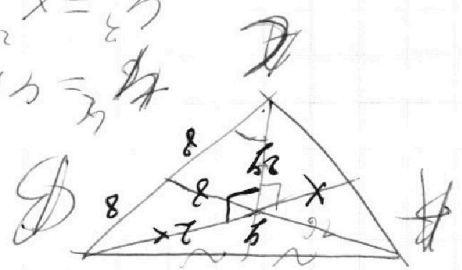
- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



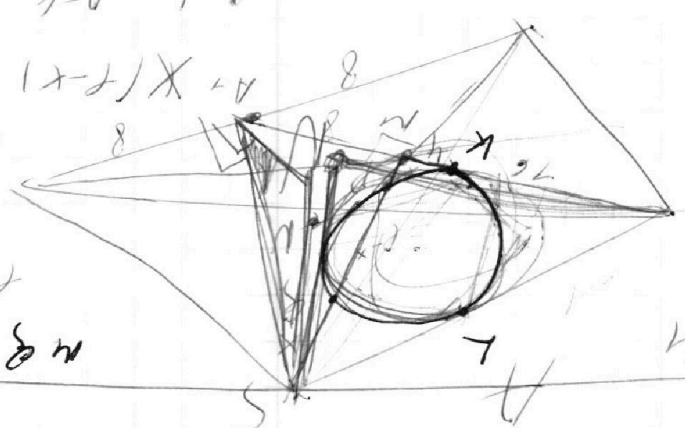
$$\begin{aligned} 4^2 + x^2 &= 4^2 \\ 4^2 + 4x + 4x^2 &= 4^2 \end{aligned}$$



$3 \times 3929$

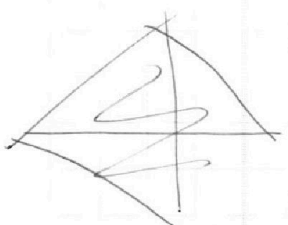
$$\begin{aligned} AS &= AK + LS = AK + AK = AK \\ AL &= AK \end{aligned}$$

$$2 \times 4 = 8 = 5L^2 = 4x^2$$



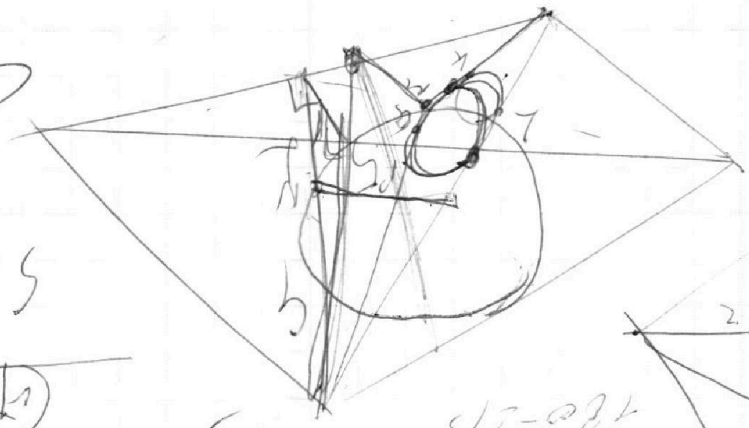
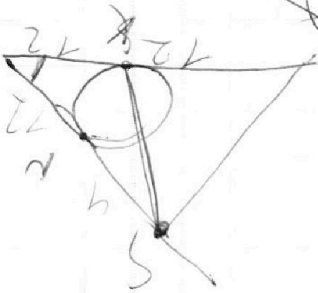
$$AL = 24$$

$$m \cdot 8 = 5 \cdot p = r$$



$$5L = 4$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot 4$$



$$180 - 213$$

$$180 - 90 - 213$$

$$90 < B$$

$$\frac{FE}{CE} = \frac{BC}{CE}$$

$$CE = \frac{2}{3} FE$$

$$CFE \sim BFC$$