



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-16;80)$ ,  $Q(2;80)$  и  $R(18;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1)  $a_1, b_1, c_1$  - степени двоек в разложении числа  $a, b, c$  на простые  
 $a_2, b_2, c_2$  - степени троек,  $a_3, b_3, c_3$  - степени пятёрок  
 ~~$a_1 + b_1 = 8$~~

$$\begin{cases} a_1 b_1 = k_1 \cdot 2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^{12} \\ b_1 c_1 = k_2 \cdot 2^{22} \cdot 3^{20} \cdot 5^{18} \\ a_1 c_1 = k_3 \cdot 2^{24} \cdot 3^{27} \cdot 5^{19} \end{cases} \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$a_1^2 b_1^2 c_1^2 = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$$

$$a_1 b_1 c_1 = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{34} \sqrt{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 3}$$

чем меньше  $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3$  - тем меньше  $a_1 b_1 c_1$   
 аналогично. Аналогично  $a_2, b_2, c_2 \dots$  обозначим  $k_{12}, k_{22}, k_{32} \dots$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = k_{12} + 8 \\ b_2 + c_2 = k_{22} + 12 \\ a_2 + c_2 = k_{32} + 14 \end{cases} \quad \text{система имеет решение при } k_{12} = k_{22} = k_{32} = 0$$

$a_2 = 5, b_2 = 3, c_2 = 9$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = k_{13} + 14 \\ b_3 + c_3 = k_{23} + 20 \\ a_3 + c_3 = k_{33} + 21 \end{cases} \quad a_3 - b_3 = k_{13} - k_{23} + 1$$

что все делится возмем  $k_{33} = 1$   
и ост. = 0

$$\begin{cases} a_3 = 8 \\ c_3 = 14 \\ b_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3 = 8 \\ b_3 = 6 \\ c_3 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 = k_{15} + 22 \\ b_5 + c_5 = k_{25} + 17 \\ a_5 + c_5 = k_{35} + 19 \end{cases} \quad a_5 - b_5 = 22 + k_{35} - k_{15}$$

$$a_5 + b_5 = 22 + k_{15}$$

$$2b_5 = -10 + k_{15} + k_{25} - k_{35}$$

$k_{15} = 10, \text{ ост} = 0$

$$\begin{cases} b_5 = 0 \\ a_5 = 22 \\ c_5 = 17 \end{cases}$$

~~$a$~~  = Какое либо  ~~$a$~~  числа не являются степенями 2, 3, 5 приведут к увелич. произв.  $\Rightarrow$  их нет в мин. комбинации

$$\begin{cases} a = 2^5 \cdot 3^9 \cdot 5^{22} \\ b = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^0 \\ c = 2^9 \cdot 3^{11} \cdot 5^{17} \end{cases} \Rightarrow a b c = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} 10 \arcsin(\cos(\lambda)) &= \pi - 2x \\ 10 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \pi - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin(t) \quad (t \in [-1, 1]) &\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \downarrow \\ 10 \arcsin(t) &\in [-5\pi; 5\pi] \\ \pi - 2x &\in [-5\pi; 5\pi] \\ x &\in [-2\pi; 3\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad x &\in [-2\pi; -\pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \frac{\pi}{2} - \lambda - \pi \\ 5\pi - 10x - 20\pi &= \pi - 2x \\ 8x &= -26\pi \\ x &= -2\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x &\in [-\pi; 0] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \pi - (\frac{\pi}{2} - \lambda) \\ 10\pi - 5\pi + 10x &= \pi - 2x \\ 12x &= -4\pi \\ x &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad x &\in [0; \pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \frac{\pi}{2} - \lambda \\ 5\pi - 10x &= \pi - 2x \\ 8x &= 4\pi \\ x &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \lambda &\in [\pi; 2\pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= -\pi - (\frac{\pi}{2} - \lambda) \\ -10\pi - 5\pi + 10\lambda &= \pi - 2x \\ 12x &= 16\pi \\ x &= \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad x &\in [2\pi; 3\pi] \\ \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \lambda)) &= \frac{\pi}{2} - \lambda + 2\pi \\ 5\pi - 10x + 20\pi &= \pi - 2x \\ 8x &= 24\pi \\ x &= 3\pi \end{aligned}$$

Ответ:  $x = -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$1) \frac{-\sqrt{a^2+9}}{4} \geq \frac{3\sqrt{a^2+9}+15}{2}$$

$$7\sqrt{a^2+9} + 30 \geq 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$2) \frac{\sqrt{a^2+9}}{4} \leq \frac{-3\sqrt{a^2+9}+15}{2}$$

$$7\sqrt{a^2+9} \leq 30$$

$$\sqrt{a^2+9} \leq \frac{30}{7}$$

$$a^2 \leq \frac{30^2}{7^2} - 3^2$$

$$a^2 \leq \frac{9}{7} \cdot \frac{11}{7}$$

$$-\frac{3\sqrt{11}}{7} \leq a \leq \frac{3\sqrt{11}}{7}$$

1 & 2  $\Rightarrow a \in \left[-\frac{3\sqrt{11}}{7}; \frac{3\sqrt{11}}{7}\right]$  - мы не можем  
найти  $b$  для  $\epsilon$  рещ.

$$a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{11}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{11}}{7}; +\infty\right) - \text{можн.}$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{11}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{11}}{7}; +\infty\right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{ax + 4b}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

Графики этих функций - окружности, кото-  
рые не пересекаются, т.к. расстояние  
между центрами = 10, а сумма радиусов 7

⇓  
что бы было и реш нужно, что бы  
D обоих урав при подстановке y было > 0

$$1) x^2 + \left(\frac{ax + 4b}{3}\right)^2 - 1 = 0$$

$$9x^2 + a^2x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$a^2x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$D_1/4 = a^2 - (a^2 + 9)(b^2 - 9) = 9a^2 + 81 - 9b^2$$

$$D_2/4 = 16a^2b^2 - (a^2 + 9)(16b^2 - 9) = 9a^2 + 81 - 9 \cdot 16b^2 > 0$$

$$\frac{9a^2 + 9^2}{9} > 16b^2$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + 9}}{3} < b < \frac{\sqrt{a^2 + 9^2}}{3}$$

$$2) x^2 + \left(\frac{ax + 4b - 30}{3}\right)^2 - 6^2 = 0$$

$$9x^2 + a^2x^2 - 2ax(4b - 30) + (4b - 30)^2 - 18^2 = 0$$

$$D_1/4 = a^2 - (a^2 + 9)((4b - 30)^2 - 18^2) =$$

$$= a^2 \cdot 18^2 + 9(4b - 30)^2 + 9 \cdot 18^2 > 0$$

$$6^2 a^2 - (4b - 30)^2 + 18^2 > 0$$

$$9a^2 + 9^2 > (2b - 15)^2$$

$$\frac{3\sqrt{a^2 + 9}}{3} < 2b - 15 < 3\sqrt{a^2 + 9}$$

$$\frac{-3\sqrt{a^2 + 9} + 15}{2} < b < \frac{3\sqrt{a^2 + 9} + 15}{2}$$

Рассмотрим случай когда  
условия от D<sup>1</sup> и D<sup>2</sup> не пересекаются.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Решение: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_5^9(2x) - 3 \log_5^3(2x) - \log_5 x^3(625) + 3 = 0$$

$$\log_5^9(2x) - \frac{\log_5^3(2x)}{3} - \frac{1}{3} \log_5^3(2x) + 3 = 0$$

$$3 \log_5^9(2x) - 2 \log_5^3(2x) + 9 = 0$$

$$\log_5^9(4) + 4 \log_5^3(4) - \log_5^3(0,2) + 3 = 0$$

$$\log_5^9(4) + \frac{1}{\log_5(4)} + \frac{1}{3 \log_5(4)} + 3 = 0$$

$$3 \log_5^9(4) + \frac{1}{\log_5(4)} + 3 + 9 \log_5^3(4) = 0$$

монотонно

$$3 \log_5^9(2x) + 3 \log_5^9(4) + 9 (\log_5^3(2x) + \log_5^3(4)) = 0$$

$$(\log_5(2x) + \log_5(4)) (\log_5^9(2x) - \log_5^3(2x) \cdot \log_5^3(4) + \log_5^2(2x) \cdot \log_5^2(4) + \dots - \log_5^3(2x) \log_5^3(4) + \log_5^4(4) + 3) = 0$$

$$\begin{cases} \log_5(2x) + \log_5(4) = 0 \rightarrow \log_5(2x4) = 0 \Rightarrow 2x4 = 1 \Rightarrow x4 = \frac{1}{2} \\ \log_5^9(2x) - \dots + \log_5^9(4) + 3 = 0 \rightarrow \text{нет решения} \end{cases}$$

т.к. всегда больше 0

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

~~лог~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$(y_2 - y_1) : 5$$

$$y_2 - y_1 = 5k$$

$$-80 \leq y_2 - y_1 \leq 80$$

$$-16 \leq k \leq 16$$

$$x_2 - x_1 + k = 9$$

$$x_2 - x_1 = 9 - k$$

Если  $y_1 : 5$ , то мы хотим решить задачу  
для парал. с осью  $O'(0,0)$ ,  $R'(28,0)$ ,  $P'(-16,16)$ ,  
 $Q'(2,16)$ .

т. е.  $y_2 : 5$  и  $\frac{80}{5} = 16$

и урав  $x_2 - x_1 + k = 9$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ax^2 + a^2x + 2a(4b-30)/x + (4b-30)^2 - 324 = 0$$

$$\dots (4b-48)/(4b-12) = 0$$

$$D_{1/4} = a^2(16b^2 - 240b + 500) - (9+a^2)((4b-30)^2 - 324) =$$

$$D_{1/4} = a^2(4b-70)^2 - (9+a^2)((4b-30)^2 - 324) =$$

$$= -9(4b-30)^2 + 9 \cdot 324 + 324a^2 > 0$$

$$9x^2 + (2x+16)^2 - 9 = 0$$

$$(9+a^2)x^2 + 8abx + 16b^2 - 9 = 0$$

$$D_{1/4} = a^2 \cdot 16b^2 - (9+a^2)(16b^2 - 9) =$$

$$= -9 - 16b^2 + 81 + 9a^2 > 0 \Rightarrow -16b^2 + 9 + a^2 > 0$$

$$a^2 + 9 > 16b^2$$

$$D_{1/4} = a^2(4b-30)^2 - (9+a^2)((4b-30)^2 - 324) =$$

$$= -9(4b-30)^2 + 324 \cdot 9 + 324a^2 =$$

$$= -(4b-30)^2 + 324 + 36a^2 = -16b^2 + 240b + 500 + 324 + 36a^2 > 0$$

$$-(2b-15)^2 + 81 + 9a^2 > 0$$

$$a^2 + 9 > \frac{(2b-15)^2}{9}$$

$$16b^2 < a^2 + 9$$

$$\begin{cases} b^2 < \frac{a^2 + 9}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2b-15)^2 < 9a^2 + 81 \end{cases}$$

$$-3\sqrt{a^2+9} < 2b-15 < 3\sqrt{a^2+9}$$

$$-\frac{\sqrt{a^2+9}}{4} < b < \frac{\sqrt{a^2+9}}{4}$$

$$\frac{-3\sqrt{a^2+9} + 15}{2} < b < \frac{3\sqrt{a^2+9} + 15}{2}$$

$$\frac{-3\sqrt{a^2+9} + 15}{2} \geq 3\frac{\sqrt{a^2+9}}{4}$$

$$30 \geq 7\sqrt{a^2+9}$$

$$\frac{900}{49} \geq a^2 + 9$$

$$\frac{900 - 441}{49} \geq a^2$$



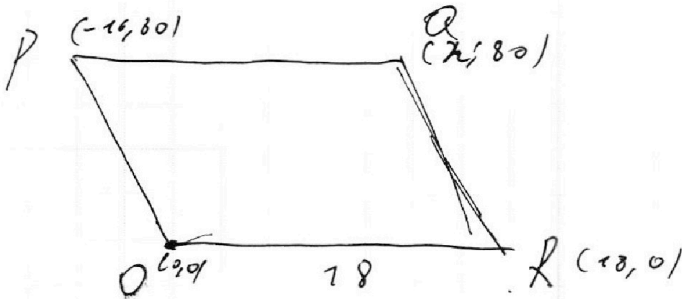
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5x_2^2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$$

$$16^2 + 80^2 = (-16 + 80)^2 - 2 \cdot (-16) \cdot 80 = 96^2 - 2560$$

$$(x_2 - x_1)_{\max} = 34$$

$$x_1 = y_1 = 0$$

$$5x_2 + y_2 = 45$$

$$y_2 = 45 - 5x_2$$

$$y_2 \geq 0 \quad x_2 \leq 9$$

$$y = \frac{ax + b}{3} = \frac{ax + b}{3} + d$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{a^2 x^2}{9} + \frac{2}{3} ax + d + d^2 = 0$$

$$9x^2 + a^2 x^2 + 8ax + 16b^2 = 0$$

$$9x^2 + (ax + b - 30)^2 - 324$$

$$(9 + a^2)x^2 + 8ax + 16b^2 = 0$$

$$9x^2 + a^2 x^2 + 2(ax - 30) + (b - 30)^2 - 324$$

$$\begin{aligned} D/4 &= 16a^2 b^2 - (16b^2)(9 + a^2) = 16a^2 b^2 - 16ba^2 - 144b^2 + 87 + 9a^2 \\ &= 9a^2 + 87 - 144b^2 > 0 \end{aligned}$$

$$x + \frac{(ax + b - 30)^2}{9} = 36$$

$$9x^2 + (a^2 x^2 + 16b^2 + 900 - 60ax - 240b + 8ax + b) = 324$$

$$20^2 - 18^2 =$$

$$= 400 - 324 =$$

$$= 76 =$$

$$48 - 12 = 24^2$$

$$(9 + a^2)x^2 + (8a - 60)x + 16b^2 - 240b + 976 = 0$$

$$D/4 = 16a^2 b^2 - 240ab + 1800^2 - 16a^2 b^2 + 2210ab + 24^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 - \frac{3}{a} - \frac{4}{x} + 3 = 0$$

$$a^4 - \frac{13}{3a} + 3 = 0 \quad b^4 + \frac{13}{3b} + 3 = 0$$

$$\cancel{a^4 - b^4} \quad a^4 - b^4 - \frac{13}{3a} - \frac{13}{3b} = 0$$

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3} \left( \frac{a+b}{ab} \right) = 0$$

$$(a+b) \left( (a-b)(a^2+b^2) - \frac{13}{3ab} \right) = 0$$

$$\cancel{3a^4 + 9a - 13} = \cancel{3b^4 + 9b + 13} = 0$$

$$a^4 + b^4 + 9a + 9b = 0$$

$$(a+b) \left( a^4 - ab^3 + a^2b^2 - a^3b + b^4 + 9 \right) = 0$$

$$a = -b$$

$$a^4 - ab^3 + a^2b^2 - a^3b + b^4 + 9 > 0$$

$$\log_5(2x) = -\log_5(4)$$

$$\log_5(2x4) = 0$$

$$x4 = \frac{1}{2}$$

$$a^4 + b^4 - ab(b^2 + a^2) + a^2b^2 + 9 = 0$$

$$\frac{(a^2 - b^2 - ab)(a^2 + b^2) + a^2b^2}{(a^2 + b^2)^2 + 2a^2b^2 - ab((a+b)^2 - ab) - ab(b^2 + a^2)}$$

$$(a^2 + b^2)^2 + 2a^2b^2 - ab((a+b)^2 - ab) - ab(b^2 + a^2)$$

$$-ab(b^2 + a^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$$y_2 - y_1 = 5$$

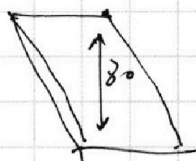
$$(y_2 - y_1) = 5 \left( \cancel{x_2} \rightarrow x_1 \quad 9 - x_2 + x_1 \right)$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 5k \quad 0 \leq k \leq 76$$

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1) + 5k = 45$$

$$x_2 - x_1 + k = 9$$

$$x_2 - x_1 \geq 9$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 ab &= k_1 \cdot 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \\
 bc &= k_2 \cdot 2^{22} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17} \\
 ac &= k_3 \cdot 2^{24} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}
 \end{aligned}$$

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot 2^{34} \cdot 3^{51} \cdot 5^{68} = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$$

$$abc = 2^{17} \cdot 3^{27} \cdot 5^{31} \cdot \sqrt{3k_1 k_2 k_3}$$

$$abc = \sqrt{3k_1 k_2 k_3} \cdot \min = 3$$

$$\begin{aligned}
 a &= 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot k_1 \\
 b &= 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \\
 c &=
 \end{aligned}$$

$$abc = 2^{12} \cdot 3^{27} \cdot 5^{35}$$

$$\begin{cases}
 a_2 + b_2 = 2^8 \\
 b_2 + c_2 = 2^{22} \\
 a_2 + c_2 = 2^{24}
 \end{cases}$$

$$a_2 - b_2 = 14 - 12 = 2$$

$$a_2 + b_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9$$

$$\begin{aligned}
 a_3 + b_3 &= 14 \\
 a_3 + c_3 &= 20 \\
 a_3 + c_3 &= 22
 \end{aligned}$$

$$a_3 - b_3 = 2 \quad a_3 = 8 \quad b_3 = 6 \quad c_3 = 14$$

$$\begin{aligned}
 a_5 + b_5 &= 12 \\
 a_5 + c_5 &= 17 \\
 a_5 + c_5 &= 39
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_5 &= -5 \\
 a_5 - b_5 &= 22 \\
 a_5 + b_5 &= 12 \quad a_5 + b_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 a_5 + b_5 = 12 + x_5 \\
 b_5 + c_5 = 17 + y_5 \\
 a_5 + c_5 = 39 + z_5
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 a_5 - b_5 &= 22 + 2x_5 - y_5 \\
 a_5 + b_5 &= 12 + x_5 \\
 a_5 &= 12 + \frac{x_5 + 2z_5 - y_5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 a_2 + b_2 = 8 \\
 b_2 + c_2 = 22 \\
 a_2 + c_2 = 24
 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 5 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = 9$$

$$\begin{cases}
 a_3 + b_3 = 14 \\
 b_3 + c_3 = 20 \\
 a_3 + c_3 = 21 \rightarrow 2z_5
 \end{cases} \Rightarrow a_3 - b_3 = 1 \Rightarrow 2a_3 = 15 \quad 15 \neq 2$$

$$\Rightarrow a_3 - b_3 = 2 \quad a_3 = 8 \quad b_3 = 6 \quad c_3 = 14$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



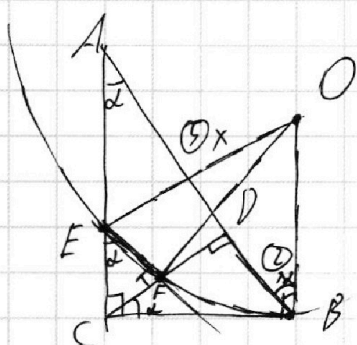
$$10 \arcsin(\cos(x)) = \pi - 2x$$

$$10 \cdot \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \pi - 2x \quad \arcsin \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{20\pi}{2} - 20x = \pi - 2x$$

$$8x = \frac{19\pi}{2}$$

$$x = \frac{19\pi}{16}$$



$$AB \parallel EF$$

$$CD^2 = 5x \cdot 2x = 10x$$

$$CD = x\sqrt{10}$$

$$AD : DB = 5 : 2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = ?$$

$$S_{CEF} = \frac{EF \cdot CF}{2}$$

$$\frac{EF}{AD} = \frac{CF}{CD} = k$$

$$S_{ACD} = \frac{AD \cdot CD}{2} = \frac{EF \cdot CF}{2k^2}$$

$$a = x_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4$$

$$x_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_4 \begin{cases} a_2 + b_2 = 8 + x_2 \\ a_2 + c_2 = 12 + 2x_2 \\ b_2 + c_2 = 12 + 4x_2 \end{cases}$$

$$a_2 - b_2 = 2 + 4x_2 - 8 - x_2 = -6 + 3x_2$$

$$a_2 = 3 + \frac{x_2 - 4x_2 + 2x_2}{2}$$

$$a_2 = 3$$

$$b_2 = 8 + x_2 - 5 = 3 + x_2$$

$$c_2 = 12 + 4x_2 - 3 - x_2 = 9 + 3x_2$$

$$10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$x \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k] \quad 10 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 10\left(\frac{\pi}{2} - x - 2\pi k\right)$$

$$5\pi - 20x - 20\pi k = \pi - 2x$$

$$2x = 5\pi - 20\pi k$$

$$x = \frac{5\pi}{8} - \frac{5}{2}\pi k$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} a_5 + b_5 = 22 \\ b_5 + c_5 = 17 \\ a_5 + c_5 = 39 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_5 - b_5 &= 22 & a_5 + b_5 &= 22 \\ a_5 + b_5 &\geq a_5 - b_5 & \Rightarrow & -20 \geq 0 \end{aligned}$$

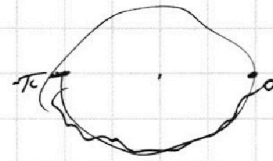
$$\frac{\pi}{2} - 2x \in \left[ \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} a_5 + b_5 &= 22 \\ b_5 + c_5 &= 17 \\ a_5 + c_5 &= 39 \end{aligned}$$

$$a_5 = 22; b_5 = 0; c_5 = 17$$

$$\begin{aligned} a &= 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 22 \\ b &= 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 0 \\ c &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \end{aligned}$$

$$abc = 2 \cdot 3 \cdot 5$$



$$\left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\sqrt{3} \quad 20 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \pi - 2x$$

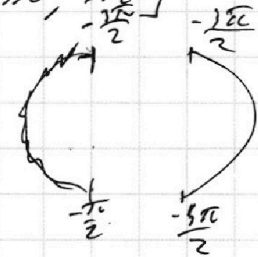
$$\arcsin \in \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow 20 \cdot \arcsin \in \left[ -5\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$$

$$-2\pi \leq x \leq 3\pi$$

$$\sin(20 \arcsin(\cos(x))) = \sin(\pi - 2x) = \sin(2x)$$



$$\sin(\dots) - \sin(2x) = 0$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) =$$

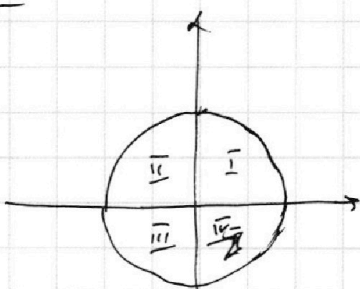
$$= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) -$$

$$2 \cos\left(\frac{20 \arcsin(\cos(x)) + 2x}{2}\right) \sin(\dots) = 0 - (\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)) =$$

$$20 \arcsin(\cos(x)) + x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$= 2 \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$20 \arcsin(\cos(x)) - x = \pi k$$



$$1) x \in I \quad \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$1) x \in [-2\pi; -\pi]$$

$$\frac{\pi}{2} - x \in \left[ \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]$$

$$20 \left( \frac{\pi}{2} - x - 2\pi \right) = \pi - 2x$$

$$+ 25\pi - 20x = \pi - 2x$$

$$x = 20\pi$$

$$2x = 2\pi$$

$$x = \pi$$



$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{\pi}{2} - x - 2\pi$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

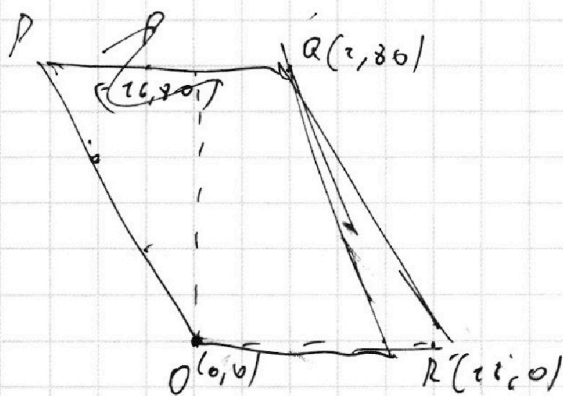
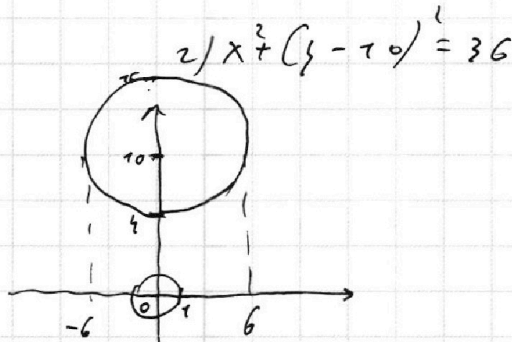
$$\begin{cases} 2x - 3y + 46 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 100) = 0 \end{cases} \quad \text{2 река.}$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 100 - 36$$

$$x^2 + (y - 10)^2 - 36$$

1)  $x^2 + y^2 = 36$

$$y = \frac{2x + 46}{3}$$



$$5x_2 + y_2 - 5x_1 - y_1 - 95 = 0$$

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 95$$

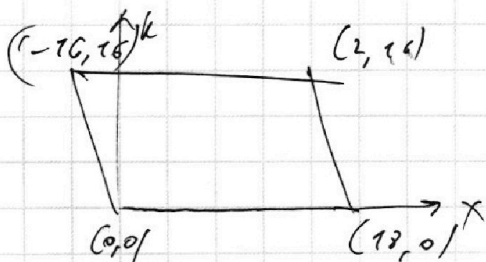
1)  $y_2 \geq y_1$        $y_2 - y_1 \geq 5$

$$x_2 - x_1 \leq 9$$

$$|x_2 - x_1|$$

$$y_2 - y_1 = 5k$$

$$-16 \leq k \leq 16$$



$$x_2 - x_1 + k = 5$$

$$-6 \leq x_2 - x_1 \leq 5$$

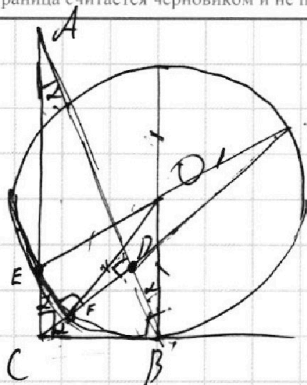
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 AD &= 5x \\
 DB &= 2x \\
 CD &= x\sqrt{20} \\
 \sin(\alpha) &= \\
 CB &= \sqrt{4x^2 + 16x^2} \\
 CB &= x\sqrt{20} \\
 \sin(\alpha) &= \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\
 CF &= EF \cdot \sin(\alpha) \\
 \sin(\alpha) &= \frac{DB}{CB} = \frac{2x}{x\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\
 \sin(\alpha) &= \frac{CF}{EF} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\
 CF &= EF \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \\
 \sin(\alpha) &= \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 (ax-1)y + 4b = 0 \\
 x^2 + y^2 = 4 \\
 x^2 + (y-20)^2 = 6^2
 \end{cases}$$

$$y = \frac{4b+ax}{3}$$

$$x^2 + \frac{16b^2 + 8abx + a^2x^2}{9} = 4$$

$$9x^2 + (a^2+16)x^2 + 8abx + 16b^2 - 36 = 0$$

$$D = 64a^2b^2 - 4(24ab^2 - 36 + 16a^2b^2 - 36a^2) = -40ab^2$$

$$D/4 = 10a^2b^2 - (24ab^2 - 36 + 16a^2b^2 - 36a^2) = 10ab^2 - 24ab^2 + 36 + 36a^2 = -14ab^2 + 36 + 36a^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned}
 a^2 &\leq 9 \\
 -36 &< 3 \\
 36 &> 14ab^2 + 36a^2
 \end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \sin^2(\alpha) = \frac{1}{5}$$

$$a^2 - a^3/b + a^2/b^2 - ab^3/b^4 + 3 = 0$$

$$a^4/b^4 + 3 - ab(a^2/b^3 + a^2/b^2 + 3) = 0$$

$$(a^2/b^2)^2 + 3a^2/b^4 + 3 - ab(a^2/b^3) = 0$$

$$(a^2/b^2)^2 - a^2/b^2 + 3 - ab(a^2/b^3) = 0$$

$$(a^2/b^2 - ab)^2 + ab(a^2/b^3 + 3)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^3(2x) - 3 \log_{2x}(5) = \log_{8x}^3(625) - 3$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\log_5^3(2x) - \frac{3 \cdot 3}{\log_5(2x)} = \frac{4}{3} \log_{2x}^2(8x) + 3 = 0$$

$$\log_5^3(2x) - \frac{4}{3} \log_5^2(2x)$$

$$t^3 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - 3$$

$$t^3 - \frac{9+1}{3t} + 3 = 0$$

$$3t^3 - 9t - 17 = 0$$

$$\log_5^3(7) + \frac{4}{\log_5(7)} = -\frac{7}{3} \log_5^2(7) - 3$$

$$q^3 + \frac{4}{q} + \frac{1}{3q} + 3 = 0$$

$$q^3 + \frac{13}{3q} + 3 = 0$$

$$3q^3 + 9q + 13 = 0$$

$$3(t^3 + q^3) + 9(q - t) = 0$$

$$t^3 + q^3 + 3(q - t) = 0$$

$$(a^3 + b^3)(a^2 - ab + b^2) = a^5 - a^4b + a^3b^2 + b^3a^2 - ab^4 + b^5$$

$$(t+q)(t^2 - tq + q^2 + t^2q + q^2t) + (q-t) = (a+b)(a^2 + b^2 - ab^3 - ba^3 + a^2b^2) = a^3 + ab^2 - a^2b^3 - ba^3 + a^2b^2 = a^3 + b^5$$