



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^7 3^{11} 5^{14}$ ,  $bc$  делится на  $2^{13} 3^{15} 5^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{17} 5^{43}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,3$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-17;68)$ ,  $Q(2;68)$  и  $R(19;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 60,  $SA = BC = 10$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 3$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 1.

$$ab: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ca: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

Тогда  $ab \cdot bc \cdot ca: 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$

тогда  $(abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75}$

т.к.  $\nearrow$  квадрат, то он : НА чётные степени  $\Rightarrow$   
 $\begin{matrix} 44 & & 76 \\ : 3 & \text{и} & : 5 \end{matrix}$

~~$\Rightarrow (abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76} \Rightarrow (abc)^2: 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76}$~~

~~$abc \rightarrow \sqrt{(abc)^2} \rightarrow 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$~~

~~пример таких a, b и c:~~

~~$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{24}$~~

~~$b = 2^3 \cdot 3^{44} \cdot 5^4$~~

~~$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{10}$~~

Тогда  $abc: 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$ , но

$bc: 5^{43}$

тогда и  $abc: 5^{43}$

тогда  $abc: 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \Rightarrow$

$abc: 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

Пример a, b, c:

$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$

$b = 2^3 \cdot 3^4$

$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{23}$

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

видно, что все делимости выполнят.  
и  $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2. Продолжение

Тогда

$$\frac{S(ACD)}{S(CEF)} = \frac{\frac{AD \cdot CD}{2}}{\frac{CD \cdot BD}{8}} =$$
$$= \frac{AD \cdot CD \cdot 8}{CD \cdot BD \cdot 2} = 4 \frac{AD}{BD} = 4 \left( \frac{AB}{BD} - 1 \right) =$$
$$= 4 \cdot 0,3 = 1,2$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

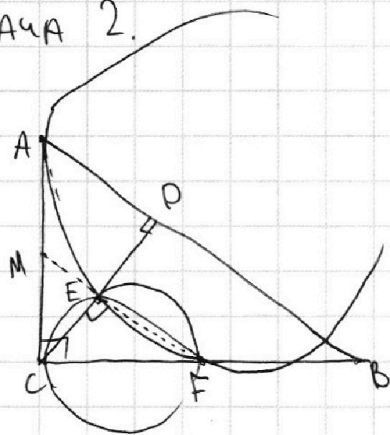
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2.



тк.  $EF \parallel AB$ , то  $\angle FED = \angle EDA = 90^\circ$  как  
накрест. лени. при секущей CD.

Тогда  $\angle CEF = 90^\circ$

Пусть EF пересекает AC в точке M.

Заметим, что на окружности с диаметром  
CF лежит E, т.к.  $\angle CEF = 90^\circ$  и  
эта окружность касается AC, т.к.

$AC \perp$  диаметру CF.

Тогда степень точки M отн. окр AEF =

$$\deg M_{\text{окр AEF}} = MA^2 = ME \cdot MF$$

$$\text{а } \deg M_{\text{окр CEF}} = MC^2 = ME \cdot MF \Rightarrow$$

$$MA^2 = MC^2 \Rightarrow MA = MC \text{ тогда в } \triangle ABC$$

MF — средняя линия, т.к.  $MF \parallel AB$  и M — середина

AC.  $\Rightarrow$  F — середина CB  $\Rightarrow$

FE — средняя линия  $\triangle CDB$  т.к. F — середина CB

и  $EF \parallel BD \Rightarrow EF = \frac{BD}{2}$ . Т.к. площадь =  $\frac{\text{высота} \cdot \text{основание}}{2}$

$$\text{То } S(\triangle ACD) = \frac{AD \cdot CD}{2}, S(\triangle CEF) = \frac{CE \cdot EF}{2} = \frac{CD}{2} \cdot \frac{BD}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$\arccos$  принимает значения в  $[0; \pi)$

поэтому  $x \in \left[-\frac{3}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi\right)$ .

возьмем косинус у обеих частей равенства:

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

"

~~cos(90-x)~~

~~sin(90-(3π/10 + x/5))~~

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right)$$

тогда:

$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - x = -\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) + 2\pi l \quad l \in \mathbb{Z}$$

Решим:

$$\frac{5\pi}{10} - \frac{5x}{5} = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5\pi}{10} - \frac{5x}{5} = 2\pi l - \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{6}{5}x + 2\pi k = \frac{2}{10}\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{4}{5}x + 2\pi l = \frac{8}{10}\pi \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$3x + 10\pi k = 6x + 10\pi l = \pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4x + 10\pi l = 4\pi \quad l \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 3. Продолжение

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{10\pi}{6}k & k \in \mathbb{Z} & (1) \\ x = \pi - \frac{5\pi}{2}l & l \in \mathbb{Z} & (2) \end{cases}$$

Посмотрим какие решения подходят под

$$x \in \left[ -\frac{3}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi \right)$$

$$(1): k \geq 2 \quad x < -\frac{3}{2}\pi \quad X$$

$$k = 1 \quad x = -\frac{3}{2}\pi \quad V$$

$$k = 0 \quad x = \frac{\pi}{6} \quad V$$

$$k = -1 \quad x = \frac{11\pi}{6} < \frac{7}{2}\pi \quad V$$

$$k \leq -2 \quad x \geq \frac{21}{6}\pi \geq \frac{7}{2}\pi \quad X$$

$$\Rightarrow \text{в } (1) \quad x \in \left\{ -\frac{3}{2}\pi \right\}; \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}; \left\{ \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

$$(2): l \geq 2 \quad x < -\frac{3}{2}\pi \quad X$$

$$l = 1 \quad x = -\frac{3}{2}\pi \quad V$$

$$l = 0 \quad x = \pi \quad V$$

$$l \leq -1 \quad x \geq \frac{7}{2}\pi \quad X$$

$$\Rightarrow \text{в } (2) \quad x \in \left\{ -\frac{3}{2}\pi \right\}; \left\{ \pi \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \left\{ -\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение 3.

коэф при  $b^2 \leq 0$  (так  $14^2 = 4 \cdot 49$ )  
и  $t = a^2 \geq 0$

тогда  $\exists$  такое  $b$ , когда есть 2 корня

$$\Rightarrow D > 0.$$

$$\Rightarrow (2 \cdot 126 \cdot t)^2 > 4 \cdot (-14^2 t)(126^2 t^2 -$$
  
 $- (4 \cdot 45 \cdot a)(9t^2 - t))$

и видно, что если мы тоже самое  
проделаем, то таких  $b$   $\exists$  не будет

$\Rightarrow$  Ответ: ни при каких.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МОТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4. начало.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): x = 7b - 3ay$$

$$(2): \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = (x + 7)^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (7b + 1 - 3ay)^2 + y^2 - 4 = 0 \\ (7b - 3ay)^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{49b^2 + 1 + 9a^2y^2} \\ (x + 7)^2 + y^2 = 4 & (3) \\ x^2 + y^2 = 9 & (4) \end{cases}$$

$$\text{из } (3): (x + 7)^2 \leq 4 \\ x + 7 \leq 2 \\ \boxed{x \leq -5}$$

$$\text{из } (4): x^2 \leq 9 \Rightarrow \boxed{x \geq -3}$$

Видно, что решений не пересекаются

$\Rightarrow$  Останется проверить, когда  $y \neq 0$   
(3) и (4) но 2 корня (с учетом (1))



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4. Продолжение 1.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45) / (x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$(1): x + 3ay - 7b = 0 \\ (x - 7b)^2 = 9a^2 y^2$$

(1) (2) эквивалентно:

$$\begin{cases} y^2 = -45 - x^2 - 14x = 4 - (x+7)^2 \quad | \cdot 9a^2 \\ 9a^2 y^2 = (x-7b)^2 \\ y^2 = 9 - x^2 \quad | \cdot 9a^2 \\ 9a^2 y^2 = (x-7b)^2 \end{cases}$$

$$36a^2 - 9a^2(x+7)^2 = (x-7b)^2 \quad (3)$$

$$81a^2 - 9a^2 x^2 = (x-7b)^2 \quad (4)$$

если  $a=0$ , то  $x=7b$  пусть  $b=1$   
тогда  $y^2 = 4 - (x+7)^2$  тогда  $(x+7) < 2$

~~иначе~~ т.е. должно быть 2 реш.  
и  $y^2 = 9 - x^2$  тогда  $x \geq -3$   
т.е. тоже 2 реш. т.е.

всего 4 решения 2х квадр ур-н.  
но таких  $x \nexists \Rightarrow \nexists$  такого  $b$ , где  
 $a=0$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продолжение 2.  
если  $a \neq 0$ . то

$$\text{из } x + 3ay - 7b = 0$$

из  $x$  однозначно следует  $y \Rightarrow$

должно быть 4 решения  $x$ .

$\Rightarrow$  4 решения  $y$  (3) и (4)

$$\left[ \begin{array}{l} 36a^2 - 9a^2(x+7)^2 = (x-7b)^2 \quad (3) \\ 81a^2 - 9a^2x^2 = (x-7b)^2 \quad (4) \end{array} \right.$$

$\Rightarrow y$  каждого по 2 решения.

$$(3): 36a^2 - 9a^2x^2 - 9 \cdot 14a^2x - 49 \cdot 9a^2 = x^2 - 14bx$$

$$\Leftrightarrow (9a^2 + 1)x^2 + x(9 \cdot 14a^2 - 14b) + (49b^2 + 45 \cdot 9a^2) = 0$$

$\Rightarrow D > 0$  для 2х корней.

$$\Rightarrow (9 \cdot 14a^2 - 14b)^2 > 4(9a^2 + 1)(49b^2 + 45 \cdot 9a^2)$$

пусть  $t = a^2$

$$126^2 t^2 - 2 \cdot 126 \cdot 14tb + 14^2 b^2 > 4 \cdot 9 \cdot 49tb^2 + 4 \cdot 9t^2 \cdot 9 \cdot 45 + 4 \cdot 49b^2 + 4 \cdot 45 \cdot 9t$$

$$\cancel{(126^2 - 4 \cdot 9^2 \cdot 45)t^2 - t(2 \cdot 126 \cdot 14b - 4 \cdot 9 \cdot 49b^2 - 4 \cdot 45 \cdot 9t) + (14^2 b^2 - 4 \cdot 49b^2) > 0}$$

$$b^2(14^2 - 4 \cdot 9 \cdot 49t - 4 \cdot 49) + -b(2 \cdot 126 \cdot 14t) + (126^2 t^2 - 4 \cdot 9^2 \cdot 45t^2 - 4 \cdot 45 \cdot 9t)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.

пусть  $\log_7 6x = a$

тогда  $2 \log_{36x} 7 = 2 \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{2}{a}$

$$\log_{36x^2} 343 = \frac{\log_7 343}{\log_7 36x^2} = \frac{3}{2 \log_7 6x} = \frac{3}{2a} \Rightarrow$$

$$\textcircled{1} \quad a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4$$

пусть  $\log_7 y = b$

тогда  $6 \log_7 y = \frac{6}{b}$

$$\log_{y^2} (7^5) = \frac{\log_7 (7^5)}{\log_7 y^2} = \frac{5}{2b} \Rightarrow$$

$$\textcircled{2} \quad b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4$$

$$\textcircled{1} \quad | \cdot 2a \quad \textcircled{2} \quad | \cdot 2b$$

$$\textcircled{1}: 2a^5 - 4 = 3 - 8a$$

$$\textcircled{2}: 2b^5 + 12 = 5 - 8b$$

$$\textcircled{1}: 2a^5 + 8a + 7 = 0$$

$$\textcircled{2}: 2b^5 + 8b - 7 = 0$$

докажем, что  $y$   $\textcircled{1}$  и  $\textcircled{2}$  — корни.

$\textcircled{1}$ : возьмем производную.

$$10a^4 + 8 \quad \text{она всегда } > 0 \Rightarrow$$

максимум 1 корень, ну а он есть тк  $2a^5 + 8a + 7 = 0$  — нечетной степени.

$\textcircled{2}$ : аналогично только 1 корень тк  $10b^4 + 8$  тоже  $> 0$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Из исходных ур-н  $\textcircled{1}$  и  $\textcircled{2}$ :

$$\textcircled{1}: a^4 - \frac{7}{2a} = -4 \quad \text{и} \quad \textcircled{2}: b^4 - \frac{7}{2b} = -4$$

$$a^4 - \frac{7}{2a} = b^4 + \frac{7}{2b} = -4$$

Пусть у  $\textcircled{1}$  корень  $A$ , тогда

$$A^4 - \frac{7}{2A} = -4$$

$$\Rightarrow (-A)^4 + \frac{7}{2(-A)} = -4 \quad \text{но} \quad \text{тогда}$$

$-A$  — это корень  $\textcircled{2}$ .  $\Rightarrow$

т.е. это ер. корни, то  $\boxed{a + b = 0.}$

Найдём  $xy$ .

$$\begin{aligned} xy &= \frac{bxy}{b} = \frac{7^{\log_7 bx} \cdot 7^{\log_7 y}}{b} = \\ &= \frac{7^{\log_7 bx + \log_7 y}}{b} = \frac{7^{a+b}}{b} = \frac{7^0}{b} = \frac{1}{b} \end{aligned}$$

Нашли!

Ответ:  $\frac{1}{b}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

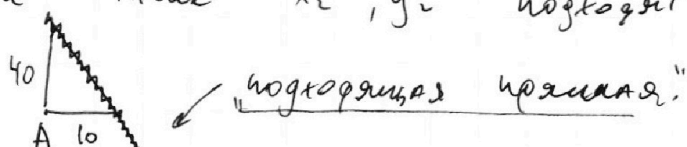
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6.

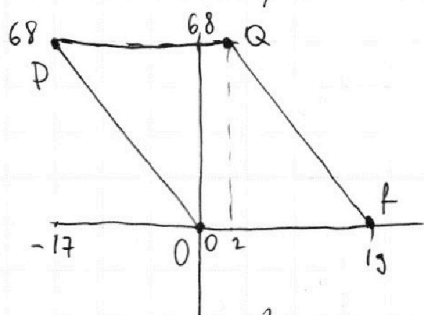
Заметим, что при константной точке  $A$ , точка  $B$  лежит на прямой, т.е.  $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$  линейная функция.

Что это за прямая? — это прямая через точки  $(x_1 + 10; y_1)$  и  $(x_1; y_1 + 40)$

т.е. такие  $x_2, y_2$  подходят.



Рассмотрим  $\square$ .



Заметим, что  $OP \parallel$  прямой на которой лежат точки  $B$ .

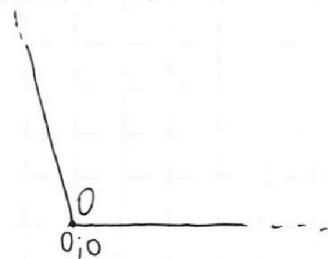
$$\text{т.е. } \frac{68}{17} = \frac{40}{10} = 4.$$

Заметим, что если  $A$  лежит в  $\square$   $OPQS$  где  $T(-7; 68)$   $S(\frac{10}{3}; 0)$

то "подходящая прямая" для  $B$  лежит

в  $\square$   $OPQR$ . (т.к.  $TS$  это сдвиг  $QR$  на  $\frac{10}{3}$ )

Осталось посчитать кол-во пар  $g$  и точек  $A \in OPQS$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что для точек ~~на~~  
на 1 стороне  $\parallel OP$  кол-во марок точек  
в одинаково и для точек А в  
одной горизонтали кол-во марок точек  
в также одинаково

Тогда все точки разделим на 4 группы

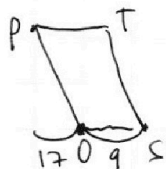
1: координ.  $(0; 0)$

2:  $(0; 1)$

3:  $(0; 4)$

4:  $(0; 3)$

1: в этой группе  $10 \cdot 18$  точек



тк на сторонах  $\parallel OP$  по  
18 точек, а также стороны  
10 (тк.  $OS = 9$ ).

точке 0 - есть 18 точек в

(на стороне  $\parallel OP$  через  $(10; 0)$

огранич. прямыми  $OS$  и  $PT$ ).

$\Rightarrow$  мар в 1) группе  $10 \cdot 18 \cdot 18$

Для групп 2; 3; 4 ответи одинаковы

$$и = 9 \cdot 17 \cdot 17$$

тк по горизонтали в  $OPTS$  их уменьшается  
9, но (вертикали 17  $\Rightarrow$  и в маре  
(мар)  $\uparrow$  (направл.  $\parallel OP$ )  
у них по 17 точек в.

$\Rightarrow$  ответ:  $10 \cdot 18^2 + 3 \cdot 9 \cdot 17^2$  мар

Ответ:  $10 \cdot 18^2 + 27 \cdot 17^2$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

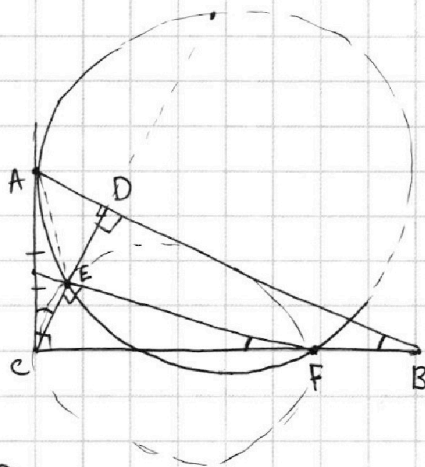
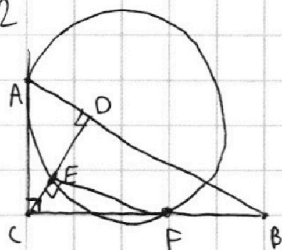
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 2



По условию  $\triangle ABC$

Так как  $EF \parallel AB$ , то  $\angle ABC = \angle EFC$ , как  
односторонние, а также  $\angle CEF = \angle CDB$ , как

односторонние при секущей  $CD$ .

Так  $\angle CDB = 90^\circ$ , то  $\angle CEF = 90^\circ$

$\angle ACD = \angle ACB - \angle DCB = 90^\circ - \angle DCB = 90^\circ - \angle ECF = \angle CFE$

$$\frac{AB}{BD} = 1 + \frac{AD}{BD} = 1,3 \Rightarrow \frac{AD}{BD} = 0,3$$

$$\frac{BD}{CD} = \operatorname{ctg}(\angle CBD) = \operatorname{ctg}(\angle ACD) = \frac{CD}{AD}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{CD^2}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{\frac{CD^2}{AD}} = 0,3 \Rightarrow \left(\frac{AD}{CD}\right)^2 = 0,3$$

$$x^2 + 14x + 49 + (y^2 - 4)$$

$$((x+7)^2 + (y^2 - 4)) (x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$\begin{aligned} x + 7 &= -3ay \\ x^2 - 14x + 49 &= 9a^2 y^2 \\ x + 7 &= -3ay \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 + (x+7)^2 = 4 \end{cases}$$

$$9a^2 y^2 = 4 -$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a^4 - \frac{2}{a} = \frac{3}{2a} - 4 \quad b^4 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4$$

$$\times \frac{18}{18}$$

$$\frac{a+b}{7/b}$$

$$b^4 + \frac{7}{2b} = -4 = a^4 - \frac{7}{2a}$$

$$2b^4 + \frac{7}{b} = -8 = 2a^4 - \frac{7}{a}$$

$$0 < b < 1, \quad 0 < a < 1$$

$$\frac{2 \cdot 4b^3 + 7}{b^2} = 0$$

$$8b^3 = -\frac{7}{8}$$

$$\frac{b^4 - a^4}{a^4 - b^4} = 7 \left( \frac{a+b}{2ab} \right)$$

$$2ab(a-b)(a^2+b^2) = 7$$

$$b^4 + \frac{7}{2b} + 4 = 0$$

$$(b^2 + 2)^2 - 4b^2 + \frac{7}{2b} = 0$$

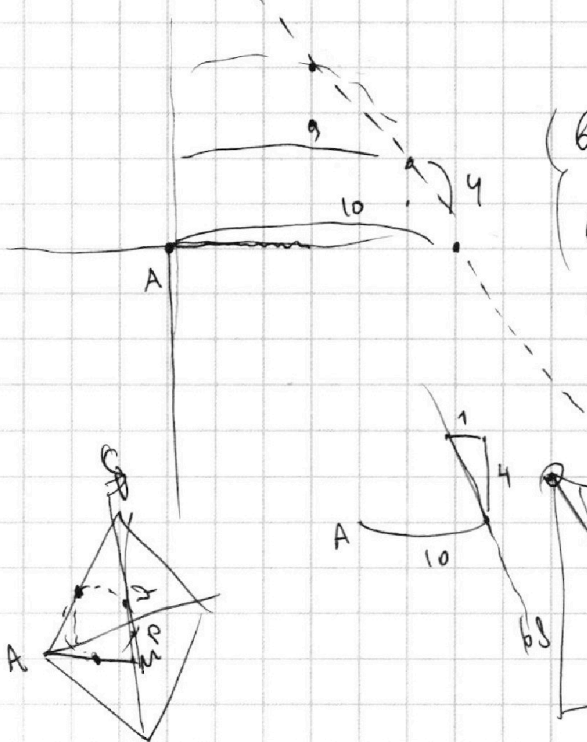
$$(b^2 - 2b + 2)(b^2 + 2b + 2) + \frac{7}{2b} = 0$$

$$2 + b^2 + 2 + \frac{7}{2b}$$

$$(b+1)^2 + 1$$

$$(b-1)^2 + 1$$

$$\frac{17}{2\sqrt{2}} \quad \frac{34}{5} \quad \text{с } 7$$



$$2b^5 + 7 + 8b = 0$$

$$2b^5 + 8b + 2a^5 + 8a = 0 \Rightarrow 10b^4 + 8 \Rightarrow \text{с } 7$$

$$(a+b)(8 + 2(\dots)) \Rightarrow \text{с } 7$$



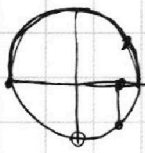
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



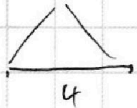
ОДЗ.

$x < \pi$

$$\cos\left(\frac{3}{10}\pi + \frac{x}{5}\right) = \sin x.$$

$$\frac{4a}{7} = 6$$

$$\frac{343}{343}$$



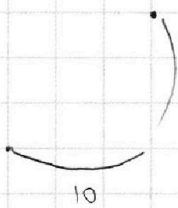
$bx > 0$ .

$$\log_7^4(bx) - 2 \log_7 bx = \log_7 6x^{343} - 4$$

$$2 \log_7 7$$

$$\log_7 6x$$

$$a^4 - \frac{7}{2a} = b^4 - \frac{7}{2b}$$



$$a^4 - \frac{7}{a} = \frac{3}{2a} - 4$$

$$a^4 - b^4 = 7 \left( \frac{a-b}{2ab} \right)$$

$$2ab(a^2 - b^2) = 7(a-b)$$

$$2ab(a+b)(a-b) = -7$$

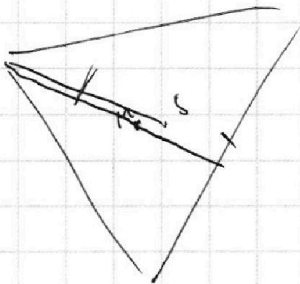
$$a^5 - 2 = \frac{3}{2} - 4a$$

$$a+b = \log_7 6x^{343}$$

$$\frac{a+b}{7} = 6$$

$$b^5 + \frac{6}{b} = \frac{5}{2b} - 4b$$

$$x(x^2 - y)y$$



$$b^5 + 4b = \frac{5}{2} - \frac{7}{2}$$

$$a^5 + 4a = \frac{1}{2}$$

$$(a+b)(a^4 - ba^3 + 4) = -5$$

$$b^5 + a^5 + 4a = 4b + 3 = 0$$

$$b^5 - a^5$$