МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

# 11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $ab$ делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, $bc$ делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, $ac$ делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения $abc$.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник $ABC$. Окружность, касающаяся прямой $BC$ в точке $B$, пересекает высоту $CD$, проведённую к гипотенузе, в точке $F$, а катет $AC$ – в точке $E$. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника $ABC$ к площади треугольника $CEF$.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых найдётся значение параметра $b$, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа $x$ и $y$ удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2}\left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения $xy$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы $AA_1, BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $M$. Сфера $\Omega$ касается ребра $AS$ в точке $L$ и касается плоскости основания пирамиды в точке $K$, лежащей на отрезке $AM$. Сфера $\Omega$ пересекает отрезок $SM$ в точках $P$ и $Q$. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника $ABC$ равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан $AA_1, BB_1$ и $CC_1$.

б) Найдите двугранный угол при ребре $BC$ пирамиды, если дополнительно известно, что $\Omega$ касается грани $BCS$ в точке $N$, $SN = 4$, а радиус сферы $\Omega$ равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача #1.

Пусть $a = 2^{x_a} \cdot 3^{y_a} \cdot 5^{z_a} \cdot V_a$; $(x_a, y_a, z_a \in \mathbb{Z}^+, \ V_a \in \mathbb{N})$

$b = 2^{x_b} \cdot 3^{y_b} \cdot 5^{z_b} \cdot V_b$; — // —

$c = 2^{x_c} \cdot 3^{y_c} \cdot 5^{z_c} \cdot V_c$.

Тогда $ab = 2^{x_a+x_b} \cdot 3^{y_a+y_b} \cdot 5^{z_a+z_b} \cdot V_a \cdot V_b \ \vdots \ 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$.

Значит, $x_a + x_b \geq 9$; $y_a + y_b \geq 10$; $z_a + z_b \geq 10$.

Аналогично, $bc \ \vdots \ 2^{14} 3^{13} 5^{13} \Rightarrow x_b + x_c \geq 14$; $y_b + y_c \geq 13$; $z_b + z_c \geq 13$.

$ac \ \vdots \ 2^{19} 3^{18} 5^{30} \Rightarrow x_a + x_c \geq 19$; $y_a + y_c \geq 18$; $z_a + z_c \geq 30$.

Сложив нерав-ва с x, получаем:

$x_a + x_b + x_b + x_c + x_a + x_c = 2(x_a + x_b + x_c) \geq 9 + 14 + 19 = 23 + 19 = 42$

Аналогично,

$2(y_a + y_b + y_c) \geq 10 + 13 + 18 = 41$

$2(z_a + z_b + z_c) \geq 10 + 13 + 30 = 53$

Значит, $x_a + x_b + x_c \geq 21$; $y_a + y_b + y_c \geq 20{,}5$ (а значит и 21, т.к. целое);

$z_a + z_b + z_c \geq 26{,}5$ (а значит и 27, т.к. целое).

В то же время $z_b \geq 0$, $z_a + z_c \geq 30 \Rightarrow z_a + z_b + z_c \geq 30$.

Значит, $abc = 2^{x_a+x_b+x_c} \cdot 3^{y_a+y_b+y_c} \cdot 5^{z_a+z_b+z_c} \cdot V_a V_b V_c \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

Равенство достигается при $a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{10}$; $b = 2^2 \cdot 3^2$, $c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{20}$.

Ответ: $2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

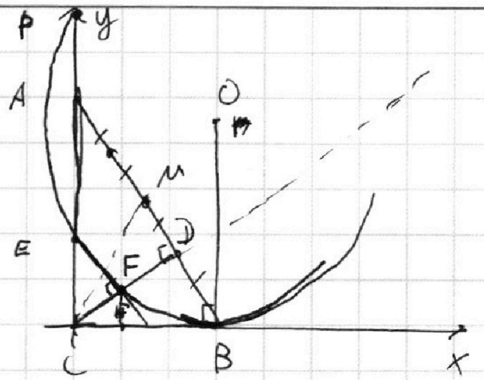
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2.

Дано:
$\triangle ABC$
$\angle C$ прямой
$CD$ - высота
$AD:DB = 3:1$
Окр. $\omega$ касается $BC$ в $B$,
$CD \cap \omega = F$, $AC \cap \omega = E$,
$EF \parallel AB$.

Найти:
~~Отношение~~ $\dfrac{S(CEF)}{S(ABC)}$.

$C=(0,0)$




Решение:
Пусть $CM$ - медиана.
В треуг. $CMB$ высота $CD$ и является медианой, значит ~~...~~ $CM=CB$.
Но $CM=MB$, т.к. $\angle ACB = 90°$.
Значит, $\triangle CMB$ равносторонний, т.е. $\angle CBM = 60°$.

$AC = BC \cdot tg\,60° = BC\sqrt{3}$.

Пусть $BC = a$, радиус окружности $r$, $CE = x$.

Из степени точки $C$ отн. окружности $\omega$:

$CE \cdot (2r - CE) = a^2$ (если $AC$ вторично пересекает $\omega$ в точке $P$, то $\omega$ симметрично отн. серпера к $EP$, как и $AC$, значит ~~...~~ $y$-координата центра окружности $\omega$ - середина $y$-координат $E$ и $P$), т.е. $r = \dfrac{CE+CP}{2}$, т.е. $CP = 2r - CE$).

$x \cdot (2r - x) = a^2$ ~~$Но\ r^2 = a^2 + (r-x)^2 \Leftrightarrow r^2 = ...$~~

$\angle ECF = 90° - \angle CDB = 90° - 30° = 60°$. $CF = \dfrac{CE}{2} = \dfrac{x}{2}$, т.к. $CF \perp EF$, т.к. ~~...~~ т.к. $CF \perp AB$ и $EF \parallel AB$. $x(F) = CF \cdot \cos 30° = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{4}$.

$y(F) = CF \cdot \sin 30° = \dfrac{x}{2} \cdot 1/2 = \dfrac{x}{4}$. $OF^2 = (r - \dfrac{x}{4})^2 + (a - \dfrac{x\sqrt{3}}{4})^2 = r^2$.

Задача №2 продолж.

$$OF^2 = \left(r - \frac{x}{4}\right)^2 + \left(a - \frac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 - \frac{rx}{2} + \frac{x^2}{16} + a^2 - \frac{ax\sqrt{3}}{2} + x^2 \cdot \frac{3}{16} = r^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{4x^2}{16} - \frac{rx}{2} - \frac{ax\sqrt{3}}{2} + a^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^2}{4} - (r + a\sqrt{3})\frac{x}{2} + a^2 = 0$$

Но $2rx - x^2 = a^2 \Leftrightarrow r = \frac{a^2 + x^2}{2x}$

Отсюда $\frac{x^2}{4} - \left(\frac{a^2+x^2}{2x} + a\sqrt{3}\right)\frac{x}{2} + a^2 = 0$

$\Updownarrow$ (домножили на 4)

$$x^2 - (a^2 + x^2) - 2ax\sqrt{3} + 4a^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$3a^2 - 2ax\sqrt{3} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Но $\triangle CEF \sim \triangle ABC$ с коэфф. $\frac{CE}{AB} = \frac{CE}{2BC} = \frac{x}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{4a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Значит, $\frac{S(CEF)}{S(ABC)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$. $\frac{S(ABC)}{S(CEF)} = \frac{16}{3}$.

~~Ответ: $\frac{3}{16}$.~~

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{16}{3}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача #3.

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\forall t \in \mathbb{R}$ $(\arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2})$

$\Leftrightarrow$ $5\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2}$

$\Updownarrow$

$2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = x + 5\arccos(\cos x)$

$\Updownarrow$

$2\pi = x + 5\arccos(\cos x)$

① $x \in [2\pi k; 2\pi k + \pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\arccos(\cos x) = x - 2\pi k$.

Значит, исходное ур-е ~~равносильно~~ становится:

$2\pi = x + 5(x - 2\pi k)$

$\Updownarrow$

$2\pi + 10\pi k = 6x$

$\Updownarrow$

$\pi + 5\pi k = 3x$

$\Updownarrow$

$x = \pi \cdot \frac{(1+5k)}{3}$.

$2\pi k \le x < 2\pi k + \pi$

$\Updownarrow$

$2\pi k \le \pi \cdot \frac{(1+5k)}{3} < 2\pi k + \pi$

$\Updownarrow$

$6k \le 1 + 5k < 6k + 3$

$\Updownarrow$

$k \le 1 < k + 3$

$\Updownarrow$

$-2 < k \le 1$.

Значит, $x \in \left\{-\frac{4\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$.

② $x \in [2\pi k - \pi; 2\pi k)$ $k \in \mathbb{Z}$

$\arccos(\cos x) = 2\pi k - x$.

Значит, исходное ур-е становится:

$2\pi = x + 5\cdot(2\pi k - x)$

$\Updownarrow$

$4x = 10\pi k - 2\pi$

$\Updownarrow$

$x = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot (5k - 1)$

$2\pi k - \pi \le x < 2\pi k$

$\Updownarrow$

$2\pi k - \pi \le \frac{\pi}{2}(5k-1) < 2\pi k$

$\Updownarrow$

$4k - 2 \le 5k - 1 < 4k$

$\Updownarrow$

$-2 \le k - 1 < 0$

$\Updownarrow$

$-1 \le k < 1$

Значит, $x \in \left\{-3\pi; -\frac{\pi}{2}\right\}$.

$$\boxed{\text{Ответ: } \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}.}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача #4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=3b-ax \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3b-ax}{2} \\ y^2=\frac{9b^2-6abx+a^2x^2}{4} \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9=0 \leftarrow \text{кв. ур.} \\ x^2+y^2-12x+32 \end{array}\right. \end{cases}$$

4 корня могут быть только когда у обоих квадратных уравнений есть 2 различных корня, и их корни не совпадают.

Их корни не совпадают: $!\begin{cases} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{cases} \Leftrightarrow !\begin{cases} x^2+y^2-9=0 \\ 12x-41=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-9\neq 0 \\ x\neq \frac{41}{12} \end{array}\right.$

У 1-го есть 2 корня:

$$\cancel{x^2} \left(1+\frac{a^2}{4}\right)x^2-\frac{3abx}{2}+\frac{9b^2}{4}-9=0$$

$$D=\frac{9a^2b^2}{4}-4\cdot\left(1+\frac{a^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{9b^2}{4}-9\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(9a^2b^2-(4+a^2)(9b^2-36)\right)=$$

$$=1/4\cdot\left(9a^2b^2-9a^2b^2-36b^2-36a^2+36\cdot 4\right)=36-9a^2-9b^2>0.$$

У 2-го есть 2 корня:

$$\left(1+\frac{a^2}{4}\right)x^2-\left(\frac{3ab+24}{2}\right)x+\frac{9b^2}{4}+32=0$$

$$D=\frac{9a^2b^2}{4}+\frac{2\cdot 3ab\cdot 24}{4}+\frac{24^2}{4}-4\cdot(1+a^2/4)\left(\frac{9b^2}{4}+32\right)=$$

$$=1/4\cdot\left(9a^2b^2+4\cdot 4\cdot 9ab+24^2-(4+a^2)(9b^2+128)\right)=$$

$$=1/4\cdot\left(4\cdot 4\cdot 9ab+24^2-4\cdot 9b^2-128\cdot a^2-128\cdot 4\right)=36ab-9b^2-32a^2+16\cdot 9-16\cdot 8=$$

$$=36ab-9b^2-32a^2+16>0.$$

$\cancel{9b^2 < 36}$ $\quad \exists b: \begin{cases} b^2<4-a^2 \\ 9b\cdot(4a-b)>32a^2-16 \end{cases}$ $\leftarrow$ Корни: $b=\frac{36^2a^2\pm 12^2\sqrt{a^2+4}}{18}$

Значит, $a^2<4 \Leftrightarrow |a|<2$

$\Leftrightarrow 9b^2-36ab+32a^2-16<0$

$$D=(36a)^2-4\cdot 9\cdot(32a^2-16)=36\cdot(36a^2-32a^2+16)=$$
$$=36\cdot(4a^2+16)=12^2\cdot(a^2+4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

# Задача #5

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ (\log_3 x)^4 + \dfrac{6}{\log_3 x} = \dfrac{\log_x(3^5)}{2} - 8 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ (\log_3 x)^5 + 6 = \dfrac{5}{2} - 8\log_3 x \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 2(\log_3 x)^5 + 7 + 16\log_3 x = 0 \end{cases}$

Возрастающая ф-ция, т.к. сумма возрастающих

$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 5y>0 \\ 5y\neq 1 \\ (\log_3(5y))^4 + \dfrac{2}{\log_3(5y)} = \dfrac{11\log_{5y}(3)}{2} - 8 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 5y>0 \\ 5y\neq 1 \\ (\log_3(5y))^5 + 2 = \dfrac{11}{2} - 8\log_3(5y) \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 5y>0 \\ 5y\neq 1 \\ 2(\log_3(5y))^5 - 7 + 16\log_3(5y) = 0 \end{cases}$

Возрастающая ф-ция.

~~$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}$~~

Заметим, что если $x$ – корень первого ур-я, то $y = \dfrac{3^{-\log_3 x}}{5} = \frac{1}{5x}$ – корень второго, и наоборот: если $y$ – корень второго, то $x = 3^{-\log_3(5y)} = \frac{1}{5y}$ – корень первого.

Доказательство:

пусть $z = \log_3 x$, $v = \log_3(5y)$

первое ур-е:

$2z^5 + 16z + 7 = 0$

второе:

$2v^5 + 16v - 7 = 0$.

При замене $v = -z$ 2-е переходит в первое; при замене $z = -v$ первое во второе.

Поскольку корень каждого ур-я единственный (слева возр. ф-ция*, справа 0), то если корень первого $x$, то корень второго $\frac{1}{5x}$.

$xy = x \cdot \frac{1}{5x} = \frac{1}{5}$.

$\boxed{\text{Ответ: } 1/5.}$

* ф-ция на $-\infty$ отрицательная, на $+\infty$ положительна.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача #6, пределы.

Посчитаем для каждого значения $f(B)$ от 0 до 60. кол-во подходящих пар $(A, B)$ таких, что $f(A)-f(B)=33$. Это и будет ответ.

~~От~~ ~~Выбрать B у нас есть~~

Пусть $f(B)=X$ тогда $F(A)=33+X$

Выбрать B у нас есть $K(x)$ способов.

Если $33+X>60$, то у нас 0 способов выбрать A,

иначе ~~тоже~~ их $K(33+X)=K(X)$.

Значит, ответ равен $\sum_{X=0}^{27}(K(X))^2 = \sum_{x=0}^{9}(K(3X))^2+\sum_{x=0}^{8}(K(3X+1))^2+$

$+\sum_{x=0}^{8}(K(3X+2))^2 = 10\cdot 15^2+9\cdot 14^2+9\cdot 14^2 = 10\cdot 15^2+18\cdot 14^2 =$

$=2250+1764\cdot 2=2250+3528=5778$.

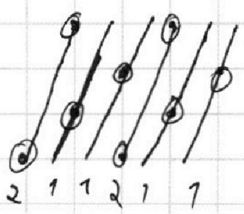
$\boxed{\text{Ответ: } 5778 \text{ способов}}$

$\cancel{14 \times 14}$

$\cancel{\times 196}$

$196\cdot 9=$
$=1960-196$

$$\begin{array}{r} 1960 \\ -\ 196 \\ \hline 1764 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

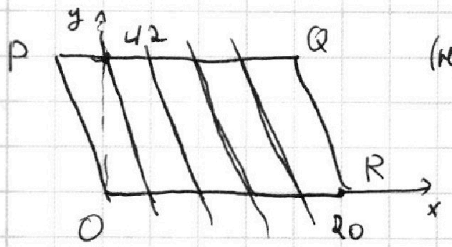
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача #6, начало.

Пусть $f(A) = 3x(A) + y(A)$.

Нас ~~просят~~ просят посчитать кол-во целочисленных точек $(A, B)$ в параллелограмме таких, что $f(A) - f(B) = 33$.

Заметим, что $\{M \mid f(M) = const\}$ — прямая $(3x+y = c \Leftrightarrow y = c-3x)$, с угловым коэфф. наклона $-3$. При этом сторона $PO$ нашего параллелограмма параллельна какой из этих прямых, т.к. $f(P) = f(O) = 0$.




(не в масштабе)

Значит, целочисленные решения $f(A) = c$ будут лежать внутри параллелограмма, если

1) $c \in [f(O); f(R)] = [0; 60]$

2) $y(A) \in [y(O); y(P)]_{\mathbb{Z}} = [0; 42]$

так как стороны $PQ$ и $OR$ параллельны оси $Ox$.

Посчитаем кол-во решений $f(A) = c$ внутри параллелограмма $(c \in [0; 60])$. Пусть это кол-во будет $K(c)$.

$3x + y = c$, $y \in [0; 42]_{\mathbb{Z}}$

$y = c - 3x$; $x \in \left[\frac{c}{3} - 14; \frac{c}{3}\right]$. Значит, это кол-во равно кол-ву целых точек на $\left[\frac{c}{3} - 14; \frac{c}{3}\right]$, т.е. 15 при $c \,\vdots\, 3$, иначе 14.

$$K(c) = \begin{cases} 15, & c \,\vdots\, 3 \\ 14 & \text{иначе} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ \left[\begin{array}{l} (x^2+y^2-9)=0 \\ x^2+y^2-12x+32=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$32+9-12x=0$

$41\neq 12x$

$x\neq\frac{41}{12}$

$y=\frac{3b-ax}{2}$

$\left|\frac{3b-ax}{2}\right|<2$

$(x^2+t-9)=0$

$t<9$

$x^2+t-12x+32=0$

$D/4=36-32-t=4-t$

$t<4$

$t<4$

$y^2=\frac{9b^2-6abx+a^2x^2}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x+y=a$
$y+z=b$
$x+z=c$

$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$

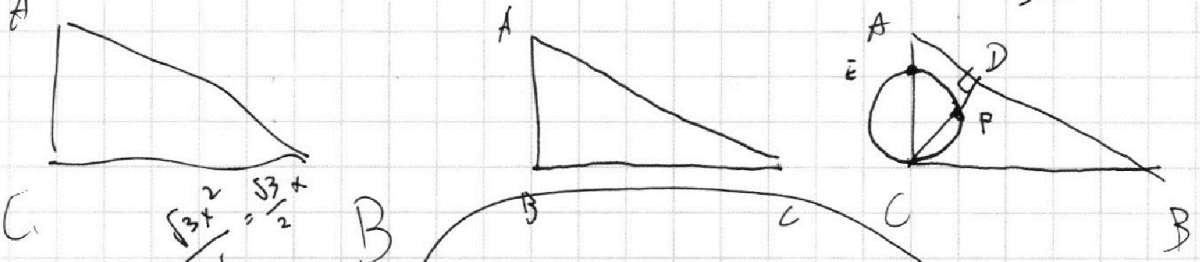
$\frac{9+14+19}{2}=\frac{23+19}{2}=\frac{42}{2}=21$

$\underline{2^{21}\cdot 3^{21}\cdot 5^{27}}$

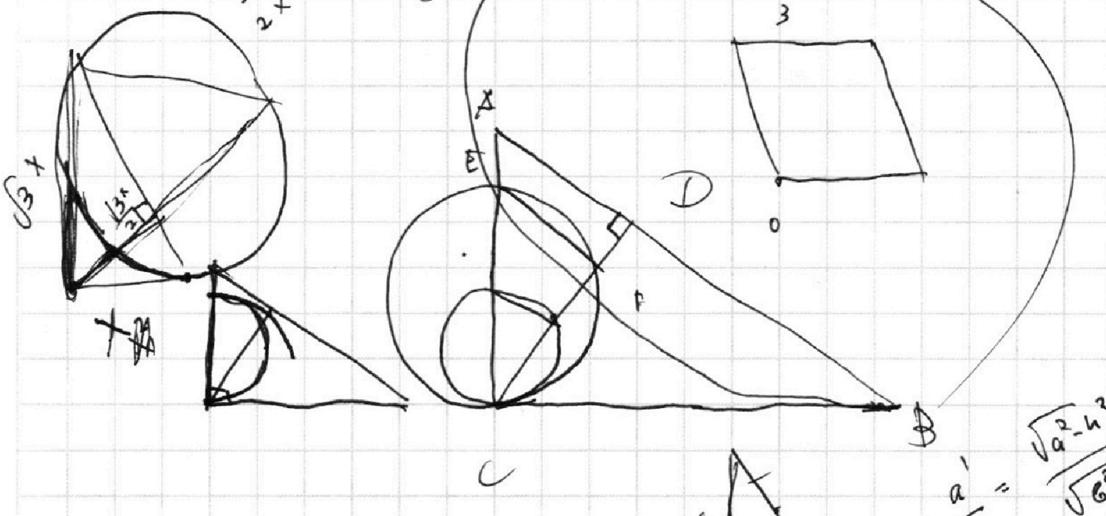
$\frac{10+13+18}{2}=\frac{10+31}{2}=\frac{41}{2}=20{,}5$

$\frac{10+13+30}{2}=\frac{40+13}{2}=\frac{53}{2}=26{,}5$ (2+)

$a=2^{7}\cdot 3^{8}\cdot 5^{20}$
$b=2^{2}\cdot 3^{2}$
$c=2^{12}\cdot 3^{11}\cdot 5^{17}$
$3+8+11$



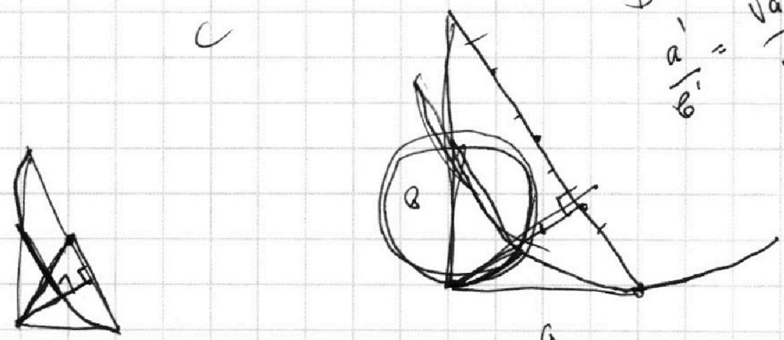

$\frac{\sqrt{3}x^2}{2x}=\frac{\sqrt{3}x}{2}$




$\frac{a'}{b'}=\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{\sqrt{b^2-h^2}}=\frac{1}{3}$

$\sqrt{b^2-h^2}=3\sqrt{a^2-h^2}$

$b^2-h^2=9a^2-9h^2$




$h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$h^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

$9a^2-b^2=\frac{8a^2b^2}{a^2+b^2}$

$9x-y=\frac{8xy}{x+y}$

$9x^2+\cancel{9xy}-\cancel{9xy}-y^2=8xy$

$9x^2=y^2$

$3x=y$

$b=a\sqrt{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$2\pi = x + 5(2\pi k - x)$

$4x = 10\pi k - 2\pi$

$4x = 2\pi\cdot(5k-1)$

$x = \frac{\pi}{2}\cdot(5k-1)$

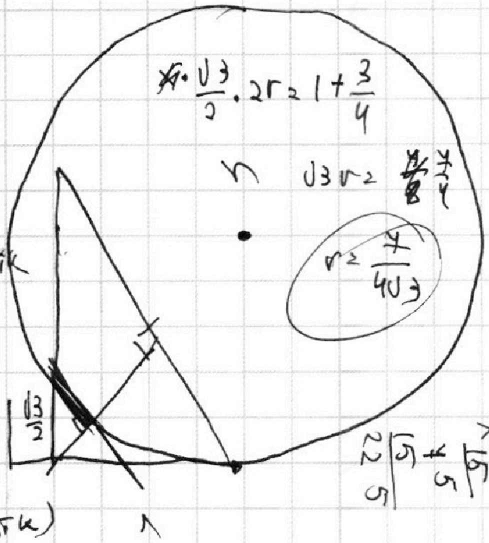
$2\pi k - \pi \le \frac{\pi}{2}\cdot(5k-1) \le 2\pi k$

$4k-1 \le 5k-1 \le 4k$

$k \ge 0$ 0, 1

$5k-1 \le 4k$

$k \le 1$



$\frac{\sqrt3}{2}\cdot 2r = 1 + \frac{3}{4}$

$h$ $\sqrt3 r = \frac{7}{4}$

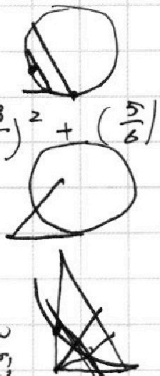
$r = \frac{7}{4\sqrt3}$

$\frac{\sqrt3}{2}$

$-2r^5 + 7 - 16r^4$ $\left(\frac{7}{4\sqrt3} - \frac{\sqrt3}{8}\right)^2 +$

$+\left(1-\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{196}{64\cdot3} = \frac{49}{16\cdot3}$

$= \left(\frac{14-3}{8\sqrt3}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{121}{64\cdot3} + \frac{25\cdot3}{64\cdot3} =$



$2\pi = x + 5(x - 2\pi k)$

$2\pi\cdot(1+5k) = 6x$

$2\pi k \le x = \frac{\pi}{3}\cdot(1+5k) \le 2\pi k + \pi$

$2\pi k \le \frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi k \le 2\pi k + 3\pi$

$\frac{1}{3}\pi k \le \frac{\pi}{3} \le \frac{1}{3}\cancel{\pi k + \pi}$

$-2 \le k \le 1$ $-2, -1, 0, 1$

$-\frac{2\pi}{3} \le \frac{1}{3}\pi k$

$-2 \le k$

$(h-x)^2 + 1 = h^2$

$h^2 - 2xh + x^2 + 1 = h^2$

$x^2 - 2xh + 1 = 0$

$D/4 = h^2 - 1$

$x = h \pm \sqrt{h^2-1}$

$x = h - \sqrt{h^2-1}$

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$5(\pi/2 - \arccos(\cos x)) = x + \pi/2$

$2\pi + \pi/2 = x + 5\arccos(\cos x) + \pi/2$

$2\pi = x + 5\arccos(\cos x)$

1) $x \in [0; \pi]$ $\arccos(\cos x) = x$

$2\pi = 6x$

$x = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

2) $x \in [\pi; 2\pi]$

$\arccos(\cos x) = 2\pi - x$

$2\pi = x + 5(2\pi - x)$

$2\pi = 10\pi - 4x$

$4x = 8\pi$

$x = 2\pi$

$(h-t)^2 + (1-\sqrt3 t)^2 = h^2$

$h^2 - 2th + t^2 + 1 - 2\sqrt3 t + 3t^2 = h^2$

$x = \frac{\sqrt3}{2}t$

$4t^2 - 2(h+\sqrt3)t + 1 = 0$

$D/4 = (h+\sqrt3)^2 - 4 = h^2 + 2\sqrt3 h - 1$

$t = \frac{h+\sqrt3 \pm \sqrt{h^2+2\sqrt3 h - 1}}{4}$

$h - \sqrt{h^2-1} = \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{h+\sqrt3-\sqrt{h^2+2\sqrt3 h-1}}{4}$

$8h - 8\sqrt{h^2-1} = \sqrt3 h + 3 - \sqrt{3h^2 + 6h\sqrt3 - 3}$

$(8-\sqrt3)h$

$t = \frac{h+\sqrt3 - \sqrt{h^2+2\sqrt3 h - 1}}{4}$

5) $x \in [4\pi; 5\pi]$

$2\pi = x + 5x - 20\pi$

$22\pi = 6x$

$x = \frac{22}{6}\pi = \frac{11}{3}\pi$

3) $x \in [2\pi; 3\pi]$ $\arccos(\cos x) = x - 2\pi$

$2\pi = x + 5x - 10\pi \Leftrightarrow 12\pi = 6x \Leftrightarrow x = 2\pi$

$2\pi = x + 20\pi - 5x \Leftrightarrow 4x = 18\pi$

$\cancel{x = \frac{9}{2}\pi}$

4) $x \in [3\pi; 4\pi]$ $\arccos(\cos x) = 4\pi - x$

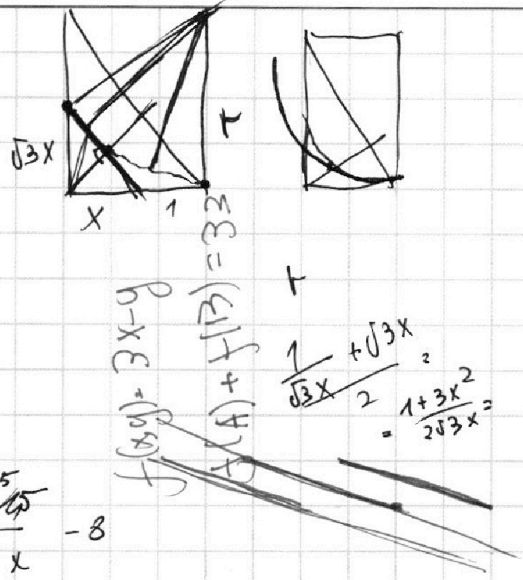
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x>0 \quad x\neq 1$



$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2}(243) - 8$

$(\log_3 x)^4 + 6\log_x 3 = \frac{\log_x 243}{2} - 8$

$243 = 3^5$

$\left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^4 + 6\log_x 3$

$\log_3 x)^4$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{(\log_3 x)} = \frac{2^{15}}{\log_3 x} - 8$

$a^t = b$

$b^{1/t} = 0$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{10}{t} - 2$

$t^5 + 6 - 10 + 8t = 0$

$t^5 + 8t - 4 = 0$

$t^5 = 4 - 8t$

$5t^5 + 30 - 2 + 40t = 0$

$5t^5 = 28 - 40t$

$\log_3(5y)^4 + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{\log_{5y}(3^{11})}{2} - 8$

$(\log_3 x)^4 + 6\log_x 3 = \log_{x^2}(243) - 8$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{\log_x 243}{2} - 8$

$(\log_3 x)^4 + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5\log_x 3}{2} - 8$

$t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 8$

$2t^5 + 12 - 5 + 16t = 0$

$\frac{1}{16}, 1$

$2t^5 = -16t - 7$

$-2t^5 = 16t + 7$

$2\log_3(5y)^4 + \frac{4}{\log_3(5y)} = \frac{11}{\log_3(5y)} - 16$

$2u^5 + 4 - 11 + 16u = 0$

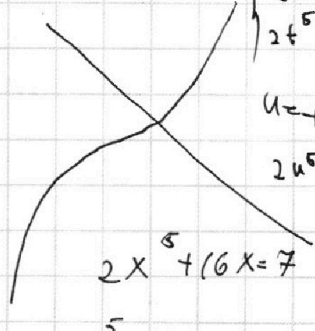
$\begin{cases} 2u^5 - 7 + 16u = 0 \\ 2t^5 - 7 + 16t = 0 \end{cases}$

$u = t$

$2u^5 + 2t^5 + 16u + 16t = 0$

$2(u+t)(u^4 - ut^3 + u^2t^2 - u^3t + t^4 + 8) = 0$

$u + t = 0$



$2x^5 + 16x = 7$

$2x^5 + 16x - 7 = 0$

$x \approx \frac{7}{16}$

$x = \log_5 3$

$2(x + \log_3 5)$

$2\cdot(\log_5 3)^5$