



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .

а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

и померси ниб вышном на корень  $у 3^{17}$ , т.е.

а в другом случае не каноническое, т.е.  $\deg_3(a) \geq 9$

Значит,  $\deg_3(b) \deg_3(abc) \geq 3^{30}$ , т.е.

$abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$  (иначе, какое-то из чисел  $a, b, c \notin \mathbb{N}$ )

Приведем пример, когда равенство достигается, это

и будет ответом на вопрос:

$a = 2^4 \cdot 3^9$ . Рассмотрим теперь, если  $\deg_5(abc) = 26$ ,

то из тех же соображений, что и в первом случае

получаем,  $\deg_5(a) = 13$  Это в т.ч. мы знаем, что  $\deg_5(b) \geq 0$ ,

иначе число - неканоническое и  $ac = 5^{28}$ , то

$\min \deg_5(abc) = 28 \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ .

Приведем пример, когда достигается равенство,

это и будет ответом на вопрос задачи.

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$ab: 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} - \text{верно} \quad bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} - \text{верно}$$

$$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} - \text{верно}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab: 2^6 3^{10} 5^{11} \quad bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13} \quad ac: 2^{16} 3^{25} 5^{18}$$

Обозначим за  $\deg_2(x)$  - <sup>степень</sup> высшей степени двойки в числе  $x$ . П.н.  $ab: 2^6$ , то  $\deg_2(a) + \deg_2(b) \geq 6$

(т.н. при умножении мы степени складываем)

$$\text{аналогично } \deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 14 \quad (bc: 2^{14})$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(c) \geq 16 \quad (ac: 2^{16})$$

Сложив три неравенства получаем:

$$2(\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c)) \geq 36$$

$$\deg_2(a) + \deg_2(b) + \deg_2(c) \geq 18$$

$$\text{П.е. } abc: 2^{18} \Rightarrow \text{т.к. } a, b, c > 0 \Rightarrow \min \deg_2(abc) = 18 \Rightarrow abc \geq 2^{18}$$

Аналогичные рассуждения проводим с тройкой

и пятеркой, откуда получаем  $\min \deg_3(abc) =$

$$= 29,5; \quad \min \deg_5(abc) = 26$$

$$\text{Значит, } abc \geq 2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$$

П.н. у тройки нечетная степень, посмотрим внимательно

$$\text{на то, что высходит. } \deg_3(a) + \deg_3(b) \geq 13$$

$$\deg_3(b) + \deg_3(c) \geq 21$$

$$\deg_3(c) + \deg_3(a) \geq 25$$

Пусть  $\deg_3(a) = x$ , если мы в неравенствах переопределим  
равенство, то  $\deg_3(c) = x + 8 \Rightarrow$  у тройки получаем  
 $\deg_3(a) = 8,5$ , т.е.  $\frac{17}{2} \Rightarrow$ , но  $a \in \mathbb{N}$ , а степени двойки



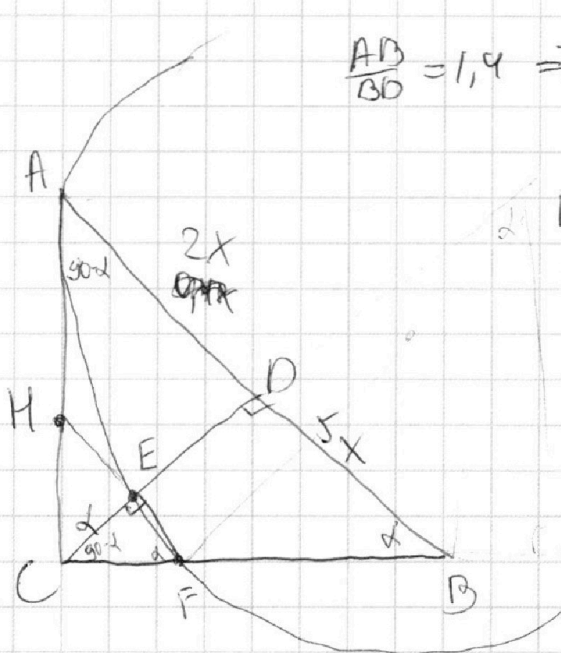
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AD}{BD} = 1,4 \Rightarrow BD = 5x; AD = 1,4x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AD = 2x$$

$EF \parallel AB \Rightarrow \text{т.к. } \angle CDB = 90^\circ$   
(CD - высота), то

$\angle CEF = 90^\circ \Rightarrow \triangle CEF$  - прямоугольн.

CD - высота из прямого угла  $\Rightarrow CD = \sqrt{2x \cdot 5x} = \sqrt{10}x$

$\triangle CDB$  - прямоугольный  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{по теореме о медиане в прямоугольнике: } CB = \sqrt{CD^2 + DB^2} = \sqrt{35}x$$

прямоуг.  $\triangle CEF \sim \triangle CDB$  ( $\angle C$  - общий)  $\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB} =$

$$= \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}. \text{ Проведем } EF \text{ до пересечения с } AC.$$

$EF \cap AC = H. \triangle HCF \sim \triangle ABC$  (оба прямоугольные и  $HF \parallel AB \Rightarrow \angle CFH = \angle B$

$\triangle ABC$  - прямоугольный  $\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{14}x$

Обозначим  $HC = y \Rightarrow AH = \sqrt{14}x - y$

т.к.  $\triangle ABC \sim \triangle HCF$  то  $CE$  и  $CD$  - совм. высоты

$y$  этих треугольников, то  $\frac{HE}{EF} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{5}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Н.р.  $\frac{HF}{HC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4x}{\sqrt{14}x} = \frac{4\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

$$HF = \frac{\sqrt{14}}{2} HC = \frac{\sqrt{14}}{2} y$$

$$HE = \frac{2}{7} HF; EF = \frac{5}{7} HF \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{14}}{7} y \neq$$

Рассмотрим площадь точки H относительно  
линии BC, т.к. HA - высота, а HF - медиана,  
то  $HA^2 = HE \cdot HF \Rightarrow (\sqrt{14}x - y)^2 = \frac{\sqrt{14}}{7} y \cdot \frac{\sqrt{14}}{2} y = y^2$

$$(\sqrt{14}x - y)^2 = y^2 \Rightarrow 14x^2 - 2\sqrt{14}xy + y^2 = y^2$$

$$\sqrt{14}x(\sqrt{14}x - 2y) = 0$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{14}x = 2y \Rightarrow y = \frac{\sqrt{14}x}{2}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2}{7} S_{\Delta ABC} \quad (CD - \text{общая высота } h; \text{ а } \frac{AD}{AB} = \frac{2}{7})$$

и то, что  $y = \frac{\sqrt{14}x}{2}$  получаем  $y = \frac{AC}{2}$ . Т.к.  $HF \parallel AB$ ,

то HF - средняя линия  $\Delta ABC \Rightarrow S_{\Delta HCF} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

$$(k = \frac{1}{2}) \text{ а } \frac{S_{\Delta HCF}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{EF}{HF} = \frac{5}{7} \Rightarrow \text{т.к. CE - общая высота } \Delta CEF \text{ и } \Delta HCF,$$

$$\text{то } S_{\Delta CEF} = \frac{5}{7} S_{\Delta HCF} = \frac{5}{28} S_{\Delta ABC}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CEF}} = \frac{\frac{2}{7} S_{\Delta ABC}}{\frac{5}{28} S_{\Delta ABC}} = \frac{8}{5} = 1,6$$

Ответ: 1,6.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(2) ; I случай :  $-54a - b \geq 0 \Rightarrow -54a \geq -5\sqrt{25+36a^2}$

Тогда

$$\frac{-54a + 5\sqrt{25+36a^2}}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$$

$$-54a = -2\sqrt{25+36a^2} \quad | \cdot 2$$

$$18a = \sqrt{25+36a^2} \quad a > 0 \rightarrow \text{возм. в } \sqrt{\text{выражении}}$$

$$324a^2 = 25 + 36a^2$$

$$288a^2 = 25$$

$$a^2 = \frac{25}{288}$$

$$a = \frac{5}{12\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \kappa b = -5 \sqrt{25 + \frac{3 \cdot 25}{288}} =$$

$$= -5 \frac{\sqrt{5 \cdot 3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{75}{2\sqrt{2}}$$

Неравенство выполняется.

Ответом, что при втором случае

$$-54a - b < 0$$

$$\frac{54a + b}{\sqrt{25+36a^2}} = 2$$

$$54a = 2\sqrt{25+36a^2}$$

При втором случае  $a$  не существует.

Значит, прямая имеет вид:

$$y = -2\sqrt{2}x + 12$$

$$\frac{b}{6a} = \frac{-75 \cdot 12\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot 6 \cdot 5} = -15$$

Ответом при условии,  $a$  не получится

т.е.  $a \in \left(\frac{5}{12\sqrt{2}}; +\infty\right)$

Внимательно  $a \in \left(-\frac{5}{12\sqrt{2}}; -\infty; -\frac{5}{12\sqrt{2}}\right) \cup a=0$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

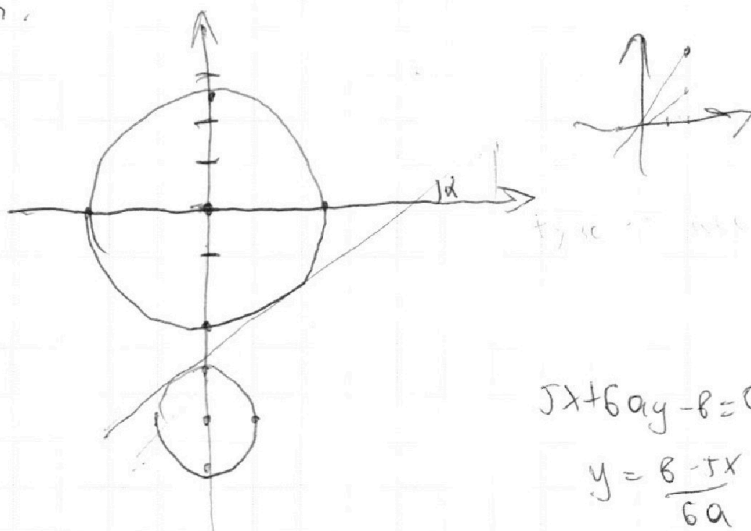
- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Предположим, что вектору  $\vec{a}$  направление определено,  
линию нет.



$$5x + 6ay - b = 0$$

$$y = \frac{b - 5x}{6a} = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$$

$$\frac{b}{6a} = c$$

Или,  $\frac{|1-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} \geq 5$

$$\frac{|1-54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} \leq 2$$

Рассмотрим случаи касания обеих окружностей  
(ан.рис)  
Понятно естественно, что параллельно переводя  
прямую мимо не получим. Увеличив уменьшив  
max угол  $x, y$  нас можно только не пропустить  
пересечения обеих окружностей  
Посмотрим на вид внутр. кас.

$$\frac{|1-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} = 5$$

$$\frac{|1-54a-b|}{\sqrt{5^2+36a^2}} = 2$$

$$b < 0 \Rightarrow |1| = 5\sqrt{5^2+36a^2} = b$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Прямая вида  $y = kx + c$ . Рассмотрим  $k > 0$ ,

$$\text{т.е. } -\frac{5}{6a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (a \neq 0)$$

Для того, чтобы рассмотреть это,

нужно проверить  $a = 0$ , т.е.  $5x - 6 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{5}. \text{ Очевидно, что } b = 0 \text{ пересекает,}$$

потому что прямая  $x = 0$  пересекает через  
диагонали обеих окружностей.

Также т.е. центры окружностей лежат  
на прямой  $x = 0$ , то  $b$  симметричны, если  
 $a > 0$  пересекает, то  $a$  -  $a$  пересекает.

Если пересекает пересечение с окружностью, то  
расстояние от центра до прямой меньше  
радиуса. Найдем уравнение для правой окружности.

$$\text{Формула: } \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < r$$

$$\text{Для первой окружности получаем: } \frac{|1 - b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < 5 \quad (1)$$

$$\text{Для второй окружности: } \frac{|1 - 54a - b|}{\sqrt{5^2 + 36a^2}} < 2$$

если  $b > 0$ , то (1)  $\Rightarrow \sqrt{5^2 + 36a^2} > b \quad b > 0 \Rightarrow$  во все в кв.

$$25 + 25 + 25 \cdot 36a^2 - b^2 > 0$$

$$25 \cdot 36a^2 + 50 - b^2 > 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{В0 (2) } \Delta D_1 = -54a - b < 0 \quad (b > 0; a > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | -54a - b | = 54a + b$$

$$\frac{54a+b}{25a+\sqrt{25+36a^2}} < 2 \quad | \cdot \sqrt{25+36a^2} > 0$$

$$54a+b < 2\sqrt{25+36a^2} \quad 54a+b > 0 \Rightarrow \text{возв. в квадр. сдв. влево.}$$

$$54^2 a^2 + 108ab + b^2 < 100 + 72a^2$$

$$2916a^2 - 2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0$$

Сложим неравенства:

$$\begin{cases} 900a^2 + 625 - b^2 > 0 \\ -2844a^2 - 108ab + 100 - b^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_1 = -4 \cdot 900 \cdot (625 - b^2) = -3600 \cdot 625 + 3600b^2$$

$\Phi_2 > 0$ , иначе т.е.  $-2844 < 0$  не будем пересекаться

$$a, \text{ т.е. } \Phi_2 = 108b^2 + 4 \cdot 2844 \cdot (100 - b^2) = -4268b^2 + 288$$

$$+ 1137600 > 0 \quad \text{при любом } b > 0 \text{ верно}$$

$$1137600 > 4268b^2 \quad a = \frac{108b \pm \sqrt{288b^2 + 1137600}}{-5688}$$

$$b^2 < 101 \Rightarrow b < 10 \quad a \in \left( \frac{108b + \sqrt{288b^2 + 1137600}}{-5688}; \frac{108b - \sqrt{288b^2 + 1137600}}{-5688} \right)$$

Заметим, что подставив во  $\Phi_1$  значение

$b$ , получим, что  $\Phi_1 < 0 \Rightarrow$  не все пересечение

$a$  для второго, для первого тоже будем получать



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

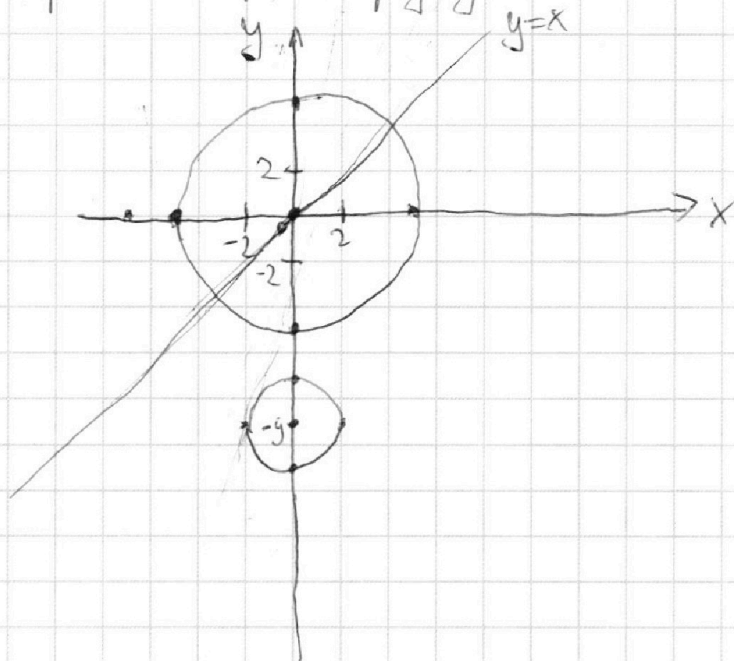
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим (2): ~~мысли~~  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$

Графиком первого является окружность с центром  $(0;0)$  и радиусом 5. Графиком второго является окружность с центром  $(-9;0)$  и радиусом 2.



Рассмотрим на (1):  $5x + 6ay - b = 0 \Rightarrow y = \frac{b - 5x}{6a} = \frac{-5x}{6a} + \frac{b}{6a}$  ( $a \neq 0$ )

Т.е. графиком первого является прямая.

Прямая имеет с окружностью не более 2 точек пересечения,

значит, для того, чтобы система имела 4 решения,  
нужно, чтобы прямая пересекала обе окружности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0. \text{ Если } t < 0, \text{ то } t^5 < 0; 5t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^5 + 5t - \frac{16}{3} < 0. \text{ Противоречие.}$$

$t \neq 0 \Rightarrow t > 0$ , Значит,  $t^5$ -монотонно возрастает.

При  $t > 0$ ;  $5t$  - монотонно возрастает.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow t^5 + 5t$  - монотонно возрастает.

Значит, у нас будет ровно одно значение, когда

$$t^5 + 5t = \frac{16}{3}. \text{ Обозначим такое } t \text{ за } b.$$

Аналогично заметим, что  $a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$

Если  $a > 0$ , то  $a^5 + 5a > 0 \Rightarrow$  такое быть не может, (знач. 0 при прибавке  $\frac{16}{3}$ ).

$a < 0$  ( $a \neq 0$ )  $\Rightarrow a^5$  при  $a < 0$  мон. убав.

Заметим, что нам требуется  $-b$ . Действительно,  $-b^5 - 5b + \frac{16}{3} = b^5 + 5b - \frac{16}{3} = 0$  (из первого).

Больше значений нет. И.е.  $a^5 + 5a$  - мон. возр.

$$\text{Значит, } \log_{11} x = b \Rightarrow x = 11^b$$

$$\log_{11} 0,5y = -b \Rightarrow 0,5y = \frac{1}{11^b}$$

$$0,5xy = 11^b \cdot \frac{1}{11^b} = 1 \Rightarrow xy = 2$$

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{x11} = \log_{x3} \frac{1}{|2|} - 5 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}$$

$$\log_{11} x = \frac{1}{\log_{x11}} \Rightarrow \frac{1}{\log_{x11}^4} - 6 \log_{x11} = \frac{2}{3 \log_{x11}} - 5$$

$$\log_{11} x = t \quad \log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = \frac{2}{3 \log_{11} x} - 5$$

$t \neq 0$  ~~определено~~ ~~множителем~~ ~~на~~ ~~то~~ ~~м.в.~~  ~~$x \neq 1$~~

$$\frac{1}{t^4} - 6t = \frac{2}{3t} - 5 \quad t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3}t - 5$$

$$\frac{1}{t^4} + \frac{16}{3}t + 5 \geq 0 \quad t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0$$

$$-\frac{16}{3}t^6 + 5t^5 = 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y11} = \log_{0,125y3} (11^{-13}) - 5 \quad \begin{matrix} y > 0 \\ y \neq 2 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{\log_{0,5y11}^4} + \frac{1}{\log_{0,5y11}} = -\frac{13}{3} \log_{0,5y11} - 5$$

$$\log_{11} 0,5y = a \quad a \neq 0 \quad \begin{matrix} \text{м.в. } y \neq 2 \\ \text{определено} \\ \text{множителем} \\ \text{на} \\ \text{то} \\ \text{м.в. } a \neq 0 \end{matrix}$$

$$a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5$$

$$a^5 + \frac{16}{3} + 5a = 0$$

Получаем, что  $a^5 + t^5 + 5(a+t) = 0$

1)  $a > 0; t > 0$  по модулю  $a^5 + t^5 > 0$ ;  $5(a+t) > 0$   
не можем быть

2)  $a < 0; t < 0$  по модулю  $a^5 + t^5 < 0$ ;  $5(a+t) < 0$   
не можем быть

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

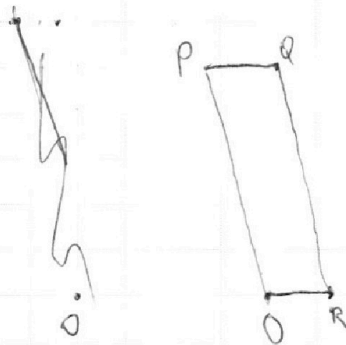
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Реш.  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$  и  $48 \leq 6$  и  $6x_2 - 6x_1 \leq 6$ ,  
то  $y_2 - y_1 \leq 6$ .



PO - прямая, имеющая вид:

$y = kx$ , подставив координаты точки P, получим

$$90 = -15k \Rightarrow k = -6$$

$$y = -6x$$

для QR - прямая, имеющая вид  $y = -6x + 102$

Значит, точки внутри или на границе  
параллелограмма - точки, имеющие вид:

$$y \geq 0; y \leq 90; y \geq -6x; y \leq -6x + 102$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

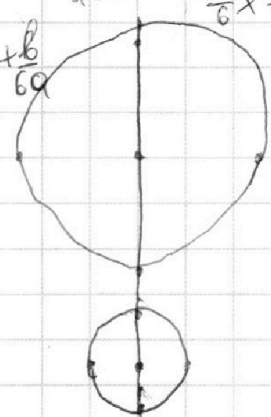
$$y = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{6a} \quad \frac{b - 5x}{6a} = \frac{-5x + b}{6a} = \frac{-5x + b}{6a}$$

$$a=1 \quad -\frac{5}{6}x + \frac{b}{6a} = y$$

$$\begin{cases} 5x \cdot (x^2 + y^2 - 25) (x^2 + y^2 + 18y + 47) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$(y+9)^2 + x^2 = 4$$

$$(y+9)^2 + x^2 = 4$$



$$CE \cdot CA = CF \cdot CY = AC^2 = 14x^2$$

$$Cx = \frac{14x^2}{y}$$

$$Cy = \frac{14x^2}{\sqrt{\frac{7}{3}}y}$$

$$\frac{196x^4}{\frac{7}{3}y^2} - \frac{196x^4}{\frac{7}{3}y^2}$$

$$\frac{196 \cdot 2,5x^4}{y^2}$$

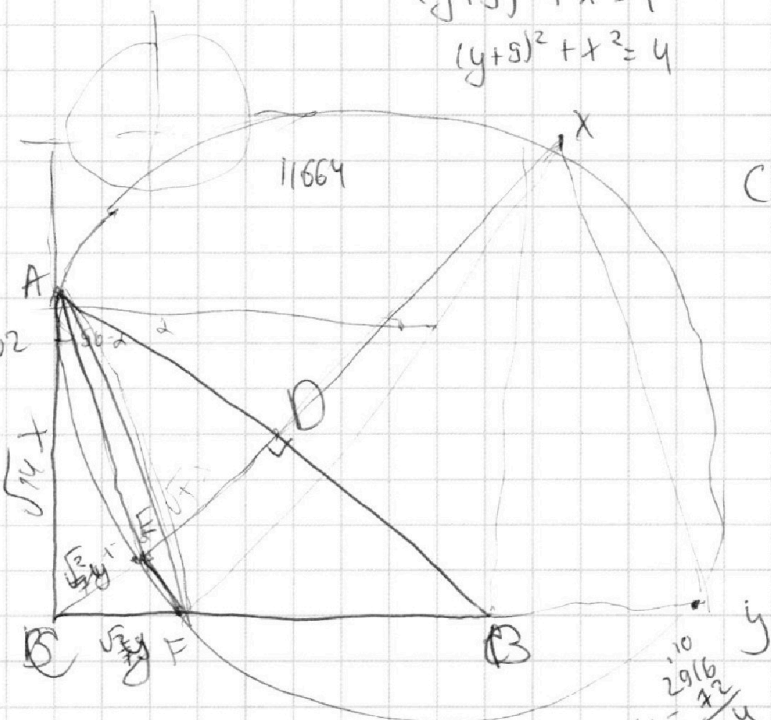
$$= \frac{14 \cdot 0,5\sqrt{10}x^2}{y}$$

$$= \frac{7\sqrt{10}x^2}{y}$$

$$\begin{array}{r} x \cdot 108 \\ \times 108 \\ \hline 864 \\ 108 \\ \hline 11664 \end{array}$$

QR =

$$\begin{aligned} 0 &= 17x + b \\ 90 &= 2x + b \\ x &= -6 \\ y &= \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ (y+9)^2 \end{cases}$$

$$y = x - 4$$

$$x - 4 - y = 0$$

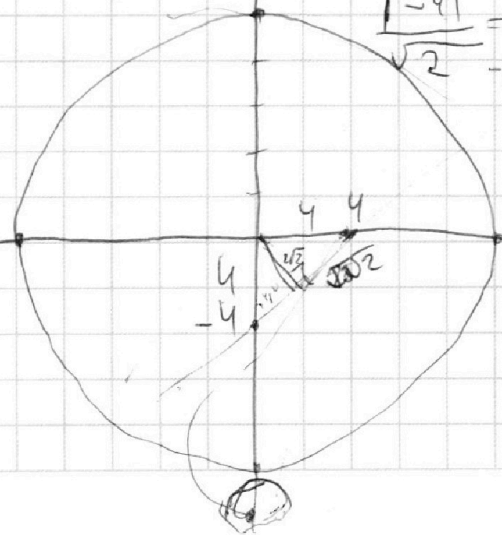
$$\frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$-\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} = y$$

$$|ax + by + c|$$

$$\frac{5x - b}{6a} = y$$

$$\frac{5}{6a}x - \frac{b}{6a} = y$$



$$\frac{|-b|}{\sqrt{5^2 + 6a^2}} = \frac{|-b|}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 5$$

$$|-54a| = \frac{149}{\sqrt{25 + 36a^2}} < 2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ab:  $2^6 3^{13} 5^{11}$

bc:  $2^4 3^{21} 5^{13}$

ac:  $2^{10} 3^{25} 5^{28}$

$\deg_2(a+b) \geq 6$

$\deg_2(b)+\deg_2(c) \geq 14$

$\deg_2(a)+\deg_2(c) \geq 16$

$\deg_2(a+b+c) \geq 18$

$\deg_3(a+b+c) \geq 29,5$

$\deg_5(a+b+c) \geq 26$

min:  $2^{18} \cdot 3^{29,5} \cdot 5^{26}$

$\deg_3(a)+\deg_3(b) \geq 13$

$\deg_3(b)+\deg_3(c) \geq 21$

$\deg_3(a)+\deg_3(c) \geq 25$

$2x+8=25$

$x=8,5$

$1 \frac{2}{3} \frac{32}{243} + \frac{810}{243} = \frac{842}{243}$

$\deg_5(a)+\deg_5(b) \geq 11$

$\deg_5(b)+\deg_5(c) \geq 13$

$\deg_5(c)+\deg_5(a) \geq 28$

$2x+2=28$   
 $x=13 \quad b=-2$

$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{EC}$

$a=2^4 \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$   
 $b=2^2 \cdot 3^0$

$\begin{array}{r} 311 \\ 2844 \\ \times 4 \\ \hline 11876 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1137691268 \\ -112681100 \\ \hline 10800 \end{array}$

$\frac{AC}{CF} = \frac{AD}{EF}$

$\frac{BC}{CB} = \frac{CF}{CE}$

$\frac{\sqrt{1,4}x}{\sqrt{0,4}x} = \sqrt{3,5}$

$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$

$BC^2 = AB \cdot BD$

$1,4x^2$

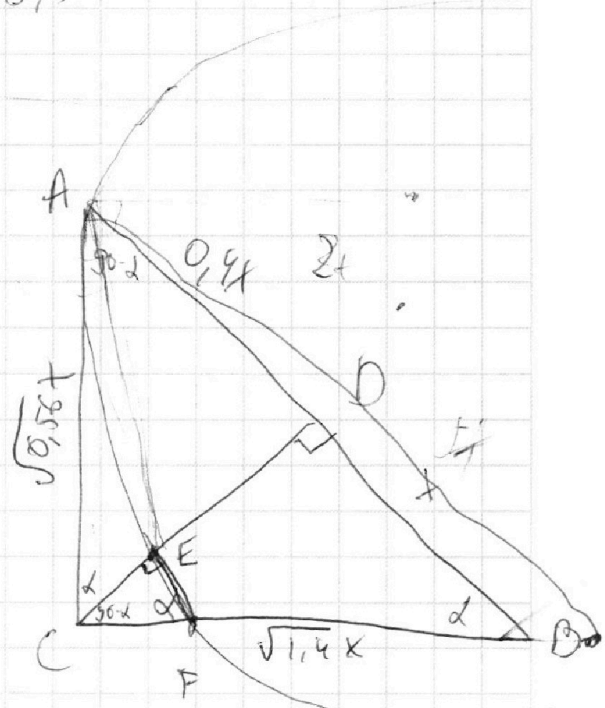
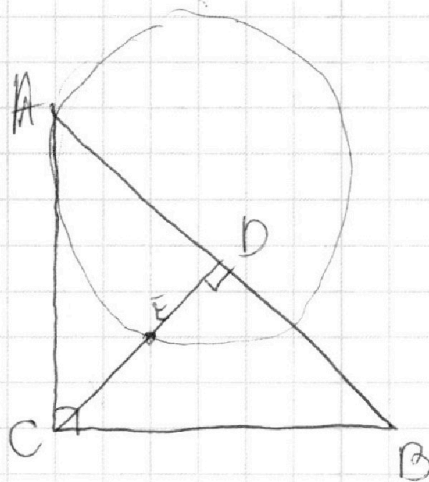
$BC = \sqrt{1,4}x$

$0,4x^2 = CD^2$

$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CB}$

$CD = x \cdot \sqrt{0,4}$

$S_{\Delta ACB} = 0,4x^2 \sqrt{0,4}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10\sqrt{1-x^2} = 9\sqrt{1-2x}$$

$$a\sqrt{t^5} + 5(a+t) = 0$$

Если  $a > 0$  /  $t < 0$

$$t^5 + 5t - \frac{16}{3} = 0 \quad t \geq 0 \quad t < 0$$

$$\frac{1}{3} t(t^4 + 5) = \frac{16}{3}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{14}y} \cdot \frac{7}{\sqrt{14}y} = y^2$$

$$(\sqrt{14}x - y)^2 = y^2$$

$$14x^2 - 2\sqrt{14}xy + y^2 = y^2$$

$$\sqrt{14}x(\sqrt{14}x - 2y) = 0$$

$$\sqrt{14}x = 2y$$

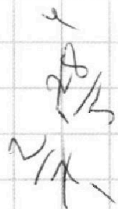
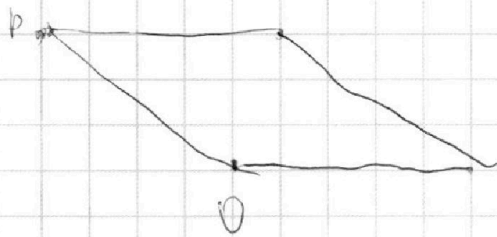
$$y = \frac{\sqrt{14}}{2}x$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{14}x}{7x} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$AC = \frac{\sqrt{14}}{7} AB$$

$$XF = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$



$$t = \frac{1}{3}$$

$$a = -b$$

$$\log_{11} x = b$$

$$x = 11^b$$

$$\log_{11} y = -b$$

$$0,5y = \frac{1}{11^b}$$

$$0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$$

$$\frac{7}{\sqrt{14}} Ay$$

