



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

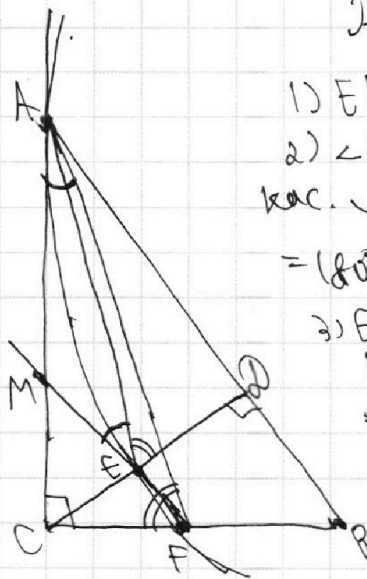
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№2:

Дано:
 $\triangle ABC$ — прям.
 $W(O; R)$ кас. AC в A
 $CD \perp AB$
 AB — медиан. $\triangle ABC$
 $W \cap CD = E$
 $W \cap BC = F$
 $AB \parallel EF$
 $\frac{AB}{BD} = 1,3$
 $\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = ?$



Решение:

- 1) $EF \cap AC = M$
- 2) $\angle CAF = \frac{1}{2} \widehat{AF}$ (как угол между кас. и хордой) $= \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{AF_{\text{внешн}}}) = (80^\circ - \angle AEF \text{ как впис.}) = \angle AEM$
- 3) $EF \parallel BD$
 $BD \perp CD$ $\Rightarrow CD \perp EF \Rightarrow \angle MED = 90^\circ \Rightarrow \angle AED = 90^\circ - \angle MEA = 90^\circ - \angle CAF$
- 4) Пусть $\angle CAF = \angle MGA = \alpha$. Тогда $\angle AED = 90^\circ - \alpha$

5) $\triangle ACF \angle C = 90^\circ$; $\angle CFA + \angle CAF = 90^\circ$ (по сумме углов в прям. тр-льнике) $\Rightarrow \angle CFA = 90^\circ - \alpha = \angle AED$

$\Rightarrow \angle CFA = 90^\circ - \alpha = \angle AED$

6) $\angle ACF = \angle EDA = 90^\circ$; $\angle CFA = \angle AED \Rightarrow \triangle CFA \sim \triangle AED$ (по двум углам) \Rightarrow

$\Rightarrow \frac{DE}{CF} = \frac{AD}{AC}$

7) $\triangle ACD (\angle C = 90^\circ)$: $\cos \angle CAD = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CF}$

8) $\triangle ACB (\angle C = 90^\circ)$: $\sin \angle CBA = \frac{AC}{AB} = \cos \angle CAD = \frac{DE}{CF}$

9) $\triangle BCD (\angle C = 90^\circ)$: $\frac{CD}{BC} = \sin \angle CBA = \frac{DE}{CF}$

10) $\angle CEF = \angle CPD = 90^\circ$; $\angle DCB$ — общий $\Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CPD$ (по двум углам) \Rightarrow

$\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CD}{BC} = \frac{DE}{CF} \Rightarrow CE = DE = \frac{CD}{2}$

11) $\triangle CEF \sim \triangle CDF \Rightarrow \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDF}} = \left(\frac{CE}{CF}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle CEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle CDF}$

12) $\frac{AD}{BD} = 1,3 \Rightarrow AD = 1,3BD \Rightarrow AD + BD = 1,3BD \Rightarrow AD = 0,3BD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CD = 0,3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD \Rightarrow S_{\triangle ACP} = 0,3 S_{\triangle CDP} \Rightarrow S_{\triangle ACP} = 0,3 \cdot 4 S_{\triangle CEF} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = 1,2$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№3:

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow 5\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{2} - 5 \arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{2} - 5x - 10\pi n = \frac{3\pi}{2} + x \\ -\frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi m \leq \frac{\pi}{2} \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{5\pi}{2} - 5\pi + 5x - 10\pi m = \frac{3\pi}{2} + x \\ -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x + 2\pi m \leq \frac{\pi}{2} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = \pi - 10\pi n \\ -\frac{\pi}{2} \leq x + 2\pi l \leq \frac{\pi}{2} \\ l \in \mathbb{Z} \\ 4x = 4\pi + 10\pi m \\ -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x + 2\pi m \leq \frac{\pi}{2} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi n \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi n + 2\pi l \leq \frac{\pi}{2} \\ l \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi m \\ -\frac{\pi}{2} \leq \pi - \pi + \frac{5}{2}\pi m + 2\pi m \leq \frac{\pi}{2} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi n \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \leq \frac{\pi}{2} \\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi m \\ -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi m}{2} \leq \frac{\pi}{2} \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi n \\ n = -2 \\ n = -1 \\ n = 0 \\ n = 1 \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi m \\ m = -1 \\ m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{10}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{6} - 0 \\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi \\ x = \pi - \frac{5}{2}\pi \\ x = \pi + 0 \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{4\pi}{2} \\ x = \frac{11\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6} \\ x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \pi \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\angle O_1QA = \angle O_2QB \text{ (как верт.)} \Rightarrow \sin \angle O_1QA = \sin \angle O_2QB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_1A}{O_1Q} = \frac{O_2B}{O_2Q} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{3}{7-x} \Rightarrow 14-2x=3x \Rightarrow 5x=14 \Rightarrow x=2,8$$

~~Условий~~ ^{Условий} коэфф. l_1 равен $\operatorname{tg} \angle O_2QB = \frac{O_2B}{BQ} = \frac{O_2B}{\sqrt{O_2Q^2 - O_2B^2}}$ (по теор. Пиф.) =

$$= \frac{3}{\sqrt{(7-x)^2 - 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{(7-2,8)^2 - 9}} = \frac{3}{\sqrt{17,64 - 9}} = \frac{3}{\sqrt{8,64}} = \frac{3}{\sqrt{6 \cdot 1,44}} = \frac{3}{1,2\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{6}}. \text{ ~~Условий~~ ^{Условий} коэфф. } l_2 \text{ равен } -\operatorname{tg} \angle O_2QB = -\operatorname{tg} \angle O_2QB \text{ (н.к.}$$

$$\angle O_2 - \text{вне-са} \angle B O_2 Q) = -\frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

Если условий коэфф. прямой больше ул. коэфф. l_1 или меньше ул. коэфф. l_2 , то эта прямая не может пересекать обе Ox -ти одновременно, значит, точек пересечения будет меньше 4 - не подходит.

Если условий коэфф. прямой равен ул. коэфф. l_1 или l_2 , то точек пересечения будет не больше двух (прямая не может ~~пересекать~~ ~~одновременно~~ ~~обе~~ ~~Ox -ти~~ ~~одновременно~~ ~~за исключением случая, когда она касается~~ ~~одной~~ ~~Ox -ти~~ - не подходит).

Для стандартной прямой ~~каждой~~ ~~типа~~ $y = cx + d$, где

$$-\frac{5}{2\sqrt{6}} < c < \frac{5}{2\sqrt{6}} \text{ найдётся такое } d, \text{ что точек пересечения будет 4.}$$

При любых $a \neq 0$ $\frac{7b}{3a}$ принимает все знач. ~~на~~ $(-\infty; +\infty)$ в зависимости от b , значит для наличия 4 точек перес. достаточно, чтобы

$$\begin{cases} -\frac{5}{2\sqrt{6}} < -\frac{1}{3a} \\ \frac{5}{2\sqrt{6}} > -\frac{1}{3a} \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{6}}{15a} < 1 \\ -\frac{2\sqrt{6}}{15a} < 1 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a > -\frac{2\sqrt{6}}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{2\sqrt{6}}{15} \\ a < -\frac{2\sqrt{6}}{15} \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}) \cup (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4:

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + 4y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

имеет 4 решения
при каких a ?

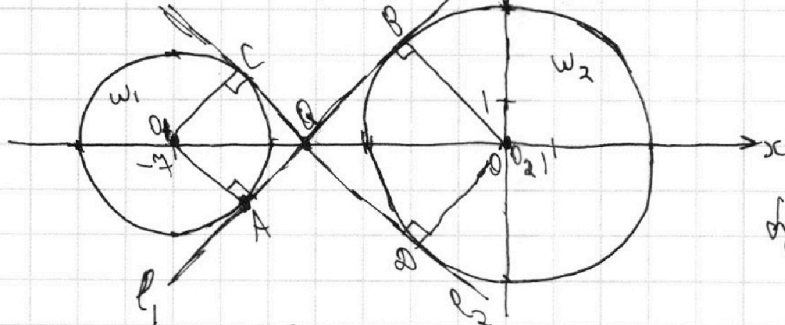
Решение:

$$(2): (x^2 + 14x + 4y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 14x + 4y^2 + 49 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 2^2 - \text{кр.-м. } w_1 \text{ с центром } (-7; 0) \text{ и радиусом } 2 \\ x^2 + y^2 = 3^2 - \text{кр.-м. } w_2 \text{ с центром } (0; 0) \text{ и радиусом } 3 \end{cases}$
график l_1 (1) — две пересекающиеся прямые w_1 и w_2

~~$x + 3ay - 7b = 0 \Leftrightarrow 3ay = -x + 7b$~~

~~$3ay = -x + 7b$~~



~~График~~
график l_1 (1) состоит
из двух точек
перес. с графиками
 l_2 (2), тогда и
система
будет иметь 4 решения.

$$(1): x + 3ay - 7b = 0 \Leftrightarrow 3ay = -x + 7b$$

Если $a = 0$, то $x = 7b$, l_1 — верт. прямая, 4 точки пересечения
либо не имеет — не подходит.

Если $a \neq 0$:

$$y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$$

Проведем две прямые l_1 и l_2 , касающиеся обеих осей w_1 и w_2 ,

l_1 кас. w_1 в м. A и w_2 в м. B ; l_2 кас. w_1 в м. C и w_2 в м. D ; $l_1 \cap l_2 = Q_1$

~~при этом~~ при этом условия коэфф. l_1 больше чем коэфф. l_2 .

Пусть O_1 — центр w_1 ; O_2 — центр w_2 . Тогда $Q_1 O_1$ — дуг-са

$\angle CQA$ (т.к. QC и QA кас. w_1) и $Q_2 O_2$ — дуг-са $\angle BQD$ (т.к. QB и QD кас. w_2),

при этом $Q \in O_1 O_2$, т.к. QO_1 и QO_2 — дуг-са верт.х. углов $\angle CQA$ и $\angle BQD$.

$$O_1 O_2 = \sqrt{(-7-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{49} = 7$$

Пусть $O_1 Q = x$. Тогда $O_2 Q = 7 - x$.

На одной странице можно оформлять **ТОЛЬКО одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 5:

$$1) \log_2(6x) - 2\log_6 4 = \log_{36} 2^3 4^3 - 4.$$

Пусть $t = \log_6 6x$. Тогда:

$$\begin{cases} 6x \neq 1 \\ t^4 - 2t^{-1} = \frac{3}{2}t^{-1} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{6} \\ t^4 - \frac{5}{2}t^{-1} + 4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$2) \log_4 y + 6\log_4 4 = \log_{16} 4^5 - 4$$

Пусть $p = \log_4 y$. Тогда:

$$\begin{cases} y \neq 1 \\ p^4 + 6p^{-1} = \frac{5}{2}p^{-1} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 1 \\ p^4 + \frac{7}{2}p^{-1} + 4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$3) x \neq \frac{1}{6}; y \neq 1:$$

$$(1) - (2) = p^4 - t^4 + \frac{7}{2p} + \frac{5}{2t} = 0 \Leftrightarrow (p-t)(p+t)(p^2+t^2) + \frac{7}{2p} + \frac{5}{2t} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Методом.

1. $a = 2$
 $b = 2$
 $c = 2$

$a = 2 \cdot 3 \cdot 5$

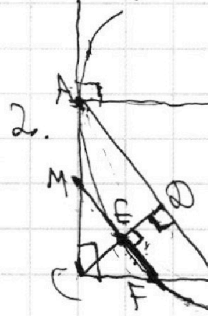
$b = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$c = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$a_1 + b_1 = 4$
 $a_1 + c_1 = 14$
 $b_1 + c_1 = 13$
 $a_1 + b_1 + c_1 = 17$
 $4, 3, 10$

$a_2 + b_2 = 11$
 $a_2 + c_2 = 17$
 $b_2 + c_2 = 15$
 $a_2 + b_2 + c_2 = 21,5$
 $4, 5, 10$

$a_3 + b_3 = 14$
 $a_3 + c_3 = 43$
 $b_3 + c_3 = 18$
 $a_3 + b_3 + c_3 = 37,5$



- 1. a
- 2. b
- 3. c
- 4. d

3. $5 \arccos(\cos \alpha) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

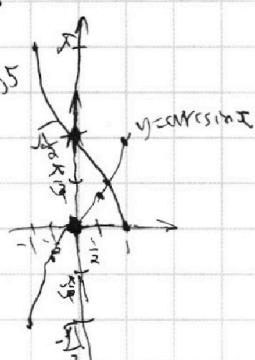
5. $(\frac{\pi}{2} - \arccos(\sin x)) = \frac{3\pi}{2} + x$

$5x = \frac{3\pi}{2} + x$

$4x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} + 2\pi n$
 $x = \frac{\pi}{8} + 2\pi n$
 $x = \frac{5\pi}{8} + 2\pi n$

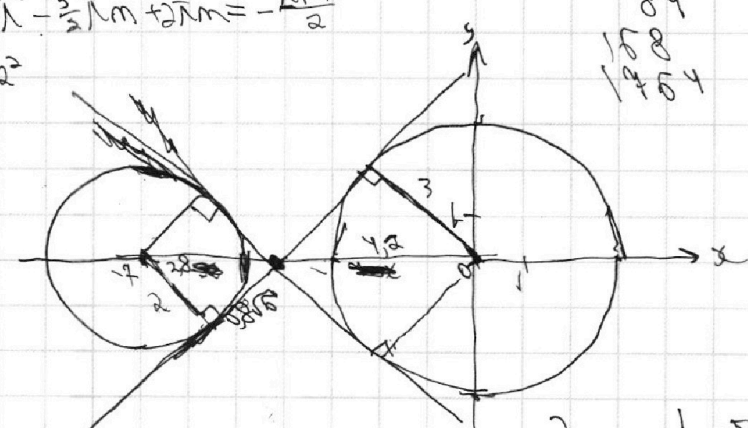


$\frac{\pi}{6} - \frac{5}{3}\pi n + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi + 2\pi n}{6}$

$\sqrt{6} - \sqrt{6} - \frac{5}{2}\pi m + 2\pi m = -\frac{\pi m}{2}$

$x^2 + 4y^2 + 45 = 0$
 $x^2 + y^2 - 9 = 0$
 $x + 3y - 78 = 0$
 $3ay = -x + 78$
 $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{78}{3a}$

$(x+7)^2 + y^2 = 2^2$
 $x^2 + y^2 = 3^2$

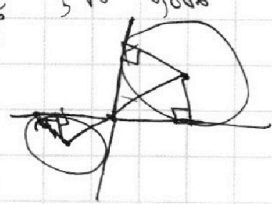


$\frac{3}{4-x} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow$
 $3x = 14 - 2x \Leftrightarrow 5x = 14 \Leftrightarrow$
 $x = 2,8$

$\sqrt{\frac{14}{5} - 4} = \sqrt{\frac{14 - 20}{5}} = \sqrt{\frac{-6}{5}}$

$0,8\sqrt{6} = \frac{1}{0,4\sqrt{6}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$

$54 \cdot 6 = 324$
 $324 + 4 = 328$
 $328 - 7,84 = 320,16$





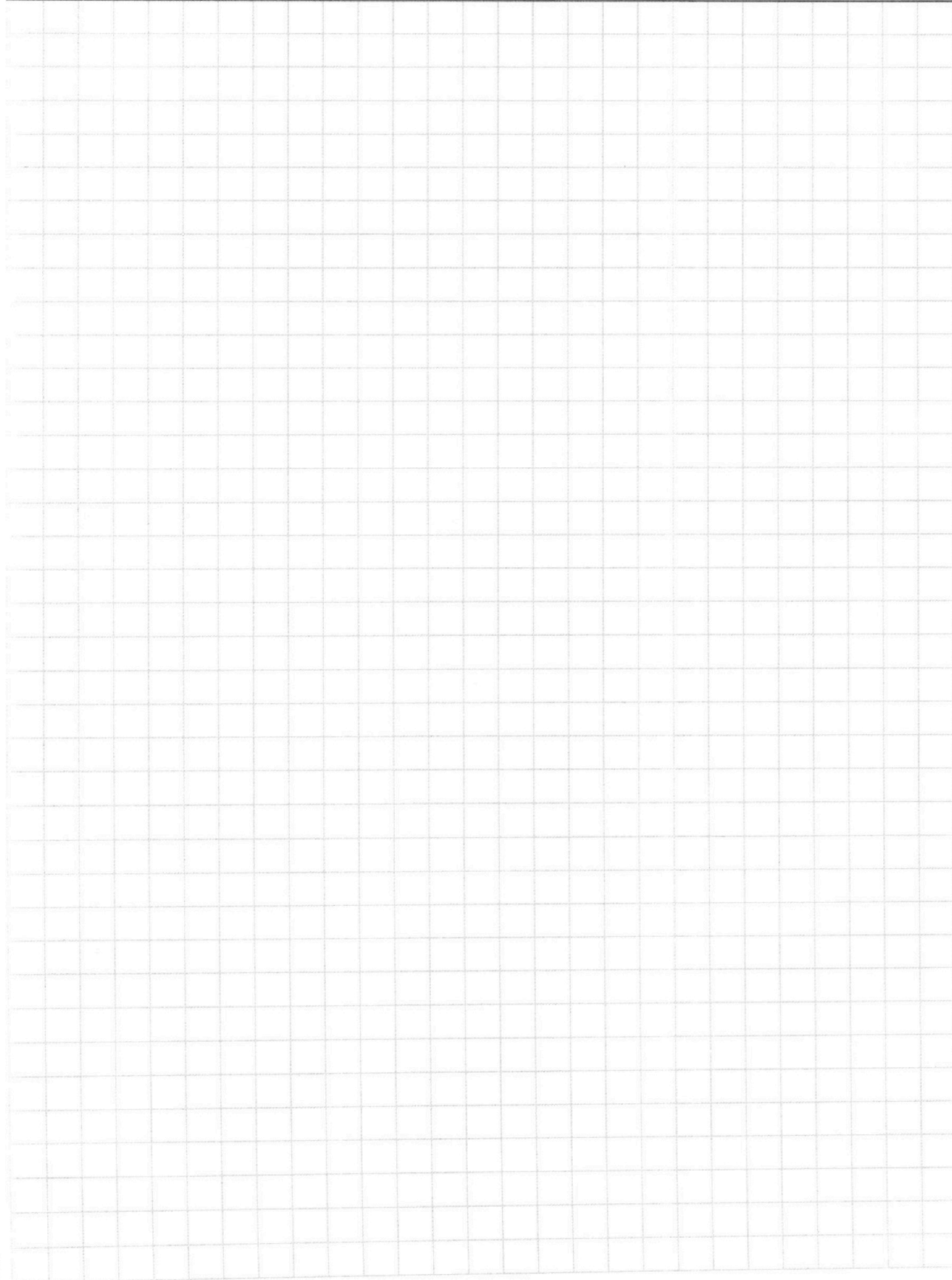
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

