



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



10 КЛАСС. Вариант 9

$a:k$  либо  $b:k$   
 $\frac{ab}{a+b} : k$  если  $k \neq 2$ , то  $\begin{cases} a:b \Rightarrow b:k \\ b:k \Rightarrow a:k \end{cases}$   
 $a+b : k$

1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{14}7^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{20}7^{37}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ . *34.66*
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$\frac{a+b}{(a+b) - 8ab}$  если  $\frac{a+b}{a^2 - 6ab + b^2}$   $(a,b) = 1$   $a+b:8$   
 $(8ab; a+b)$  четное

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

$(b-k)k = kb$   $k:b$   $8ab : a+b$   $8ab = k(a+b)$   $8$   $8ab = ka + kb$   
 $8ab = k(a+b)$   $k \geq ab$   $k = \frac{8ab}{a+b} \geq ab$   $8ab = k(a+b)$

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 1 и 5 соответственно.  $k=ab$   $a+b \leq 8$   $8 \geq a+b$   $8ab \leq (a+b)^2$

4. [5 баллов] Решите уравнение  $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 2 - 7x$ .  $\frac{5 \pm 1}{4}$   $\frac{3}{4}$   $1$   $0$   $\sqrt{5}$   $4 - 8$   $-5$   $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 7x = 2 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$   
 $25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$   $(2x-3)(x-1)$   $(2x-5)(x-1)$   $\sqrt{X}$   $8ab > 8a$   $a+b < 2a$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-12; 24)$ ,  $Q(3; 24)$  и  $R(15; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12$ .  $OK$   $y_2 - y_1$  - чётное  $0$   $x_2 - x_1 = 6$   $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 7x = 2 + \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

13 вариантов.  $\begin{cases} 2x_2 - 2x_1 \in [-24; 24] \\ ax - y + 10b = 0, \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$   $(\sqrt{a} - \sqrt{b}, \sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$   
 $\pm 0$  или  $\pm 1$  или  $\pm 2$  или  $\pm 3$  или  $\pm 4$  или  $\pm 5$  или  $\pm 6$  или  $\pm 7$  или  $\pm 8$  или  $\pm 9$  или  $\pm 10$  или  $\pm 11$  или  $\pm 12$  или  $\pm 13$  или  $\pm 14$  или  $\pm 15$  или  $\pm 16$  или  $\pm 17$  или  $\pm 18$  или  $\pm 19$  или  $\pm 20$  или  $\pm 21$  или  $\pm 22$  или  $\pm 23$  или  $\pm 24$

имеет ровно 2 решения.

$2x_1 + y_1 \in [20; 30]$ , с учетом  $e^{\frac{1}{2}}$

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 4,5 и 2.

$M$  и  $N$  норм.,  $AB$  не норм.

$\sqrt{r}$   $0 - \sqrt{5} = (0 - \sqrt{5}) \sqrt{5}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N1

Представим  $a = 2^{a_2} \cdot 7^{a_7} \cdot p_a$

$b = 2^{b_2} \cdot 7^{b_7} \cdot p_b$  где  $p_a, p_b, p_c$  не делятся

$c = 2^{c_2} \cdot 7^{c_7} \cdot p_c$  на 2 и на 7.

Тогда 1)  $ab = 2^{a_2+b_2} \cdot 7^{a_7+b_7} \cdot p_a \cdot p_b = 2^{14} \cdot 7^{10}$

Значит  $\begin{cases} a_2 + b_2 \geq 14 \\ a_7 + b_7 \geq 10 \end{cases}$

2)  $bc = 2^{b_2+c_2} \cdot 7^{b_7+c_7} \cdot p_b \cdot p_c = 2^{17} \cdot 7^{17}$

Значит  $\begin{cases} b_2 + c_2 \geq 17 \\ b_7 + c_7 \geq 17 \end{cases}$

3)  $ac = 2^{a_2+c_2} \cdot 7^{a_7+c_7} \cdot p_a \cdot p_c = 2^{20} \cdot 7^{37}$

Значит  $\begin{cases} a_2 + c_2 \geq 20 \\ a_7 + c_7 \geq 37 \end{cases}$

Нам нужно минимизировать  $abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 7^{a_7+b_7+c_7} \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c$

Т.к.  $p_a, p_b, p_c \in \mathbb{N}$ , то  $p_a = p_b = p_c = 1$  при минимальном  $abc$

Чтобы найти границы на  $a_2 + b_2 + c_2$  сложим нерав.

$\begin{cases} 2a_2 + 2b_2 + 2c_2 \geq 51 \\ 2a_7 + 2b_7 + 2c_7 \geq 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 25,5, \text{ так } a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}, \text{ то} \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 32 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 32 \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 37 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Т.К. } a_2, b_2, c_2 \geq 0 \\ \text{целые} \end{matrix} \quad \begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 \geq 26 \\ a_7 + b_7 + c_7 \geq 37 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{целые} \end{matrix}$$

Пример:  $a_2 = 8$        $a_7 = 19$

$c_2 = 12$        $b_7 = 0$

$b_2 = 6$        $c_7 = 18$

Проверим:  $a \cdot b = 2^{6+8} \cdot 7^{19+0} = 2^{14} \cdot 7^{19}$  - верно

$b \cdot c = 2^{6+12} \cdot 7^{0+18} = 2^{18} \cdot 7^{18}$  - верно

$a \cdot c = 2^{8+12} \cdot 7^{19+18} = 2^{20} \cdot 7^{37}$  - верно

~~Ответ: abc~~

Итого: минимальный  $abc = 2^{a_2+b_2+c_2} \cdot 7^{a_7+b_7+c_7} = 2^{26} \cdot 7^{37}$

Ответ:  $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2

Если  $\frac{a}{b}$  - несократима, то  $a$  и  $b$  - взаимнопросты.

Пусть  $m$  - наибольшее число, при котором мы достигнем результата; разделим  $m$  на простые делители, пусть  $p$  - наибольший простой делитель, неравный двум, тогда.

$$\begin{cases} a+b \div p \\ a^2 - 6ab + b^2 \div p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \div p \\ (a+b)^2 - 8ab \div p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b \div p \\ 8ab \div p \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b \div p & (2) \\ 2^3 ab \div p & (1) \end{cases}$$

(1) Т.к.  $p \neq 2$  и  $p$  - простое, то

$$\begin{cases} a \div p \\ b \div p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \div p \\ a \div p \end{cases} \text{ , если } a \div p, \text{ то } b \div p \text{ и наоборот, это является тривиальным утверждением существования.}$$

Значит число  $m$  вида  $m = 2^d$

1) ~~оба~~ ~~одни~~ четные: такое не может, т.к. они не будут взаимнопростыми

2)  $a$  - четное,  $b$  - нечетное  $\Rightarrow a+b$  - нечетное  $\Rightarrow m_{\max} = 1$   
и наоборот

3) ~~и~~  $a$  и  $b$  нечетные, тогда  $a$  и  $m$  - взаимнопростые  
 $b$  и  $m$  - взаимнопростые  $\Rightarrow 8 \div m$   
Тогда  $2^3 \cdot a \cdot b \div 8m$  при  $m_{\max} = 8$ , где  $d \leq 3$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

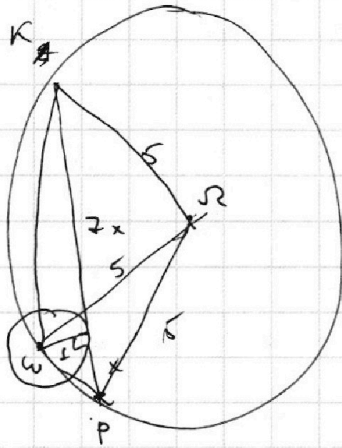
1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



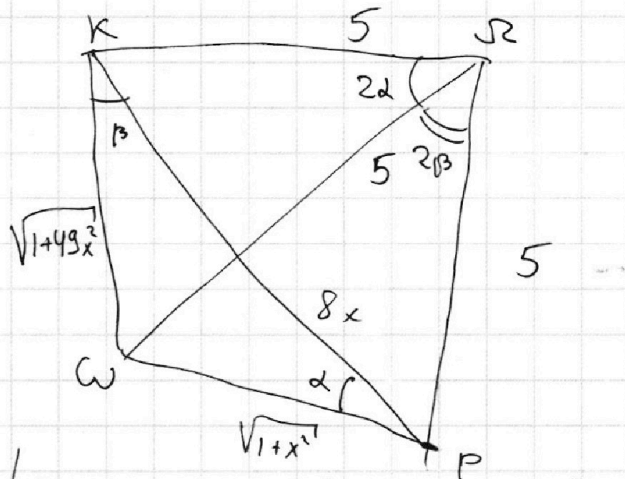
N3



$$\omega P = \sqrt{1+x^2}$$

$$\omega K = \sqrt{1+(7x)^2} = \sqrt{1+49x^2}$$

Работаем с треугольником:



Теор. кос. в  $\triangle WKP$

$$1+x^2 = 64x^2 + 1+49x^2 -$$

$$- \frac{16x\sqrt{1+49x^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{10} \cos \beta$$

$$x^2 x^2 = 16x\sqrt{1+49x^2} \cos \beta$$

$$1+x^2 = \sqrt{1+49x^2} \cdot \cos \beta$$

$$\frac{49x^2}{1+49x^2} = \frac{99-x^2}{100}$$

$$4900x^2 = 99 + 49 \cdot 99x^2 - 99x^2 \text{ т.к. } x > 0$$

$$50x^2 + 49x^4 = 99 \Rightarrow x=1 \Rightarrow AB=8x=8 \text{ Ответ: } 8$$

Теор. кос. в  $\triangle WRP$

$$1+x^2 = 25 - 2 - 25 \cdot 2 \cdot \cos 2\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{49-x^2}{50} = 2\cos^2 \beta - 1 \Rightarrow$$

$$\cos \beta = \cos \beta = \sqrt{\frac{99-x^2}{100}}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \beta = \frac{99-x^2}{100}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$$

Пусть  $\sqrt{a} = \sqrt{2x^2-5x+3}$

$$a = 2x^2 - 5x + 3$$

$$\sqrt{b} = \sqrt{2x^2+2x+1}$$

$$b = 2x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow a - b = 2 - 7x$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = a - b$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0 & (1) \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2x^2+2x+1}, \text{ при } 2x^2+2x+1 \geq 0$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 + 2x + 1$$

$$x = \frac{2}{7}$$

подставляем для проверки

$$\sqrt{2\left(\frac{2}{7}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{7} + 3} = \sqrt{\frac{8}{49} - \frac{70}{49} + \frac{147}{49}} = \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$$\sqrt{2\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{7} + 1} = \sqrt{\frac{8}{49} + \frac{28}{49} + \frac{49}{49}} = \sqrt{\frac{85}{49}} = \frac{\sqrt{85}}{7}$$

$x = \frac{2}{7}$  - решение.

$$(2) \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{b} \text{ наименьшее } b \text{ min}$$

$$2x^2 + 2x + 1 \times b = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\sqrt{a} = 1 - \sqrt{b} \Rightarrow a = 1 - 2\sqrt{b} + b, \text{ при } \sqrt{a} \geq 0, 1 - \sqrt{b} \geq 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$   
 $2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 7x - 1$  возведем в квадрат при  $x \geq \frac{1}{7}$   
 $4(2x^2 + 2x + 1) = 49x^2 - 14x + 1$   
 $8x^2 + 8x + 4 = 49x^2 - 14x + 1$   
 $41x^2 - 22x - 3 = 0$   
 $D = 22^2 + 4 \cdot 3 \cdot 41 = 2^2(11^2 + 41 \cdot 3) = 2^2(121 + 123) = 2^2 \cdot 244 = 4^2 \cdot 61$   
 Т.к.  $\sqrt{a} = 1 - \sqrt{b}$ , то  $1 - \sqrt{b} \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \sqrt{b} \Rightarrow 1 \geq b \geq 0$

1)  $1 \geq b$   
 $1 \geq 2x^2 + 2x + 1$

$(x+1)(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 0]$  - чтобы выполнялся  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$

2)  $b \geq 0$   
 $2x^2 + 2x + 1 \geq 0$

$D = 4 - 2 \cdot 4 < 0$ , т.к.  $2 > 0 \Rightarrow$  парабола с ветвями вверх,  $D < 0 \Rightarrow b > 0$  всегда.

Следовательно  
 $a = 1 - 2\sqrt{b} + b$

$2x^2 - 5x + 3 = 1 - 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 2x^2 + 2x + 1$

$2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = (7x - 1) : 2 \Rightarrow 7x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{7}$   
 $x \in [-1; 0] \Rightarrow \emptyset$

Значит единственное решение  $x = \frac{2}{7}$

Ответ:  $\frac{2}{7}$





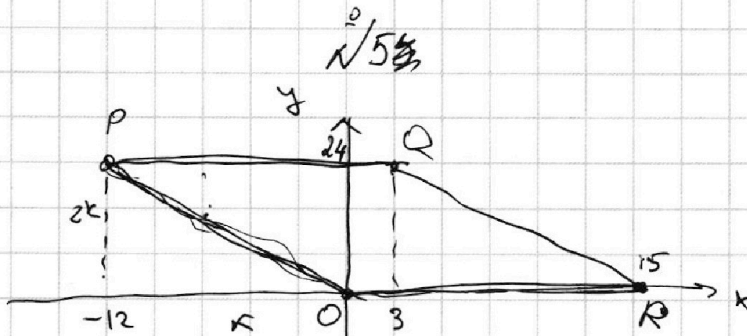
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

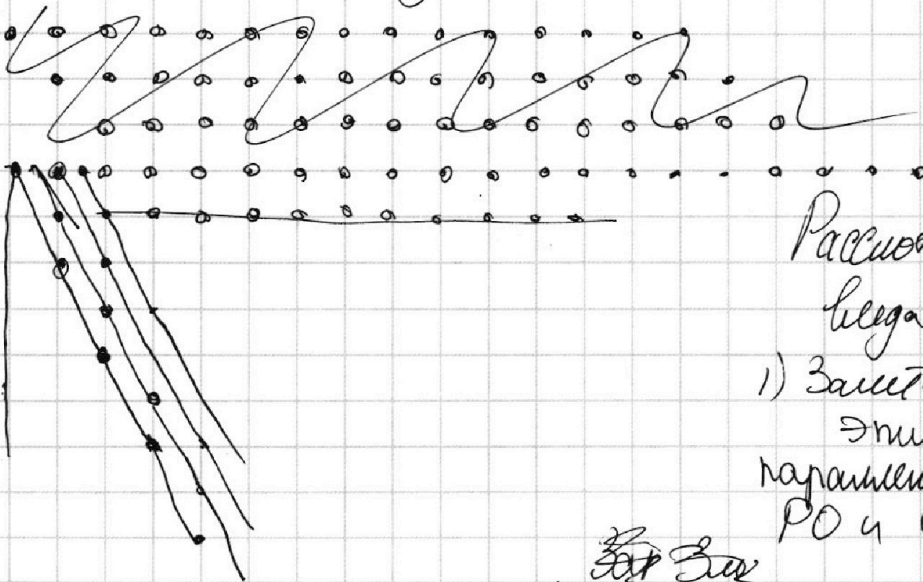
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Заметим, что все ~~к~~ прямые в каждой ряду имеют  
 15 точек, т.к.  $OP_x = 12$ ,  $OP_y = 24$   
 $\frac{OP_y}{OP_x} = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  параллелограмм ~~всегда~~ макс.



Рассмотрим прямые  
 всегда  $2x+y = \text{const} = c$

1) Заметим, что  
 эти прямые  
 параллельны отрезкам  
 PQ и QR параллельны.

~~Затем~~

2) рассмотрим кол-во таких прямых

$$c \in [0; 15 \cdot 3] \Rightarrow \mathbb{Z}$$

$$c \in [0; 30] \text{ назовем отрезок}$$

сеточной ширины  $c$  - это, конечно, если  $c$  - число.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

В ~~сетках~~ сегментах кол-во точек  $\frac{24}{2} + 1 = 13$

В клетчатых сегментах кол-во точек  $\frac{24}{2} = 12$

Теперь рассмотрим выражение, которое дано в  
условии:  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 12 \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_2 - c_1 = 12, \text{ значит}$$

мы можем выбрать любую точку из <sup>сегмента</sup> ~~сегмента~~  
и любую точку из второй <sup>сегмента</sup> ~~прямой~~.

Заметим, что ~~это~~  $12:2 \Rightarrow c_2 - c_1:2 \Rightarrow$  значения  $y$

$c_1$  и  $c_2$  одинаковы.

~~тогда~~ рассмотрим  $c_1$ ,  $c_{1, \max} = 30 - 12 = 18 \Rightarrow$

$$c_1 \in [0; 18], c_2 \in [12; 30]$$

\*) посчитаем сколько пар сетчатых сегментов.  $\frac{18}{2} + 1 = 10$

пар клетчатых сегментов:  $\frac{18}{2} = 9$

1) для каждой пары сетчатых сегментов мы можем выбрать

1 точку из 1 сегмента и 1 точку из 2 сегмента

$$\text{кол-во вариантов } 13 \cdot 13 = 169$$

получим на кол-во пар  $169 \cdot 9 = 1521$

2) теперь рассмотрим ~~только~~ клетчатые сегменты



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Для каждой пары соседних отрезков мы должны  
выбрать 1 точку из 1-го отрезка и 1 точку из 2-го  
отрезка  $12 \cdot 12 = 144$

Всего пар 9

Значит  $9 \cdot 144 = 1296$

Суммируя по сути, это кол-во  
вариантов выбрать 2 точки равно

$$1521 + 1296 = 2817$$

Ответ: 2817.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

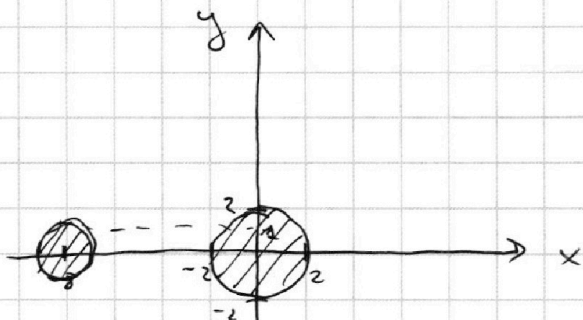
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0 \end{cases}$$

1)  $(x+8)^2 + y^2 - 1 \leq 0$  - круг с <sup>(заполняем)</sup> центром  $O(-8; 0)$  и радиусом 1

2)  $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$  - круг с <sup>(заполняем)</sup> центром  $O(0; 0)$  и радиусом 2



3) чтобы  $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$ , то

3.1) точка принадлежит одной из окружностей

3.2) точка принадлежит обоим кругу, т.к. круги

не накладываются ~~на~~ друг на друга  
4) Значит <sup>решения</sup> ~~решения~~ ур-на  $((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) \leq 0$

является два круга ~~с окружностями~~.

5) Рассмотрим  $ax - y + 10b = 0 \Rightarrow y = ax + 10b$  - уравнение этой прямой.

Задача сводится к тому, чтобы понять когда пересечения линии с 2 кругами даёт 2 точки

5.1) Рассмотрим случаи пересечения с двумя кругами.

Заметим, что если прямая касается круга, то 1 решение, если прямая пересекает ~~круг~~ <sup>круг</sup>, то решений будет 2 ~~точки~~ <sup>точки</sup>  $\Rightarrow$  бесконечно много точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

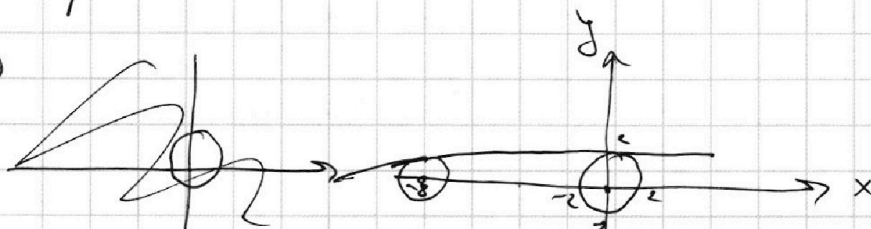
**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



1) одной окружности прямая может быть только 2 касания, т.е. одно решение, значит, если решили 2, то линия еще врезается касаясь 2-х окружностей, найдите  $a$ , т.е. коэф. наклона данной прямой.

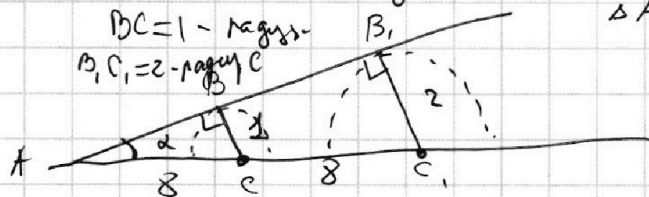
1сл.)



$CC_1 = 8$  - расстояние между центрами

$BC = 1$  - радиус

$B_1C_1 = 2$  - радиус

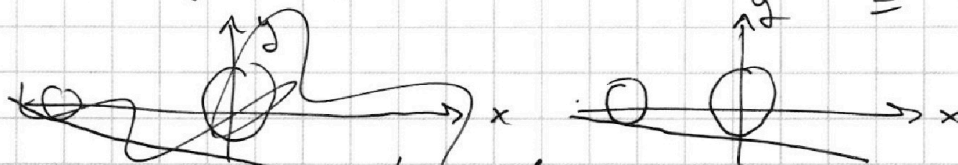


$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \Rightarrow$

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{AC + AC_1}{AC} \Rightarrow$$

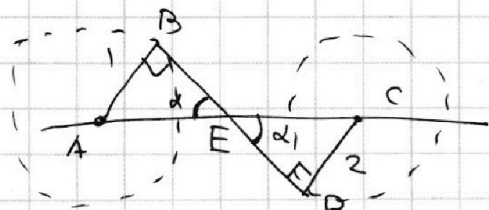
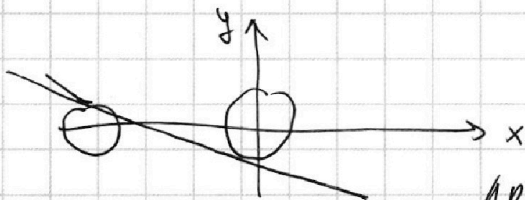
$$2 \cdot \frac{CC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} - 1 \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{1 - (\frac{1}{8})^2}} = \frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{63}} = \frac{1}{3\sqrt{7}}$$



Тогда  $a = -\frac{1}{\sqrt{63}} = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$

2сл.)



$AB = 1$  - радиус

$CD = 2$  - радиус

$AC = 8$

$\triangle ABE \sim \triangle CDE$

$AE = 8 - CE$

$$\frac{AB}{AE} = \sin \alpha = \frac{CD}{CE} \Rightarrow$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

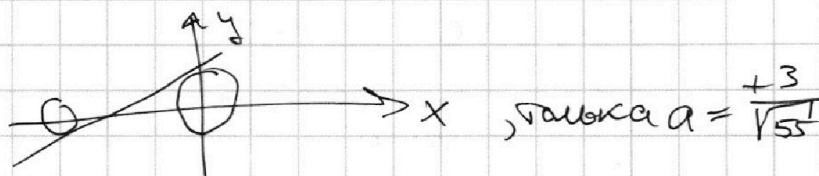
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE} = \frac{CE}{8-CE}$$

$$2 = \frac{CE}{8-CE} \Rightarrow 16 = 3CE \Rightarrow CE = \frac{16}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\frac{16}{3}}{8} = \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

а  $\angle$  тангенс острый равен  $a = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$   
Положительное ~~или отрицательное~~ значение ~~или отрицательное~~ угла



Кроме:  $a = \frac{1}{3\sqrt{7}}$ ;  $a = -\frac{1}{3\sqrt{7}}$ ;  $a = \frac{3}{\sqrt{5}}$ ;  $a = -\frac{3}{\sqrt{5}}$  где  $\sqrt{5}$  и  $\sqrt{7}$

из этих вариантов ответа найдем  $\sqrt{5}$  и  $\sqrt{7}$ ,

чтобы прямая касалась двух окружностей!

Ответ:  $\frac{1}{3\sqrt{7}}$ ;  $-\frac{1}{3\sqrt{7}}$ ;  $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ;  $-\frac{3}{\sqrt{5}}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$       $64x^2 = 50 - 50 \cos 2\alpha$   
 $\cos \alpha = \cos 2\alpha = 4\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$   
 $\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$   
 $d = \frac{\sqrt{\cos 2\alpha + 1}}{2}$

$\sqrt{\frac{25 - 16x^2}{5}}$

$\sqrt{25 - \frac{49}{4}x^2}$

$\cos(d+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta =$

$64x^2 = 2 + 50x^2$

$1 + x^2 = 50 - 50 \cos \alpha$   
 $64x^2 = 50 - 50(\cos \alpha + \beta)$

$1 + 49x^2 = 50 - 50 \cos \beta$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.  
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

