



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 11

Ясно, что т.к. нам нужно наименьшее
произведение, то среди делителей a, b, c
не должно быть других чисел, кроме 2, 3, 5.
Тогда представим ~~мы~~ a, b, c след. образом:

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$b = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3}$$

$$c = 2^{c_1} \cdot 3^{c_2} \cdot 5^{c_3}$$

Значит из условий получим следующее

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + b_1 \geq 9 \\ a_1 + c_1 \geq 19 \\ b_1 + c_1 \geq 14 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 42$$

\Downarrow
 $a_1 + b_1 + c_1 \geq 21$

$$\left. \begin{array}{l} a_2 + b_2 \geq 10 \\ b_2 + c_2 \geq 13 \\ a_2 + c_2 \geq 18 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 41$$

$a_2 + b_2 + c_2 \geq 20,5$

$$\left. \begin{array}{l} a_3 + b_3 \geq 10 \\ b_3 + c_3 \geq 13 \\ a_3 + c_3 \geq 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 53$$

$a_3 + b_3 + c_3 \geq 26,5$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что т.к. a, b и c натуральные, то степеням y их множителей тоже натуральные, а значит получаем

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 \geq 21 \\ a_2 + b_2 + c_2 \geq 21 \\ a_3 + b_3 + c_3 \geq 24 \end{cases}$$

~~наименьшее значение достигается~~
~~при $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 5$~~

$a_1 + b_1 + c_1 = 21$ и выполнение всех условий достигается при $a_1 = 4$
 $b_1 = 2$
 $c_1 = 15$

$a_2 + b_2 + c_2 = 21$ и выполнение всех условий достигается при $a_2 = 8, b_2 = 2, c_2 = 11$

Поскольку из того, что a, c делится на $2 \cdot 3 \cdot 5$,

$a_3 + c_3 \geq 30 \Rightarrow$ ~~выполнение~~ $a_3 + c_3 = 30$ и выполнение всех условий достигается при $a_3 = c_3 = 15; b_3 = 0 \Rightarrow$

\Rightarrow наименьшее значение $abc = 2^{a_1+b_1+c_1} \cdot 3^{a_2+b_2+c_2} \cdot 5^{a_3+b_3+c_3} = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) $\text{am } -\pi \text{ go } 0:$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

4) $\text{am } 0 \text{ go } \pi:$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi = 6x$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

5) $\text{am } \pi \text{ go } 2\pi:$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x - \frac{3\pi}{2}$$

$$5\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = 3\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{4}$$

Ответ: $x_1 = -\frac{3\pi}{2}$

$$x_2 = -\frac{4\pi}{3}$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2}$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}$$

$$x_5 = \frac{3\pi}{4}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №3
аргумента $5 \arcsin(\cos x) = 5 \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$

может принимать значения в промежутке $[-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3\pi \leq x \leq 2\pi$$

рассмотрим как раскрывается ~~$\arcsin(\frac{\pi}{2} - x)$~~
 $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x))$ в зависимости от x :

1) от -3π до -2π :

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = \frac{5\pi}{2} + x \Rightarrow \text{решим уравн.}$$

$$5(\frac{5\pi}{2} + x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -12\pi$$

$$x = -3\pi$$

2) от -2π до $-\pi$:

$$\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) = -x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(-x - \frac{3\pi}{2}) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = -8\pi$$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если модуль касат. касательной прямой
будет больше, то как бы мы не двигаем
эту прямую, она не пересечет обе окр.

Из подобия $\triangle O_1BA$ и $\triangle O_2CA$ можно найти
координ. т. А: $\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow A\left(\frac{18}{5}; 0\right)$

$$\cos \angle BO_1A = \frac{O_1B}{O_1A} = \frac{5}{6} \Rightarrow B_x = \frac{5}{6} \cdot 3 = \frac{5}{2}$$

$$B_y = \sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \text{касат. кас. прямой}$$

$$\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} = \frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\frac{18}{5} - \frac{5}{2}} = \frac{-20}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{40}{\sqrt{11}}$$

у второй обшей касат. тоже самое,
только другой знак $\Rightarrow \frac{20}{\sqrt{11}} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a_2 = -\frac{40}{\sqrt{11}}$

$$\Rightarrow \text{ответ: } \left(-\frac{40}{\sqrt{11}}; \frac{40}{\sqrt{11}}\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

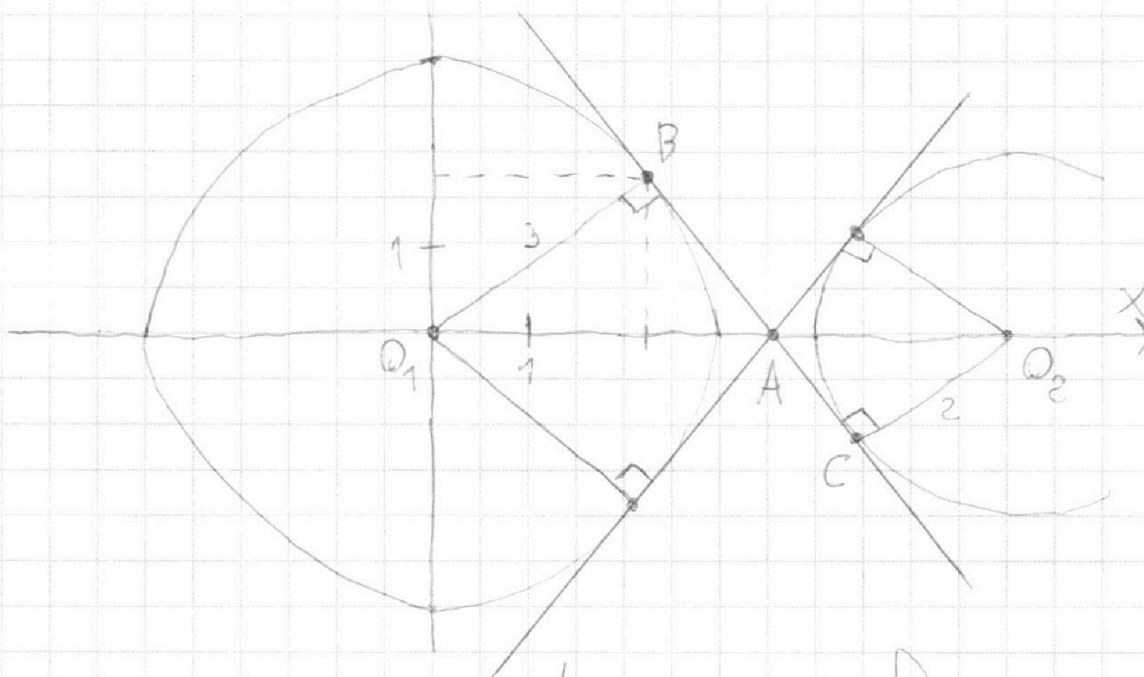
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \Rightarrow \text{прямая } y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2} \\ [(x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)]=0 \end{cases}$$

\Downarrow \Uparrow $\rightarrow y^2 + (x-6)^2 = 2^2$



То, что параметр b может быть любой значит что мы можем вращать прямую вверх-вниз. и решения будет когда прямая пересекает обе окружности. На рисунке изображен случай когда прямая касается окружностей.

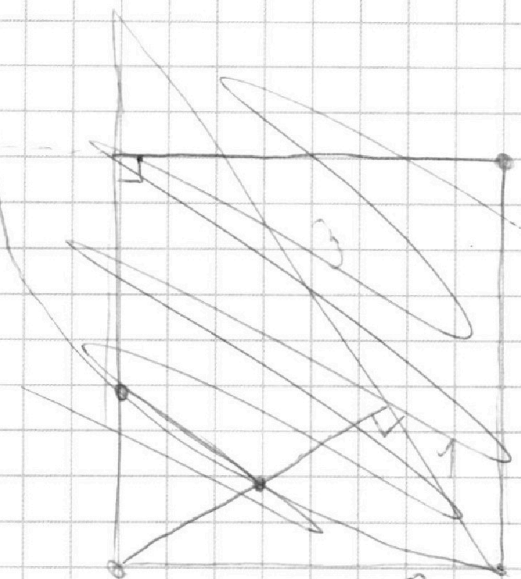
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 15

первое равенство преобразуется в

$$\log_3^4 x + \frac{4}{2} \log_3 x + 8 = 0 \Rightarrow \log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{4}{2} = 0$$

второе в

$$\log_3^4 5y - \frac{4}{2} \log_3 5y + 8 = 0 \Rightarrow \log_3^5 5y + 8 \log_3 5y - \frac{4}{2} = 0$$

\Rightarrow обе функции убывающие $\Rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \log_3 x \\ k = \log_3 5y \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow t^5 + k^5 + 8(t+k) = 0 \Rightarrow$ каждому значению t соответствует лишь одно знач. k и это $t = -k$

$$8 \log_3 x + 8 \log_3 5y = 0$$

$$\log_3 x + \log_3 5y = 0 \Rightarrow 5xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\left. \begin{aligned} A_y = 0 &\Rightarrow 0 = -3A_x + 33 \Rightarrow A_x = 11 \\ B_y = 42 &\Rightarrow 42 = -3B_x + 33 \Rightarrow B_x = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

~~A~~ A(11; 0); ~~B(42; 3)~~ B(-3; 42)

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 744 \\ -128 \\ \hline 16 \end{array}$$

$y = -3x + 33 \Rightarrow$ если целый x , то целый y

$$\frac{a^2 x^2}{4} - \frac{3abx}{2} + \frac{9b^2}{4} + x^2 = 9$$

$$x^2 \left(\frac{4+a^2}{4} \right) - x \cdot \frac{3ab}{2} + \frac{9b^2}{4} - 9 = 0$$

$$D=0 = \frac{9a^2 b^2}{4} - \frac{(4+a^2)(9b^2 - 36)}{4}$$

$$9a^2 b^2 - 36b^2 - 9a^2 b^2 + 36a^2 + 144 = 0$$

$$4 - b^2 - a^2 = 0$$

$$x^2 \left(\frac{4+a^2}{4} \right) - x \cdot \left(\frac{3ab}{2} - 12 \right) + \frac{9b^2}{4} + 32 = 0$$

$$D=0 = \frac{9a^2 b^2}{4} + 236ab + 144 - \frac{(4+a^2)(9b^2 + 128)}{4}$$

$$36ab + 144 - 9b^2 - 32a^2 - 128 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab = 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$a = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3}$$

$$a_1 + b_1 \geq 9$$

$$a_2 + b_2 \geq 10$$

$$a_3 + b_3 \geq 10$$

$$a_1 + b_1 \geq 9$$

$$b_1 + c_1 \geq 14$$

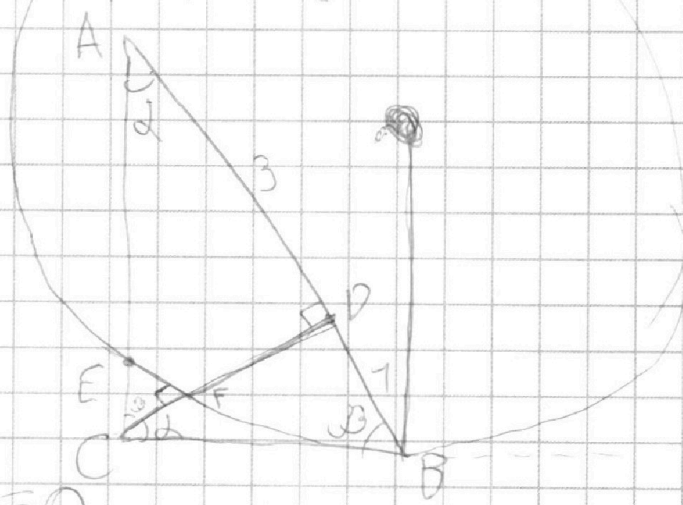
$$a_1 + c_1 \geq 19$$

b	a	c
2	8	11

$$\frac{\text{tg} \alpha}{\text{tg} \beta} = 3$$

$$2(a_1 + b_1 + c_1) \geq 12$$

$$a_1 + b_1 + c_1 \geq 2 \quad \text{or} \quad 1$$



$$\log_3^4 x + \frac{1}{2} \log_x 3 + 8 = 0$$

$$\log_3^4 5y - \frac{1}{2} \log_{5y} 3 + 8 = 0$$

$$\Delta y = -3 \Delta x + 33$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 2\pi n + t - \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$2\pi = 2\pi n + 6t$$~~

~~$$-6t = 2\pi(n-1)$$~~

~~$$t = \frac{\pi k}{3} \quad 0 - \pi:$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$2\pi = 6x$$~~

~~$$x = \frac{\pi}{3}$$~~

~~$$\pi - 2\pi:$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} + x - 2\pi\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$4x = 8\pi$$~~

~~$$x = 2\pi$$~~

$$-\frac{5\pi}{2} \geq 5 \arcsin \geq \frac{5\pi}{2}$$

$$-3\pi \geq x \geq 2\pi$$

$$\cos x = \cos t$$

$$x = \pm t + 2\pi n$$

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -t + 2\pi n + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$2\pi = 2\pi n + 4t$$~~

~~$$-4t = 2\pi(n-1)$$~~

~~$$t = -\frac{\pi k}{2}$$~~

~~$$-\pi - 0:$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$4x = -2\pi$$~~

~~$$x = -\frac{\pi}{2}$$~~

~~$$-2\pi - \pi:$$~~

~~$$5\left(-x + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$6x = -8\pi$$~~

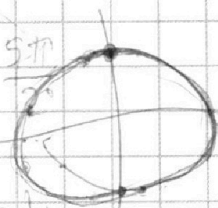
~~$$x = -\frac{4\pi}{3}$$~~

~~$$-3\pi - 2\pi:$$~~

~~$$5\left(\frac{\pi}{2} + x + 2\pi\right) = x + \frac{\pi}{2}$$~~

~~$$4x = -12\pi$$~~

~~$$x = -3\pi$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



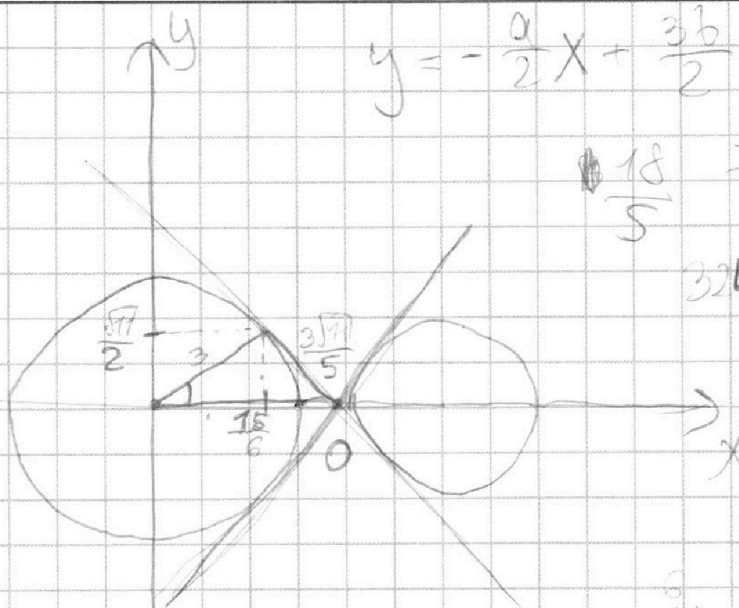
$$\frac{324}{56}$$

$$\frac{99}{36} + \frac{125}{36}$$

$$y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$$

$$\frac{18}{5} \quad \frac{3\sqrt{11}}{5}$$

$$324 -$$



$$\left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 + x^2 = 9$$

$$\left(-\frac{ax}{2} + \frac{3b}{2}\right)^2 + x^2 - 12x + 36 = 4$$

$$\frac{a^2 x^2}{4} - \frac{3abx}{2} + \frac{9b^2}{4} + x^2 = 9$$

$$\log_3^4 x + 8 = -\frac{4}{2} \log_3 x$$

$$-\log_3^5 x + 8 \log_3 x + \frac{4}{2} = 0$$

$$\log_3^5 5y + 8 \log_3 5y - \frac{4}{2} = 0$$

$$\log_3^5 x = \log_3^5 5y +$$

$$x^5 + 8x + \frac{4}{2} = 0$$

$$y^5 + 8y + \frac{4}{2} = 0$$

$$\Delta y = -42 - 42$$

$$\Delta x = -20 - 20$$

$$\frac{18}{5} \quad \frac{15}{6} = \frac{108 - 45}{30} = \frac{11}{10}$$

$$x^5 + y^5 + 8(x+y) = 0$$

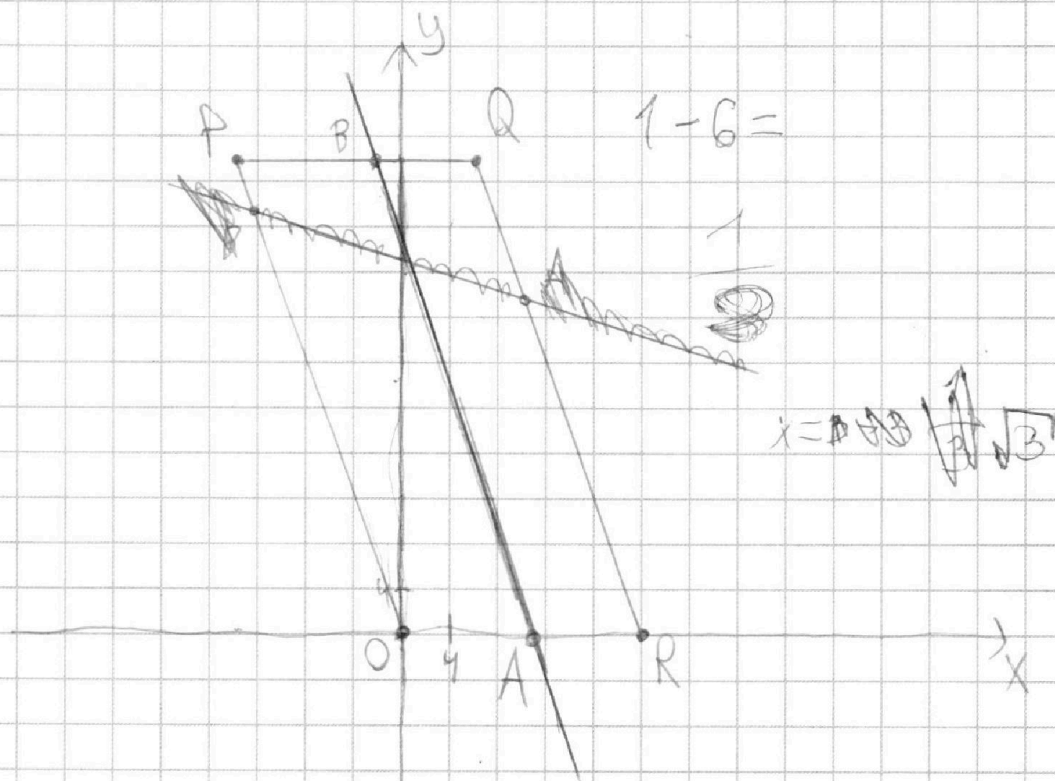
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



уравнение $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ можно
представить в виде $\Delta y = -3\Delta x + 33$, а
значит y эту удовлетворяют все
точки, лежащие на прямой (подчеркнуто)
 $y = -3x + 33$, проведем ее на рисунке.

~~уравнение прямой QR имеет вид $y = 3x + 33$~~
~~из координат этих точек~~
Найдём координаты A и B - точек пере-
сечения нашей прямой с OR и PQ соответственно.