

$c=$

$a+b+c \geq 38$

$a+b \geq 14$

$b+c \geq 18$

$a+c \geq 17$

$c=$

$c=11$

$b=4$

$a=4$



$$\begin{array}{r} 14 \\ +18 \\ \hline 32 \\ +43 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



$$\begin{array}{r} a+b=7 \\ b+c=13 \\ a+c=14 \end{array}$$

2^{17}

$$\begin{array}{r} 20 \\ +20 \\ \hline 40 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ +15 \\ +13 \\ \hline 43 \end{array}$$

$a+b+c \geq 22$

$$\begin{array}{r} a+b \geq 11 \\ b+c \geq 15 \\ a+c \geq 17 \end{array}$$

1. [4 балла] $a+b+c=17$ $a+b+c \geq 22$ $a+b \geq 11$ $b+c \geq 15$ $a+c \geq 17$ $a+b+c \geq 38$ $a+b \geq 14$ $b+c \geq 18$ $a+c \geq 17$ $c=11$ $b=4$ $a=4$ $a+b+c \geq 22$ $a+b \geq 11$ $b+c \geq 15$ $a+c \geq 17$ $a+b+c=17$ [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

$c=10$

$a=4$

$b=3$

$+13$

$$\begin{array}{r} 15 \\ +12 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ +11 \\ \hline 43 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +18 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ +43 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .

$$\begin{array}{r} 14 \\ +18 \\ +43 \\ \hline 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ +12 \\ \hline 26 \end{array}$$

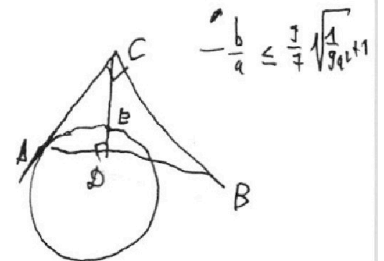
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

$$\begin{array}{r} 14 \\ -14 \\ \hline 0 \\ 15 \\ \times 4 \\ \hline 60 \end{array}$$



5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

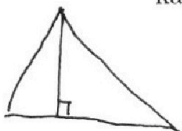
Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.



$$\begin{array}{r} 68 \\ -17 \\ \hline 51 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 0,13 = \end{array}$$

$$0,3 \cdot 13$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Меня и вас!



$$\begin{aligned} ab &: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc &: 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \\ ac &: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \cdot 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \cdot 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \Rightarrow$$

$$(abc)^2 : 2^{34} \cdot 3^{43} \cdot 5^{75} \Rightarrow (\text{н.к. } 16 \cdot 2 < 34; 21 \cdot 2 < 43; 37 \cdot 2 < 75)$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

Или привести пример, когда $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$

$$a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{22}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^4$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{21}$$

$$ab : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{22}; 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14}$$

$$bc : 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{21}; 2^{13} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}; 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43}$$

С другой стороны стороны, $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$.

Почему? Потому что из (*) следует, что степень каждого в abc

и двойки ≥ 17 , степень тройки ≥ 22 .

А степень пятёрки ≥ 43 , т.к. по условию $ac : 5^{43}$.

$$\text{Итого } abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43} \Rightarrow abc \geq 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

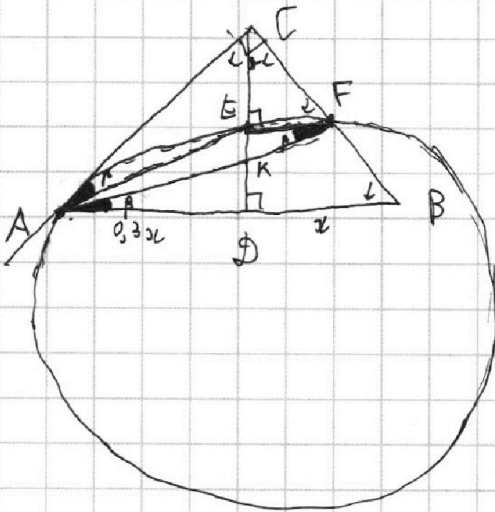
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Минимум 1 балл по ней



Пусть, $BD = x$, тогда, $AB = 1,3x \Rightarrow AD =$

$$1,3x - x = 0,3x$$

$EF \parallel AB \Rightarrow EF \perp CD$ (т.к. $AB \perp CD$)

т.к. AC - хорда, $\angle CAE = \angle EFA$.

Пусть, $K = AF \cap ED$

$\angle EFA = \angle FAB$ (т.к. $EF \parallel AB$ -

параллельные)

Пусть, $\angle CAE = \beta = \angle FAB = \angle AFE$

Пусть, $\angle ACD = \alpha$

$\angle BCA = 90^\circ - \alpha$. Из $\triangle CDB$ $\angle CBD = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$. Т.к. ACB - хорда, $\triangle C$ вписан:

$CD^2 = AD \cdot DB = 0,3x^2$: $CD = x\sqrt{0,3}$. Т.к. хорда, то $\triangle ABC$:

$$AC = \sqrt{0,09x^2 + 0,3x^2} = \sqrt{0,39x^2} \quad ; \quad AC = x\sqrt{0,39}$$

Из т. Пифагора в $\triangle CDB$: $CB = \sqrt{0,3x^2 + x^2} = \sqrt{1,3x^2} \quad ; \quad BC = x\sqrt{1,3}$

$\triangle ACE$ и $\triangle BFE$ со 2-и углами: $\angle ACE = \angle ABC = \alpha$; $\angle CAE = \angle BFE = \beta \Rightarrow$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BF} \quad ; \quad \frac{CE}{BF} = \frac{x\sqrt{0,39}}{1,3x} \quad ; \quad \frac{CE}{BF} = \frac{\sqrt{0,39}}{1,3} \quad (*)$$

$\triangle CEF \sim \triangle CDB$ (т.к. $EF \parallel DB$) \Rightarrow

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{BC} \quad ; \quad \frac{CE}{x\sqrt{0,3}} = \frac{x\sqrt{1,3} - BF}{x\sqrt{1,3}} \quad ; \quad \frac{CE}{\sqrt{0,3}} = \frac{x\sqrt{1,3} - BF}{\sqrt{1,3}} \quad ; \quad CE \cdot 1,3 =$$

$$CE \cdot \sqrt{1,3} = x\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3} - BF \cdot \sqrt{0,3} \quad ; \quad \text{из } (*) : BF = \frac{CE \cdot 1,3}{\sqrt{0,39}}$$

$$CE \cdot \sqrt{1,3} = x\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3} - \frac{CE \cdot 1,3 \cdot \sqrt{0,3}}{\sqrt{0,39}} \quad ; \quad CE \cdot \sqrt{0,39} \cdot \sqrt{1,3} = x\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3} - CE \cdot 1,3 \cdot \frac{\sqrt{0,3}}{\sqrt{0,39}}$$

$$CE \cdot \sqrt{0,39} = x\sqrt{0,3} - CE \cdot \sqrt{1,3} \cdot \sqrt{0,3} \quad ; \quad CE \cdot \sqrt{1,3} = x - CE \cdot \sqrt{1,3}$$

$$CE \cdot \sqrt{0,3} \cdot \sqrt{1,3} \quad ; \quad 2CE \cdot \sqrt{1,3} = x \quad ; \quad CE = \frac{x}{2\sqrt{1,3}}$$

$\triangle ACD \sim \triangle CFE$ (т.к. 2-и углами: $\angle ACD = \angle CFE$, $\angle ADC = \angle CEF = 90^\circ$) $\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CFE}} = k^2 =$

$$\frac{S_{ACD}}{S_{CFE}} = \left(\frac{0,3x \cdot 2\sqrt{1,3}}{x} \right)^2 = (0,3 \cdot 2\sqrt{1,3})^2 = \left(\frac{AD}{CE} \right)^2 = 0,09 \cdot 4 \cdot 1,3 = 0,36 \cdot 1,3 = 0,468.$$

Ответ: 0,468.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Минимум 1 из 1 по ней

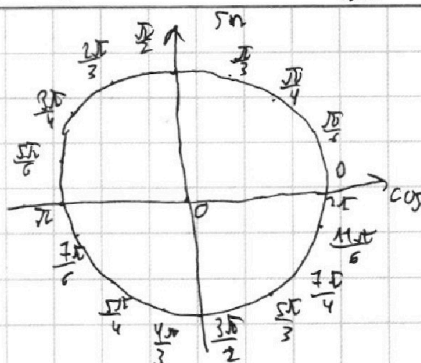


$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{5}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{5}\right) = \sin x$$



$$\sin(3x) = 3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x) \quad \cos(3x) = \cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x)$$

$$\sin(5x) = \sin(3x+2x) = \sin(3x) \cos(2x) + \cos(3x) \sin(2x) =$$

$$(3 \sin(x) \cos^2(x) - \sin^3(x)) (\cos^2(x) - \sin^2(x)) + (\cos^3(x) - 3 \sin^2(x) \cos(x)) \cdot 2 \sin(x) \cos(x) =$$

$$= \boxed{3 \sin(x) \cos^4(x)} - \sin^3(x) \cos^2(x) - 3 \sin^3(x) \cos^2(x) + \sin^5(x)$$

$$+ \boxed{2 \sin(x) \cos^4(x)} - 6 \sin^3(x) \cos^2(x) = 5 \sin(x) \cos^4(x) + \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) \cos^2(x) =$$

$$5 \sin(x) (1 - \sin^2(x))^2 + \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) (1 - \sin^2(x)) =$$

$$5 \sin(x) (1 + \sin^4(x) - 2 \sin^2(x)) + \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) + 10 \sin^5(x) =$$

$$5 \sin(x) + 5 \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) + 11 \sin^5(x) - 10 \sin^3(x) =$$

$$16 \sin^5(x) - 20 \sin^3(x) + 5 \sin(x)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

метр 1/3 по ней

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+3ay-7=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

1-е уравнение однозначно задает x через y : $x = 7 - 3ay \Rightarrow$ чтобы система имела 4 решения, 2-е уравнение системы должно иметь 4 решения, а это равносильно:

$$\begin{cases} x^2+14x+y^2+45=0 & (I) \\ x^2+y^2-9=0 & (II) \end{cases} \Rightarrow (I) \text{ и } (II) \text{ должно иметь по 2 корня, и все эти 4 корня должны быть различными.}$$

(I): $x^2+14x+y^2+45=0$

$D = 196 - 4y^2 - 180 = 16 - 4y^2$

$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 2\sqrt{4-y^2}}{2}$

$16 - 4y^2 > 0$

$4 - y^2 > 0$

$y^2 < 4$

$-2 < y < 2$

$x_{1,2} = -7 \pm \sqrt{4-y^2}$

(II): $x^2+y^2-9=0$

$x^2 = 9 - y^2$

$x = \pm \sqrt{9-y^2}$

$9 - y^2 > 0$

$y^2 < 9$

$-3 < y < 3$

Совпадения корней:

$-7 + \sqrt{4-y^2} \neq \sqrt{9-y^2}$

$\sqrt{4-y^2} \neq \sqrt{9-y^2} + 7$

$4-y^2 \neq 9-y^2+49+14\sqrt{9-y^2}$

$54+14\sqrt{9-y^2} \neq 0$ - не это верно всегда

$-7 - \sqrt{4-y^2} \neq \sqrt{9-y^2}$

$-7 + \sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-y^2} \neq 0$ - верно всегда.

$-7 + \sqrt{4-y^2} \neq -\sqrt{9-y^2}$

$-7 - \sqrt{4-y^2} \neq -\sqrt{9-y^2}$

$\sqrt{4-y^2} + \sqrt{9-y^2} \neq 7$

$\sqrt{9-y^2} \neq 7 + \sqrt{4-y^2}$

$4-y^2+9-y^2 \neq 49+14\sqrt{9-y^2}$

$9-y^2 \neq 49+4-y^2+14\sqrt{4-y^2}$

$\sqrt{4-y^2} \neq 7 - \sqrt{9-y^2}$

$44+14\sqrt{4-y^2}$

$4-y^2 \neq 49+9-y^2-14\sqrt{9-y^2}$

$44+14\sqrt{4-y^2} \neq 0$ - верно всегда

$14\sqrt{9-y^2} \neq 62$

$\sqrt{9-y^2} \neq \frac{31}{7}$

$9-y^2 \neq \frac{961}{49}$

$y^2 \neq \frac{961}{49} - 9 < 0 \Rightarrow$ верно всегда

Этого нет если y нас интересует и корня, но это действительные и различные корни.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

лист 2/3 по ней 3



Иногда, у нас

$$\begin{cases} -2 < y < 2 \\ -3 < y < 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-2 < y < 2$$

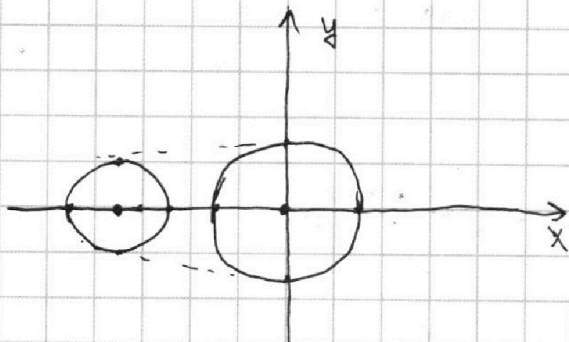
1-е уравнение переписывается в виде:

Переписем 2-е уравнение в виде

$$\begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$(x+7)^2 + y^2 = 2^2$ - окружность с центром $(-7; 0)$ радиуса 2

$x^2 + y^2 = 3^2$ - окружность с центром $(0; 0)$ радиуса 3.



$$1-е: x + 3ay - 7b = 0$$

$$x + 3ay = 7b$$

$$y = \frac{7b - x}{3a} \quad \text{- прямая при } a \neq 0$$

при $a = 0$: $x = 7b$ - пересекать окружности в 4 точках или ни при каких значениях $x \neq$

$a = 0$ не подходит

Записываем a . Тогда данные уравнения это прямая с фикс. уровнем коэффициента.

Она может иметь 4 точки пересечения с окружностями, т.е. 2 с первой и 2 со второй.

Будем, тогда прямая с фикс. уровнем коэф. имеет 2 точки пересечения с окружностями, ограниченные случаем касания прямой с точками укл. коэф с данной окружностью.

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ -7 + \sqrt{4y^2 + 3zay} - 7b = 0 \end{cases}$$

Тогда, прямая $y = kx + t$ касается окружности $x^2 + y^2 - 9 = 0$,

$$y = kx + t \quad \text{касается окружности } x^2 + y^2 - 9 = 0,$$

тогда, уравнение

$$\begin{cases} y = kx + t \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

имеет 1 решение \Rightarrow у квадратной тригонометрии

$$x^2 + (kx + t)^2 - 9 = 0 \quad ; D = 0: \quad x^2 + k^2x^2 + 2ktx + t^2 - 9 = 0 ;$$

$$x^2(k^2 + 1) + x \cdot 2kt + t^2 - 9 = 0 ; \quad 4k^2t^2 - 4(t^2 - 9)(k^2 + 1) = 0$$

$$k^2t^2 + 9 - t^2)(k^2 + 1) = 0. \quad k^2t^2 + 9k^2 - k^2t^2 + 9 - t^2 = 0$$

$$9k^2 + 9 - t^2 = 0. \quad t^2 = 9(k^2 + 1); \quad t = \pm 3\sqrt{k^2 + 1}.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мир 3 из 3 по хим



Итак, прямая с уравнением кас. $K = -\frac{1}{3a}$ будет касаться 2-й окружности при условии равенств:

$$\begin{cases} 3\sqrt{\frac{1}{9a^2+1}} \\ -3\sqrt{\frac{1}{9a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$-3\sqrt{\frac{1}{9a^2+1}} \leq \frac{4b}{3a} \leq 3\sqrt{\frac{1}{9a^2+1}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2+1}} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{2}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2+1}}$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2+1}} \leq \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a} \leq \frac{2}{7}\sqrt{\frac{1}{9a^2+1}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} \geq 0 \\ \frac{b^2}{a^2} \leq \left(\frac{1}{9a^2+1}\right) \cdot \frac{81}{49} \\ \frac{b}{a} \leq 0 \\ \frac{b^2}{a^2} \leq \frac{81}{49} \cdot \left(\frac{1}{9a^2+1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \geq 0 \\ b^2 \leq \left(\frac{1}{9} + a^2\right) \frac{81}{49} \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} \leq 0 \\ b^2 \leq \frac{81}{49} \left(\frac{1}{9} + a^2\right) \end{array} \right. \end{cases}$$

Итак, не систему можно составить где вторая окружность такова, и у системы из этих двух уравнений будет решение.

Для 2-й окружности:

$$\begin{cases} y = Kx + t \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$(x^2 + 14x + 49) + (K^2x^2 + 2Ktx + t^2) - 4 = 0$$

$$x^2(K^2+1) + x(2Kt+14) + t^2 - 45 = 0$$

$D=0$

$$4K^2t^2 + 56Kt + 196 - 4(t^2 + 45)(K^2 + 1) = 0$$

$$K^2t^2 + 14Kt + 49 - K^2t^2 - 45K^2 - t^2 - 45 = 0$$

$$14Kt - 45K^2 - t^2 + 4 = 0$$

$$t^2 - 14Kt + 45K^2 - 4 = 0$$

$$D = 196K^2 - 4(45K^2 - 4) =$$

$$4(49K^2 - 45K^2 + 4) = 4(4K^2 + 4) =$$

$$16(K^2 + 1)$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm 4\sqrt{K^2+1}}{2} \quad t_{1,2} = 7 \pm 2\sqrt{K^2+1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

минимум 20 мин

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \\ \log_7^4(6xy) + 6 \log_y 7 = (\log_y 7^5) - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\log_{6x}^4(6x)}{\log_{6x}^4(7)} - 2 \log_{6x} 7 = \frac{\log_{6x} 343}{2} - 4 \\ \frac{\log_y^4(y)}{\log_y^4(7)} + 6 \log_y(7) = \frac{\log_y(7^5)}{2} - 4 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 6x > 0 \\ 6x \neq 1 \\ 36x^2 > 0 \\ 36x^2 \neq 1 \\ y > 0 \\ y \neq 1 \\ y^2 > 0 \\ y^2 \neq 1 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{6} \\ x \neq \pm \frac{1}{6} \\ y > 0 \\ y \neq 1 \\ y \neq 0 \\ y \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\log_{6x}^4(7)} - 2 \log_{6x} 7 = \frac{3 \log_{6x} 7}{2} - 4 & (1) \\ \frac{1}{\log_y^4(7)} + 6 \log_y(7) = \frac{5}{2} \log_y(7) - 4 & (2) \end{cases}$$

$x \in (0; \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}; +\infty)$
 $y \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$

(1) Замена: $\log_{6x} 7 = t$: $\frac{1}{t^4} - 2t = \frac{3t}{2} - 4$; $\frac{2}{t^4} - 4t = 3t - 8$

$$\frac{2}{t^4} = 7t - 8; \quad \frac{7t^5 - 8t^4 - 2}{t^4} = 0 \quad (t \neq 0 \text{ берем})$$

(2) Замена: $\log_y(7) = k$: $\frac{1}{k^4} + 6k = \frac{5}{2}k - 4$ ($k \neq 0$ берем)

$$\frac{2}{k^4} + 12k = 5k - 8; \quad \frac{2}{k^4} + 7k + 8 = 0; \quad \frac{7k^5 + 8k^4 + 2}{k^4} = 0$$

$7k^5 + 8k^4 + 2 = 0$ (II). ~~Сумма (I) и (II):~~

(6x)^t = 7, 6x = $\sqrt[t]{7}$; $x = \frac{\sqrt[t]{7}}{6}$; y^k = 7; y = $\sqrt[k]{7}$

$$xy = \frac{7^{\frac{1}{t} + \frac{1}{k}}}{6} = \frac{7^{\frac{k+t}{kt}}}{6}$$

Пусть $\frac{1}{t} = a$; $\frac{1}{k} = b$. Тогда найдем a и b. (I) и (II) переписываем в виде:

$$\frac{7}{a^5} - \frac{8}{a^4} - 2 = 0; \quad 7 - 8a - 2a^5 = 0; \quad \boxed{2a^5 + 8a - 7 = 0}$$

$$\frac{7}{b^5} + \frac{8}{b^4} + 2 = 0; \quad 7 + 8b + 2b^5 = 0; \quad \boxed{2b^5 + 8b + 7 = 0}$$

~~Сумма (I) и (II):~~

$$7t^5 + 7k^5 - 8t^4 + 8k^4 = 0$$

$$7(k+t)(t^4 - kt^3 + k^2t^2 - kt + k^4) + 8(k^2 + t^2)(k+t)(k+t) = 0$$

и (II) переписываем в виде:

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Математика

Сумма полученных уравнений:

$$2a^5 + 2b^5 + 8a + 8b = 0$$

$$2(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 8(a+b) = 0$$

$$(2+4)(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4) = 0$$

$$\begin{cases} a+b=0 & (I) \\ a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 4 = 0 & \neq 0 \end{cases}$$

При $a+b=0$

$$2a = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{0}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{0}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

лит 3 из 3 по нп

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

② $y_1 \equiv 1 \pmod{6}$ $y_1 \equiv r \pmod{4}$; ~~$r \equiv 0$~~ $r \neq 0$

$y_1 = 4k + r$ ~~$k \equiv r \pmod{4}$~~ \leq

$-\frac{4k-r}{4} \leq x_1 \leq 9 - \frac{4k-r}{4}$

$-k - \frac{r}{4} \leq x_1 \leq 9 - k - \frac{r}{4}$; x_1 целое \Rightarrow

$-k \leq x_1 \leq 9 - k - 1$

$-k \leq x_1 \leq 8 - k - \underbrace{1}_{\text{3 значения}}$

• Аналогично для t 17 значений \Rightarrow всего $17 \cdot 9 = 153$ значения

Среди значений y_1 (от 0 до 68) - всего их 69

из них 18 кратны 4 и $69 - 18 = 51$ - не кратны.

Итого всего

итог $18 \cdot 180 + 51 \cdot 153 = 3240 + 7803 = 11043.$

Ответ: 11 043.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Мин 1 ч 30 по пм



$$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40 \quad ; \quad x_2 - x_1 = k$$

$$y_2 - y_1 = t$$

$$4k + t = 40 \quad ; \quad t = 40 - 4k$$

$$4k + 4t = 40$$

$$k + t = 10$$

$$\boxed{t = 4k}$$

$$\boxed{k = 10 - t}$$

К — количество крестиков

$$|k| \leq 19 + 17 = 36 \Rightarrow$$

$$|t| \leq 68 - 0 = 68.$$

$$\begin{cases} -36 \leq 4t \leq 36 \\ -68 \leq 10 - t \leq 68 \end{cases}$$

t целое!

$$\begin{cases} -9 \leq t \leq 9 \\ -58 \leq t \leq 78 \end{cases}$$

$$\boxed{-9 \leq t \leq 9}$$

Тогда граница, на которой $(x; y)$ лежит внутри паруса.

Во-первых это граница, на которой $0 \leq y \leq 68$.

Затем рассмотрим уравнения стороны паруса, не параллельные оси X:

$$kx + b = 0 \quad (2; 68)$$

$$(18; 0)$$

$$\begin{cases} 2k + b = 68 \\ 18k + b = 0 \end{cases}$$

$$68 - 2k = -18k$$

$$68 = -16k$$

$$34 = -8k$$

$$k = -\frac{34}{8} = -\frac{17}{4}$$

$$b = 68 - 2k = 68 - 2 \cdot \left(-\frac{17}{4}\right) = 68 + \frac{17}{2} = \frac{136 + 17}{2} = \frac{153}{2}$$

$$b = 68 \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{68 \cdot 5}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

$$-\frac{17}{4}x + 136 = y$$

$$\boxed{-\frac{17}{4}x + 136 \geq y}$$

$$-34x + 544 \geq 4y$$

$$\boxed{-34x + 544 - 4y \geq 0}$$

пару равенств системы:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 68 \\ 68x + 17y \geq 0 \\ -34x + 544 - 4y \geq 0 \end{cases}$$

$$kx + b = 0 \quad ; \quad (-17; 68)$$

$$(6; 0)$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ -17k = 68 \end{cases} \quad ; \quad k = -\frac{68}{17} = -4$$

$$-4x = y$$

$$-4x - y \leq 0$$

$$\boxed{68x + 17y \geq 0}$$

$$\boxed{4x + y \geq 0}$$

Тогда, остается пара $(x; y)$ внутри

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



0 8

153
x 51
153
765
7803

684
4 17

153
x 9
153

6
18
x 180
144
18

log₆ x

5 - 3.5

7803
3240
11043

43
x 43
16

16
x 8
128

7

4.25 - 8.27
74 = y = 7/8

32 - 128
74 = 7/8

sqrt(7/8) + 3ay = 7b

7/8 = 7/8

log_a b = log_c b / log_c a

1/8 = 1/8

4.32 - 8.16 = 2

17
x 4
68

-4.32 + 8.16 + 2

-4/9 <= 9 - 4/4

(1): $x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0$ (1)

(2): $x^2 + y^2 - 9 = 0$ (2)

$D = 196 - 4y^2 - 180 = 16 - 4y^2$

$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 2\sqrt{4-y^2}}{2} = -7 \pm \sqrt{4-y^2}$

(2): $x_{1,2} = \pm \sqrt{9-y^2}$

$x = 7b - 3ay$

$(x+7)^2 + y^2 - 4 = 0$

$\frac{1}{2} \log$

$x = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$y = \frac{7}{8}$

$6x^6 = 7$

$y^8 = 7$

$x + 3ay = 7b$

$4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$

$4(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 40$

Points: $(-10; 8)$, $(2; 6)$, $(0; 0)$, $(13; 0)$

$xy = \sqrt{\frac{7}{8}} \cdot \sqrt{7}$

$1 \frac{4}{74} - \frac{8}{74} - 2 = \frac{2}{74} - \frac{8}{74} - 2 = -1$

$\frac{1}{8} b = 7$

$\frac{1}{8} b = \sqrt{7}$

$x = \sqrt{7}$

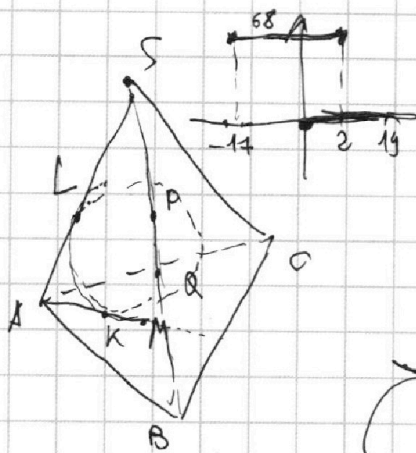
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{3\pi}{2} \cdot 5$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= \sin(2x+x) = \\ &= \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) = \\ &= 2\sin(x)\cos^2(x) + \cos^2(x) - \sin^2(x) - \\ &= \sin^3(x) = \end{aligned}$$

$$\cos^2(x)$$

$$3\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$$

$$\cos(3x) = \cos(2x+x) =$$

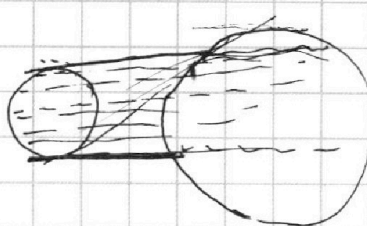
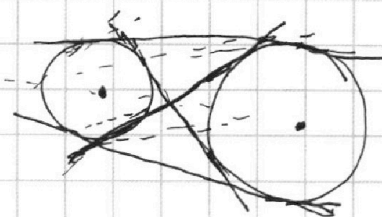
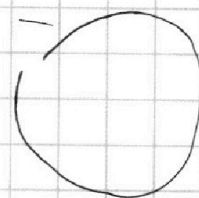
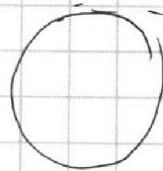
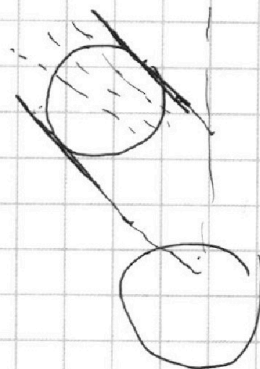
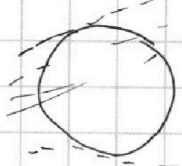
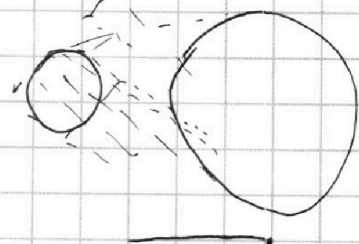
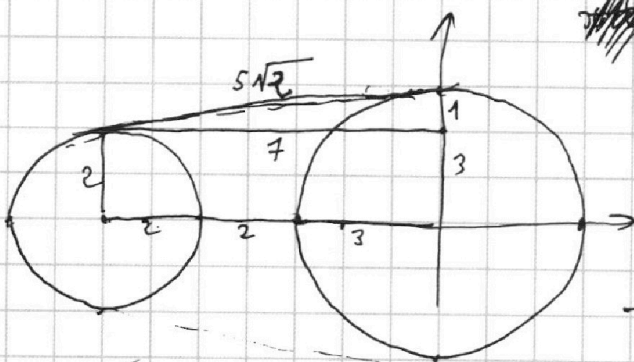
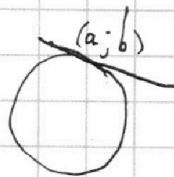
$$\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) =$$

$$\cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x) =$$

$$10x^5 - 20x^3 + 5x = y$$

$$Kx+b =$$

$$50 \quad 5\sqrt{2}$$



$$4(a-b) + c = 40$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

