



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^6 3^{13} 5^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{16} 3^{25} 5^{28}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $AC$  в точке  $A$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $E$ , а катет  $BC$  – в точке  $F$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AB : BD = 1,4$ . Найдите отношение площади треугольника  $ACD$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

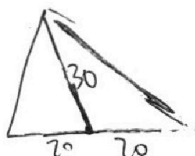
имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-15;90)$ ,  $Q(2;90)$  и  $R(17;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 180,  $SA = BC = 20$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 6$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 8.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①  $ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$   
 $bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$   
 $ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{26}$

$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 : 2^{6+14+16} \cdot 3^{13+21+25} \cdot 5^{11+13+26}$

$a^2 b^2 c^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

$abc = T \Rightarrow T^2 : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists T^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k, k \in \mathbb{N}$

$T = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3k}; \sqrt{3k} \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \min k = 3 \Rightarrow \min T = abc =$

$= 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Ответ:  $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

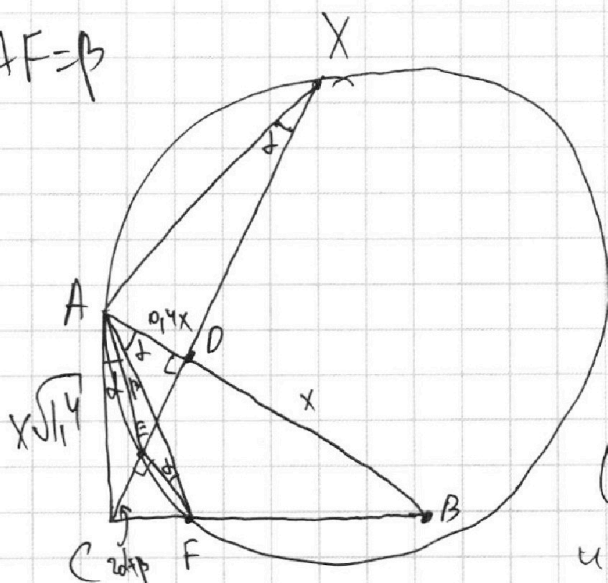
1  2  3  4  5  6  7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2

$\angle EAF = \beta$



1)  $\frac{AB}{BD} = 1,4 \Rightarrow$

$\Rightarrow DB = x$

$AD = 0,4x$

2)  $\angle CAE = \angle AXE = \alpha$

(угол между хордой AE и касательной: AC)

3)  $\angle AXE = \angle EFA = \alpha$  (опер. на AE)

4)  $\angle EFA = \angle FAB = \alpha$  (EF || AB, внутр. накр. лежащ.)

5)  $\triangle ACD \sim \triangle ACB$  ( $\angle ADC = \angle ACB = 90^\circ$ ,  $\angle CAB$  - общий)

$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = 1,4x^2$

6)  $EF \parallel AB \Rightarrow \angle CEF = \angle CDA = 90^\circ$

7)  $\angle CAD = 90^\circ - \angle ACD = \angle ECF = 2\alpha + \beta$

$\cos(2\alpha + \beta) = \frac{AD}{AC} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}} = \frac{CE}{CF}$  ( $\triangle ACD$  и  $\triangle CEF$  - (г))

8)  $\triangle ACF: \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{CF}{x\sqrt{1,4}} = \frac{CF}{AC}$

$\triangle AED: \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{0,4x} \Rightarrow$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow \frac{CF}{x\sqrt{1,4}} = \frac{ED}{0,4x} \quad CF \cdot 0,4x = ED \cdot x\sqrt{1,4}$$
$$0,4 CF = \sqrt{1,4} ED$$

$$CF = y \Rightarrow ED = \frac{0,4y}{\sqrt{1,4}}$$

$$\text{н.ч. } \frac{CF}{CF} = \frac{CF}{y} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$$

$$CF = \frac{0,4y}{\sqrt{1,4}} = ED$$

9)  $\triangle CEF \sim \triangle CDB$  ( $EF \parallel DB \Rightarrow \angle CFE = \angle CBD$ )  
 $\angle CEF = \angle CDB$ )

$$CE = ED \Rightarrow \frac{CE}{CD} = \frac{1}{2} = k \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CDB}} = k^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_{CEF} = S, S_{CDB} = 4S$$

$$10) \frac{S_{CDB}}{S_{CAD}} = \frac{DB}{DA} = \frac{1}{0,4} = \frac{4S}{S_{CAD}} \Rightarrow S_{CAD} = 1,6S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{1,6S}{S} = 1,6$$

Ответ: 1,6



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) 10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$$

$$10 \arccos(\sin x) \in [0; 10\pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2} \text{ и } \sin x = t \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \arcsin t = x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - \pi, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - 2\pi, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - 3\pi, & x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] \\ \arcsin t = x - 4\pi, & x \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\text{но } \arcsin t + \arccos t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arccos t = x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & (1) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - \pi, & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] & (2) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - 2\pi, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] & (3) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - 3\pi, & x \in \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] & (4) \\ \frac{\pi}{2} - \arccos t = x - 4\pi, & x \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right] & (5) \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(1):  $\arccos t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 10 \arccos t = 9\pi - 2x$   
 $5\pi - 10x = 9\pi - 2x \quad 8x = -4\pi, x = -\frac{\pi}{2}, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$   
 ~~$x = -\frac{\pi}{2}$~~

(2):  $\arccos t = \frac{3\pi}{2} - x$   
 $15\pi - 10x = 9\pi - 2x$   
 $8x = 6\pi$   
 $x = \frac{3\pi}{4}, x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

(3):  $\arccos t = \frac{5\pi}{2} - x$   
 $25\pi - 10x = 9\pi - 2x$   
 $8x = 16\pi$   
 $x = 2\pi, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow x = 2\pi$

(4):  $\arccos t = \frac{4\pi}{2} - x$   
 $35\pi - 10x = 9\pi - 2x$   
 $8x = 26\pi$   
 $x = \frac{13\pi}{4}, x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{4\pi}{2}\right] \Rightarrow x = \frac{13\pi}{4}$

(5):  $\arccos t = \frac{9\pi}{2} - x$   
 $45\pi - 10x = 9\pi - 2x$   
 $8x = 36\pi$   
 $x = \frac{36\pi}{8}, x \in \left(\frac{4\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$

Ответ:  $-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; 2\pi; \frac{13\pi}{4}; \frac{9\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

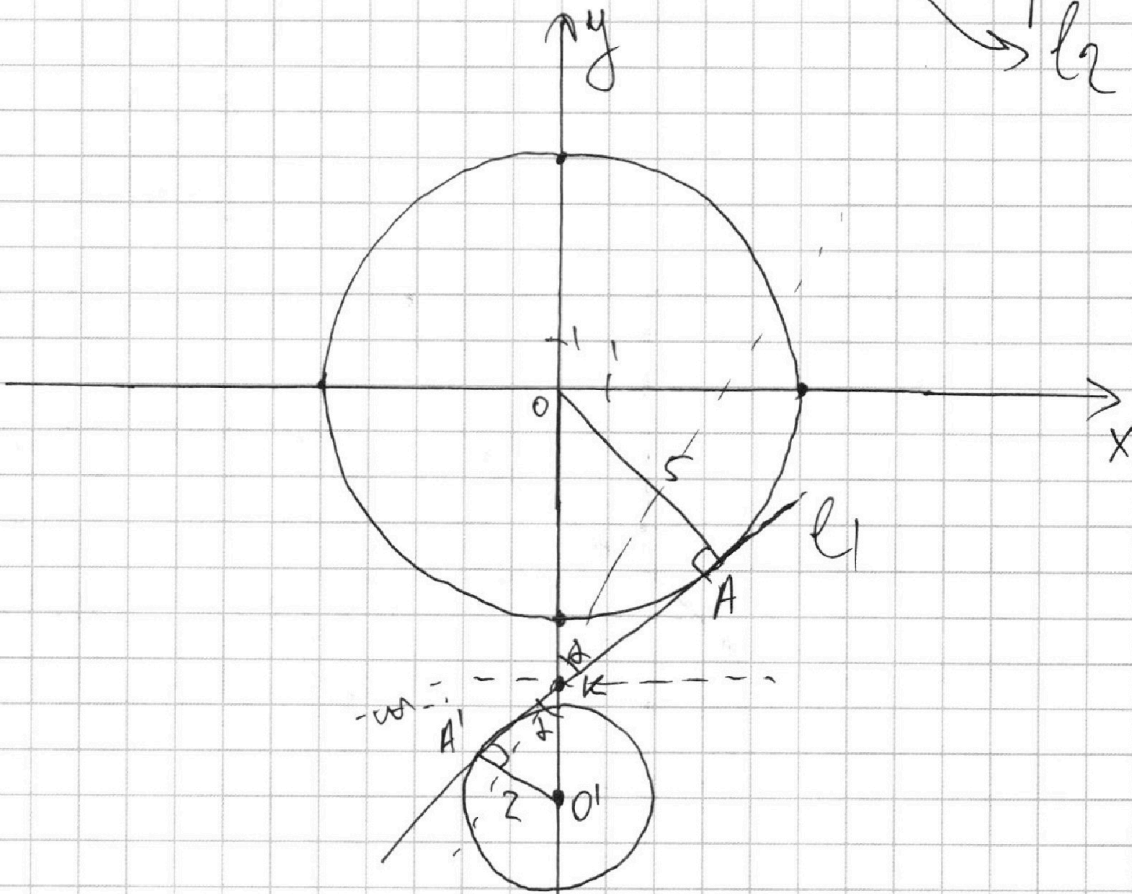
$$\textcircled{4} \begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \quad (\#\#) \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 12y + 44) = 0 \end{cases}$$

~~$5x + 6ay - b = 0$~~

- (1) окр-сть, ц.  $(0; 0)$ ;  $R = 5$   
(2) окр-сть, ц.  $(0; -9)$ ;  $R = 2$

$$\begin{cases} \textcircled{1} \quad -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a} \quad (3) \\ x^2 + y^2 = 25 \quad (1) \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \quad (2) \end{cases}$$

(3) лин. ф-ция,  
(невероятно)  
прямая  
→  $l_2$



\*. Примечание:  $a=0$  - переход, тогда  
 $(\#\#)$  имеет вид:  $5x = b$  - вертик. прямая,



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

очевидно, напр., при  $b=0$  будет 4 решения,  
тогда чтобы получить (3) делим на  $ba \neq 0$

1) Введем временно:  $-\frac{5}{6a} = k$ ,  $\frac{6}{6a} = c$ ,  
(3):  $y = kx + c$ , тогда гранично положение  
прямой - прямая  $l_1$ , касаясь  $2y^x$  экр. тац,  
как показано на чертеже,  $OK = x'$ , тогда

$$KO' = 9 - x' \quad (\text{т.к. } OO_1 = 9) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{9 - x'} = \frac{4}{x'}$$

$$2x' = 45 - 5x' \quad (\text{будем рассматривать}$$

$$x' = \frac{45}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{35}{49} = \frac{5}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha =$$

$$\frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$l_1 \text{ имеет вид: } y = \frac{9}{7}x - \frac{45}{7}, \text{ где}$$

~~будет выбрано~~  $k > \frac{9}{7}$ , очевидно,

будет подбираться  $b$ , чтобы  $l_2$  имела  
всего 4 точки пер. с экр.-оцим  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  у исходной системы было 4 ~~оцим~~ реш.

Также понятно, что при  $0 < k < \frac{9}{7}$  будет только

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

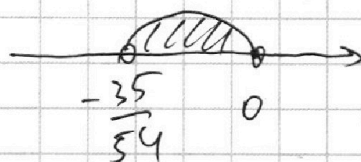
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

пересечение с осью  $xy$  и  $yz$   
Тогда имеем:

$$\begin{cases} -\frac{5}{6a} > \frac{9}{4} & (I) \\ -\frac{5}{6a} < -\frac{9}{4} & (II) \end{cases}$$

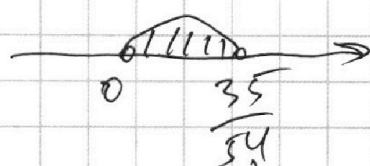
~~(I)~~ (I):  $-\frac{9}{4} + \frac{5}{6a} < 0$

$$\frac{54a + 35}{42a} < 0$$



от  $(-\frac{35}{54}; 0)$

(II): ~~(II)~~  $\frac{5}{6a} - \frac{9}{4} > 0$   
 $\frac{35 - 54a}{42a} > 0$



Но, как мы  
выяснили ранее,  
 $a=0$  - не подходит  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Ответ:  $(-\frac{35}{54}; \frac{35}{54})$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\textcircled{5} \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^3 \frac{1}{121} - 5$$
$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3 \log_{11} x} - 5$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq 1 \end{array}}$$

$$\log_{11} x = a \Rightarrow a^4 - \frac{6}{a} = -\frac{2}{3a} - 5$$

$$a^4 - \frac{6}{a} + \frac{2}{3a} + 5 = 0$$

$$\frac{3a^5 - 18 + 2 + 15a}{3a} = 0$$

$$\boxed{3a^5 + 15a - 16 = 0}$$

$$\textcircled{2} \log_{11}^4(0,5y) + \log_{11} 11 = \log_{11}^3(11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4(0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = -\frac{13}{3 \log_{11}(0,5y)} - 5$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y > 0 \\ y \neq 2 \end{array}}$$

$$\log_{11}(0,5y) = b \Rightarrow b^4 + \frac{1}{b} = -\frac{13}{3b} - 5$$

$$3b^5 + 3 = -13 - 15b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3b^5 + 15b + 16 = 0 \text{ (1)} \\ 3a^5 + 15a - 16 = 0 \text{ (2)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 3a^5 + 3b^5 + 15a + 15b = 0$$

$$\cancel{3a^5 + 3b^5 + 15a + 15b = 0}$$

$$\cancel{(a+b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 + 5) = 0}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Рассмотрим  $f(x) = 3x^5 + 15x + 16$

$$f'(x) = 15x^4 + 15 > 0 \Rightarrow f(x) - \text{возрастает} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  имеет только одно решение

Аналогично:  $g(x) = 3x^5 + 15x - 16$

$$g'(x) = 15x^4 + 15 > 0 \Rightarrow g(x) - \text{возрастает} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  ур-ие:  $3b^5 + 15b + 16 = 0$  - имеет 1 решение,

$3a^5 + 15a - 16 = 0$  - имеет одно решение.

Пусть  $a = a_0$  - решение  $3a^5 + 15a - 16 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3a_0^5 - 15a_0 + 16 = 0 \Rightarrow b = -a_0 - \text{решение}$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0 \Rightarrow \log_{11} x = a_0, \log_{11} (0,5y) = -a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{11} x + \log_{11} (0,5y) = a_0 - a_0 = \log_{11} (0,5xy) = 0$$

$$0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2 \quad (\text{заметьте, что}$$

условия  $x \neq 1$  и  $y \neq 2$  выполняются,  
 $x > 0$  и  $y > 0$ )

т.к.  $a_0 \neq \log_{11} 1 = 0$ )

Ответ: 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

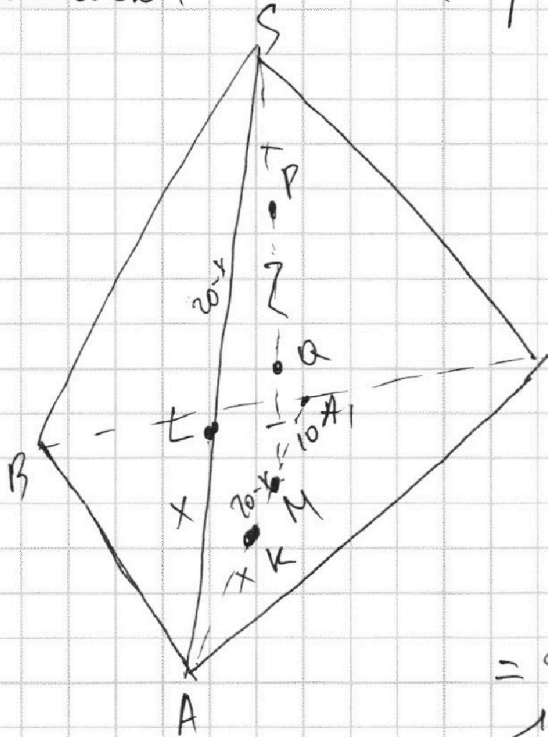
1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(перестановка точек P и Q образует то же самое сечение)

④



1)  $AK = AL$  (отрезки касательных)  $\Rightarrow x \Rightarrow$

$$\Rightarrow SL = 20 - x$$

$$2) SL^2 = SP \cdot SQ$$

(сечение точки S сим-но сечению)

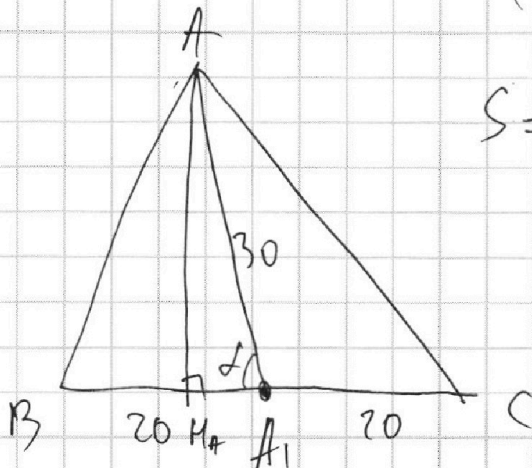
$$3) MK^2 = MQ \cdot MP =$$

(с-точки M)

$$= SP \cdot SQ \quad (MQ = SP, MP = SQ)$$

$$SL^2 = MK^2 = 20 - x \Rightarrow AM = 20 - x + x = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} AM = 10 \quad (M \text{ делит медиану } AA_1 \text{ в } 2:1) \Rightarrow AA_1 = 30$$



$$S = 30 \cdot 20 \cdot \sin d = 600 \sin d = 180$$

$$\sin d = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA A_1 = \sqrt{30^2 - 9^2} =$$

$$= \sqrt{21 \cdot 39} = 3\sqrt{4 \cdot 13} = 3\sqrt{52}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4) BM_A = 20 - 3\sqrt{91} \Rightarrow AB = \sqrt{(20 - 3\sqrt{91})^2 + 9^2} =$$

~~4)~~ 5)  $CM_A = 20 + 3\sqrt{91} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{(20 + 3\sqrt{91})^2 + 9^2}$$

$$m_c^2 = \frac{2 \cdot 40^2 + 2(20 + 3\sqrt{91})^2 + 2 \cdot 9^2 - (20 - 3\sqrt{91})^2 - 9^2}{4}$$

$$m_b^2 = \frac{2 \cdot 40^2 + 2(20 - 3\sqrt{91})^2 + 2 \cdot 9^2 - (20 + 3\sqrt{91})^2 - 9^2}{4}$$

$$m_A \cdot m_B \cdot m_C = \frac{30}{4} \sqrt{(2 \cdot 40^2 + 2(20 + 3\sqrt{91})^2 + 9^2 - (20 - 3\sqrt{91})^2 - 9^2) \cdot (2 \cdot 40^2 + 2(20 - 3\sqrt{91})^2 + 9^2 - (20 + 3\sqrt{91})^2 - 9^2)}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos(\sin x) \in [0; \pi]$$

$$\forall a \dots \in [0; 10\pi]$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$-9\pi \leq -2x \leq \pi$$

$$-\pi \leq 2x \leq 9\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{9\pi}{2}$$

$$\arccos t + \arcsin t = \frac{\pi}{2}$$

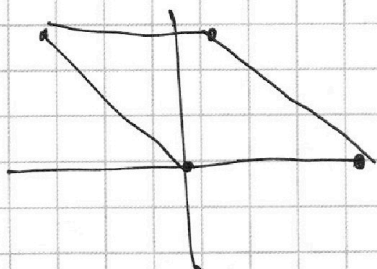
$$\sin x = t$$

$$\cos x = \sqrt{1-t^2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x = 1$$

$$\sin x = t$$

arccos



$$\arcsin t = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin t = x - \pi, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin t = x - 2\pi, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$$

$$\arcsin t = x - 3\pi, x \in \left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$

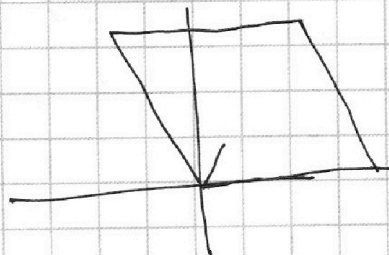
$$\arcsin t = x - 4\pi, x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$\arccos t = \sqrt{1-x^2}$$

$$\arcsin t =$$

$$\sin(x - \pi) = -\sin x$$

$$\arccos t = \frac{\pi}{2} - x$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{5} \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \frac{1}{32} \log_{11} x^{11} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{32}{3 \log_{11} x} - 5$$

$$b^4 - \frac{6}{b} = -\frac{32}{3b} - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = \log_{11} (0,5y)^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11}(0,5y)} = -\frac{13}{3 \log_{11}(0,5y)} - 5$$

$$\textcircled{5} a^4 + \frac{1}{a} = -\frac{13}{3a} - 5$$

$$b^4 - \frac{6}{b} + \frac{32}{3b} + 5 = \frac{3b^5 - 18 + 32 + 15b}{3b} =$$

$$= \frac{3b^5 + 15b - 16}{3b} = 0$$

$$\begin{aligned} 3b^5 + 15b - 16 &= 0 \\ 3a^5 + 15a + 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$a^4 + \frac{1}{a} + \frac{13}{3a} + 5 = \frac{3a^5 + 3 + 13 + 15a}{3a} = \frac{3a^5 + 15a + 16}{3a} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



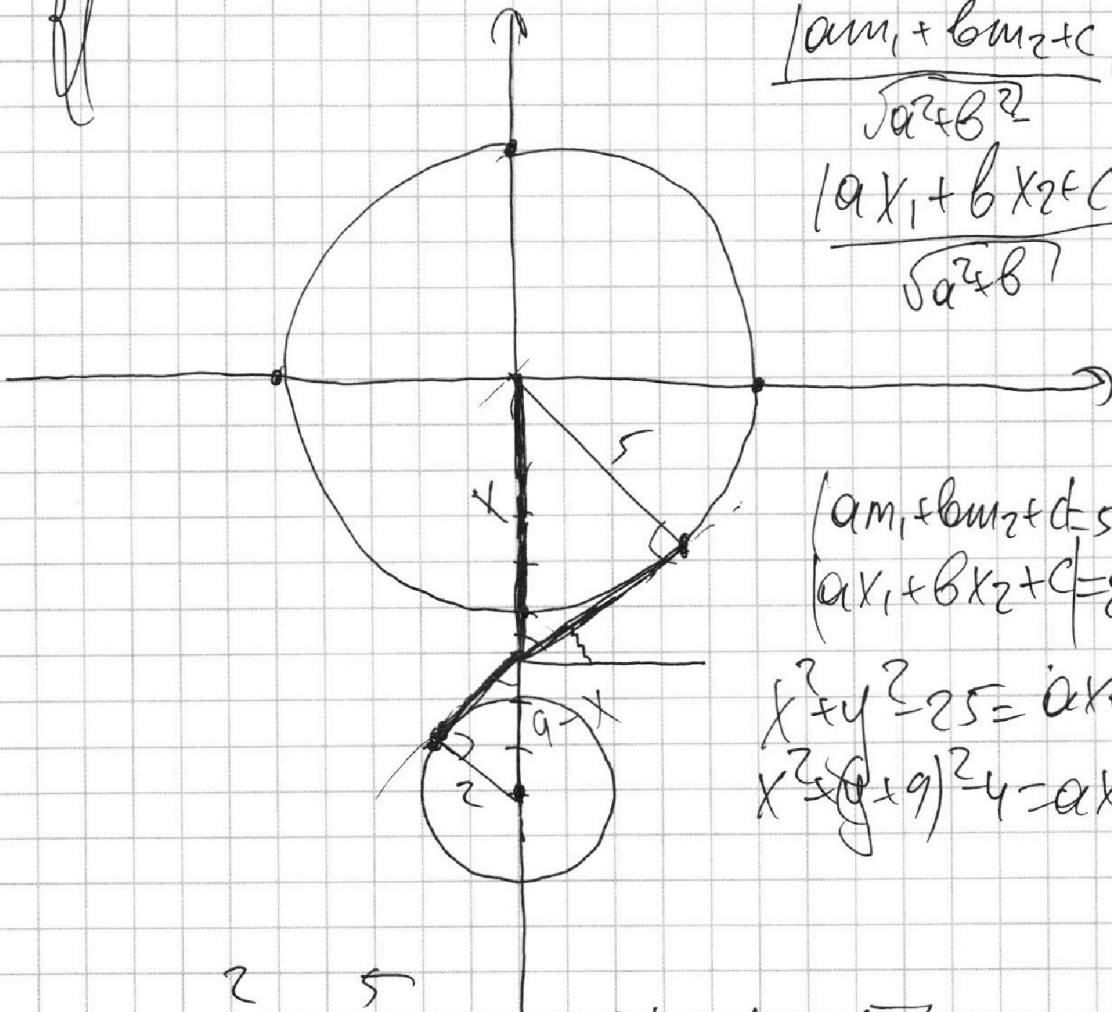
④ 
$$\begin{cases} 5x + 6ay - 6 = 0 & 6ay = -5x + 6 \\ x^2 + y^2 = 25 & y = -\frac{5}{6a}x + \frac{6}{6a} \\ x^2 + y^2 + 18y + 81 - 81 + 4y = 0 & \end{cases}$$

$$x^2 + (y + 9)^2 = 4$$

$$y = kx + b$$

$$\frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5$$

$$\frac{|ax_1 + bx_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2$$



$$\begin{cases} |am_1 + bm_2 + c| = 5\sqrt{a^2 + b^2} \\ |ax_1 + bx_2 + c| = 2\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 = ax + by + c \\ x^2 + (y + 9)^2 = 4 = ax + by + c \end{cases}$$

$$\frac{2}{9-x} = \frac{5}{x}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 45 - 5x \\ 7x &= 45 \\ x &= \frac{45}{7} \end{aligned}$$

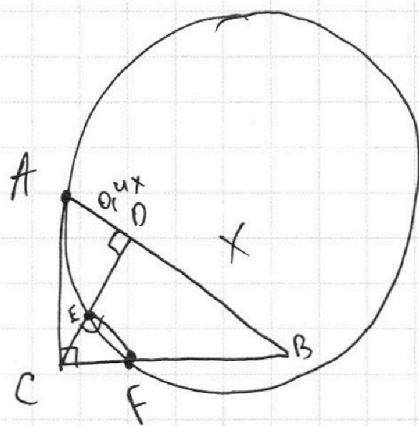
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~$S_{AEF}$~~   $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot DC$   
 $S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF$

~~$S_{AEF}$~~   $\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} =$

$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$

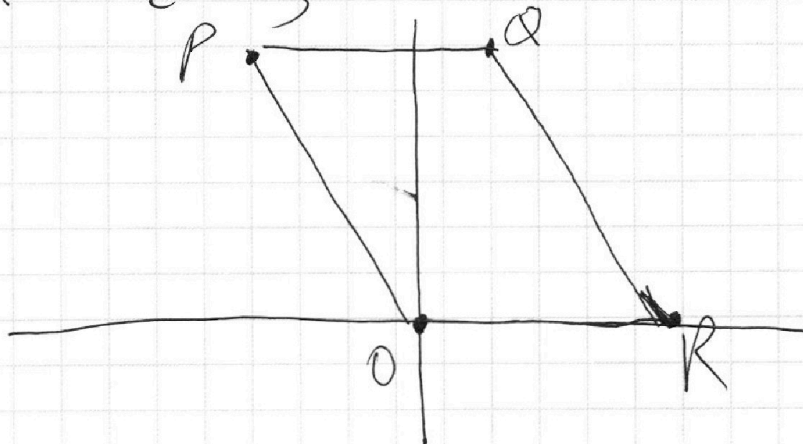
$ab: 2^6 \cdot 3^{13}$   
 $bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$   
 $ac: 2^{14} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$T^2 = 2^{36} \cdot 5^{59} \cdot 5^{37}$

$a^2 b^2 c^2: 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$   $T = 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot 5^{29} \sqrt{5k}$

~~$abc$~~   $abc = T$

$T^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot 1$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r}
 a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\
 \underline{a^4 + a^3b} \\
 a^2b^2 + ab^3 \\
 \underline{-a^2b^2 + ab^3} \\
 3a^5 + 15a^4 - 16 = 0
 \end{array}$$

$$a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\begin{array}{cccc}
 & & 1 & & \\
 & & 1 & 1 & \\
 & 1 & 2 & 1 & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1
 \end{array}$$

$$T^4 - 3a^3b - 4a^2b^2 - 3ab^3 + 5 = 0$$

$$3a^3b + 4a^2b^2 + 3ab^3$$

$$ab(3a^2 + 4ab + 3b^2)$$

$$D = 16b^2$$

$$(a+b)/(a^3+ab^2) = a^4 + a^2b^2 + a^3b + ab^3$$

$$a(a+b)/(a^3+ab^2) + b^4 + 5 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

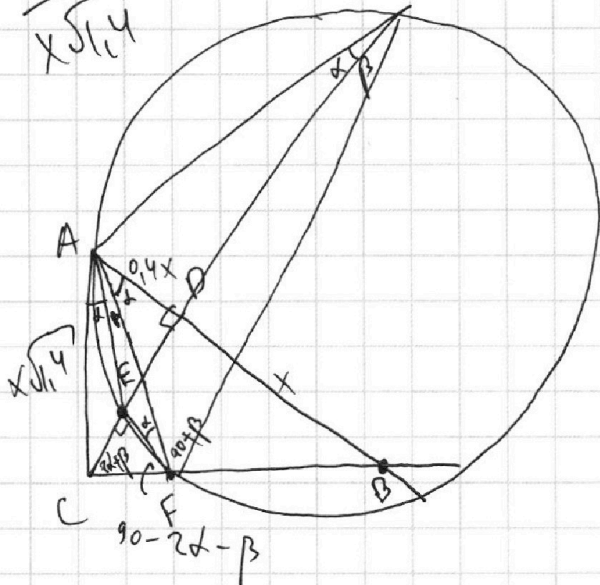
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~ED~~  
~~ED~~

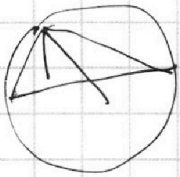
$$\frac{ED}{0,4x} = \frac{CF}{x\sqrt{1,4}}$$



$$AC^2 = 1,4x^2$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$$

$$\frac{ED}{CF} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$$



~~$$90 - 2\alpha - \beta \leq 180 - \alpha - \beta$$~~

$$180 - 2\alpha - \beta - 90 + 2\alpha + \beta$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{1}{\sqrt{1,4}}$$

~~$$\frac{EF}{CF} = \frac{CB}{CF}$$~~

$$\frac{CE}{CF} = \frac{1}{\sqrt{1,4}}$$

$$\frac{ED}{CE}$$

$$CF - CE = \frac{CF^2}{\sqrt{1,4}}$$

$$\sqrt{\alpha + \beta} = \frac{CF}{x\sqrt{1,4}}$$

$$CF = x\sqrt{1,4} \sqrt{\alpha + \beta}$$



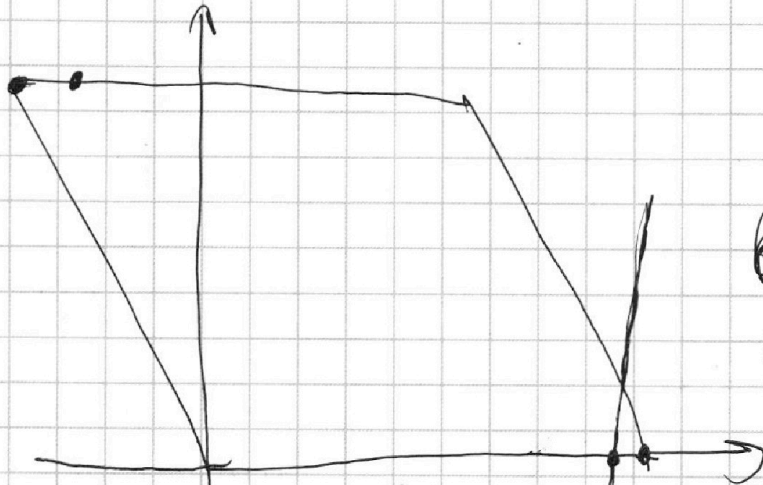
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



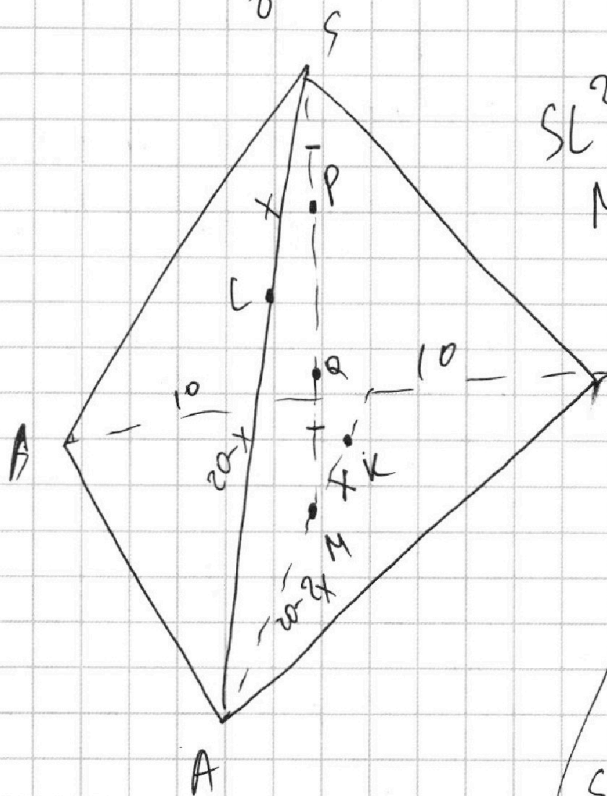
$$b^2 = l^2 + a^2 - 2al \cos \alpha$$

$$c^2 = l^2 + a^2 + 2al \cos \alpha$$

$$b^2 + c^2 = 2l^2 + 2a^2$$

$$l^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2}$$

$$la^2 b^2 c^2 = \frac{(b^2 + c^2 - 2a^2)(100 + b^2 - 2c^2)}{8}$$



$$SL^2 = SP \cdot SQ$$

$$MK^2$$

$$SL = MK \quad 10 - 2x$$

$$c^2 = 20 - 2x$$

$$20 - 2x = 2x$$

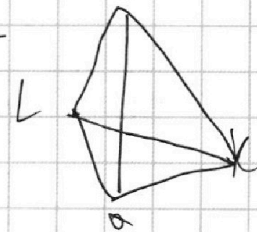
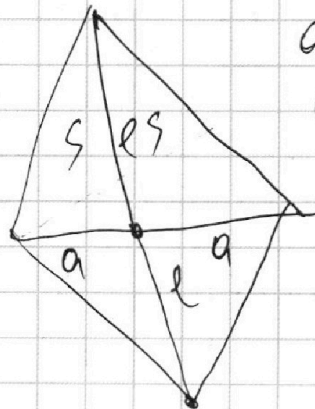
$$x = 10 - x$$

$$a \sin \alpha = 180$$

$$b \sin \beta =$$

$$a \sin \alpha = 180$$

$$b \sin \beta = 90$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{FB}$$

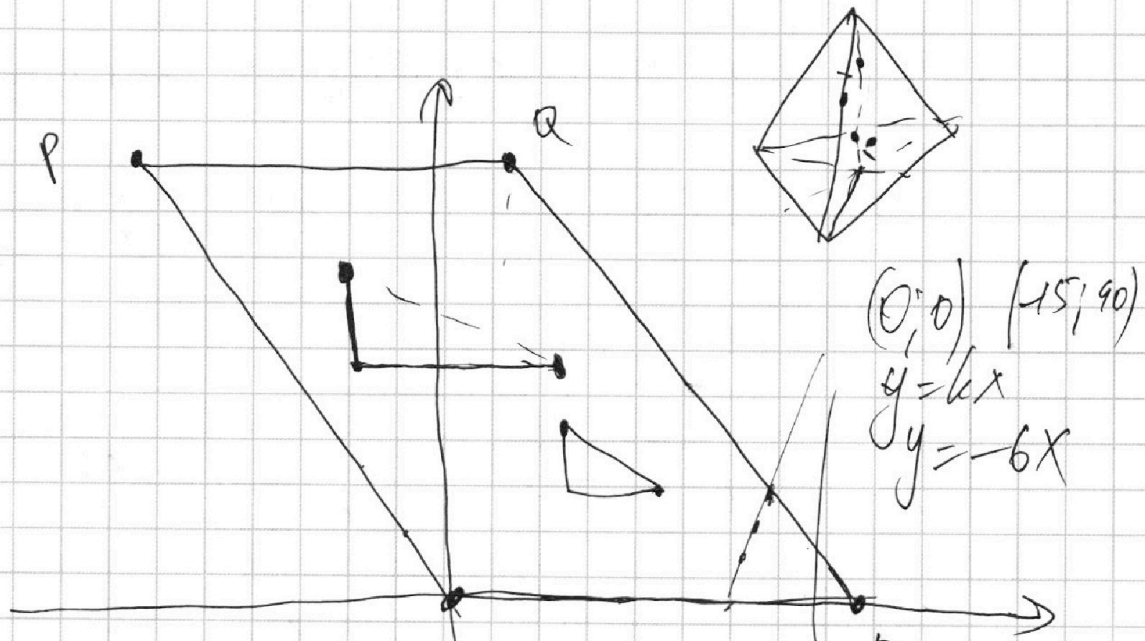
$$\frac{CE}{CF} = \frac{0,4}{\sqrt{1,4}}$$

$$CE = \sqrt{1,4} = CF_{0,4}$$

$$CE = y$$

$$CF = \frac{\sqrt{1,4} y}{0,4}$$

$$CF \cdot 0,4 =$$



$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$$

$$6(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 48$$

$$(x_2 - x_1) / (6 + k) = 48$$

$$x_2 - x_1 = 1$$

$$6 + k = 48 \quad k = 42$$

$$y = 42x + 6$$

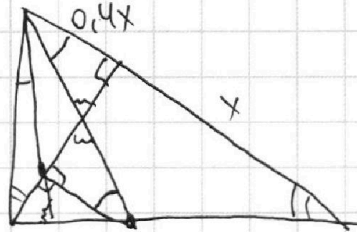
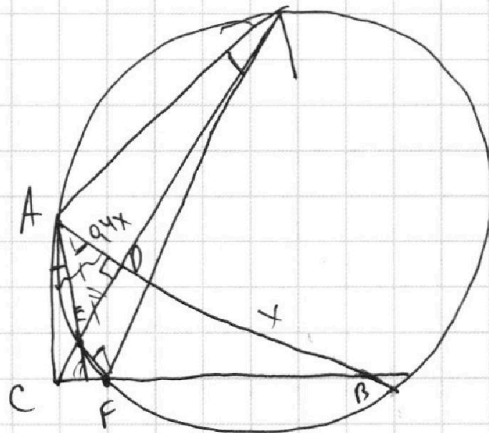
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



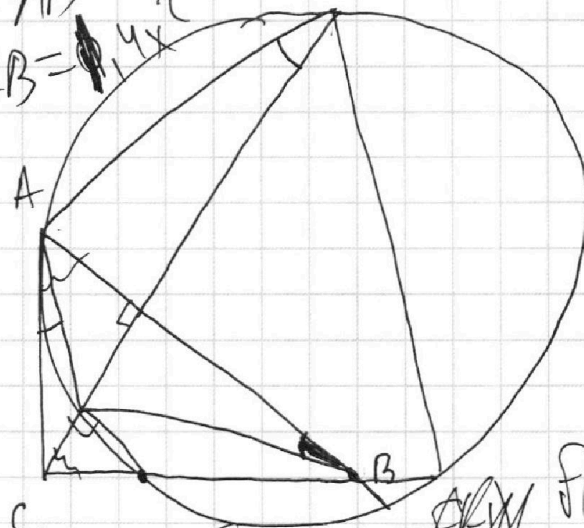
$$\cos \alpha \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

$$AC^2 = AD \cdot AB = 1.4x^2$$

$$AC = x\sqrt{1.4}$$

$$AC^2 = CE \cdot CX$$

$$CE \cdot CX = CF \cdot CY$$



$$\frac{AC \cdot AD}{CE \cdot CF} = \frac{x^2 \cdot 1.4\sqrt{1.4}}{CE \cdot CF}$$

$$\begin{aligned} 3a^5 + 15a - 16 & \quad 15a^4 + 15 \\ 3b^5 + 15b - 16 & \quad 15b^4 + 15 \end{aligned}$$

$$AC^2 = CE \cdot CX = CF \cdot CY$$

$$x\sqrt{1.4}$$





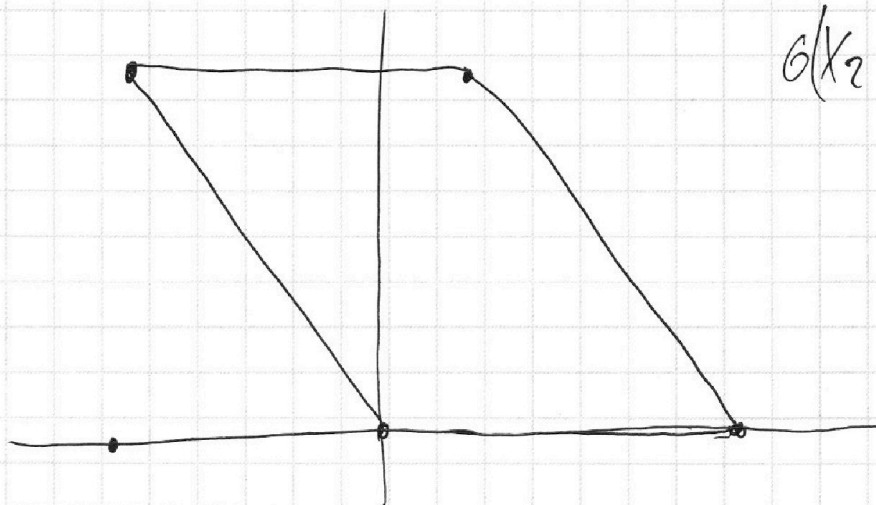
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48$$

$$y = kx + b$$

$$y_1 = kx_1 + b$$

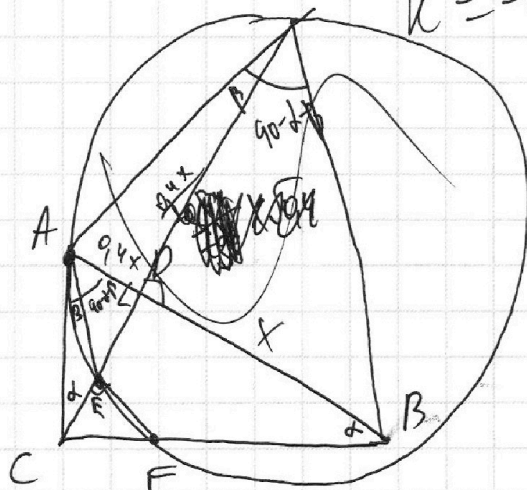
$$y_2 = kx_2 + b$$

$$6x_2 - 6x_1 + kx_1 + b - kx_2 - b = 48$$

$$(x_2 - x_1)(6 - k) = 48$$

$$6 - k = 48$$

$$k = -42$$



$$\tan \beta = \frac{0,4x}{?}$$

$$? = \frac{0,4x}{\tan \beta}$$

~~$$0,4x^2 = 0,4x \tan \beta$$~~

~~$$\frac{0,4x}{\tan \beta} = \frac{0,4x \cdot x}{\tan \beta} = x \sqrt{0,4} \quad \tan \beta = \sqrt{0,4}$$~~

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{2^4}$$

$$= (b+c+a)(b+c-a)(a+(b-c))(a-(b-c)) =$$

$$= (b^2+2ac+c^2-a^2)(a^2-b^2+2bc-c^2)$$

$$m = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$$4m = 2b^2+2c^2-a^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(x_2 - x_1) / (b + k) = 48$$

$$k = 42 \Rightarrow y = 42x + b$$

$$y = 0$$

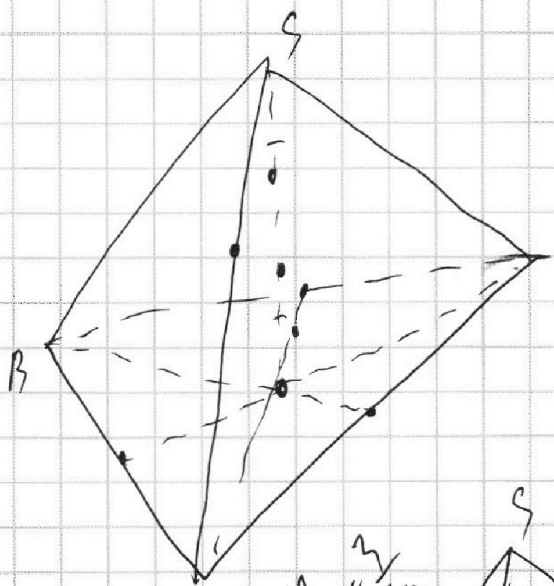
$$y =$$

$$y = kx + b$$

$$14k + b = 0$$

$$2 = 90k + b$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 90 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$



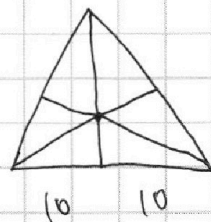
SP = MQ

SABC

$$a^1 = \frac{a}{2}$$

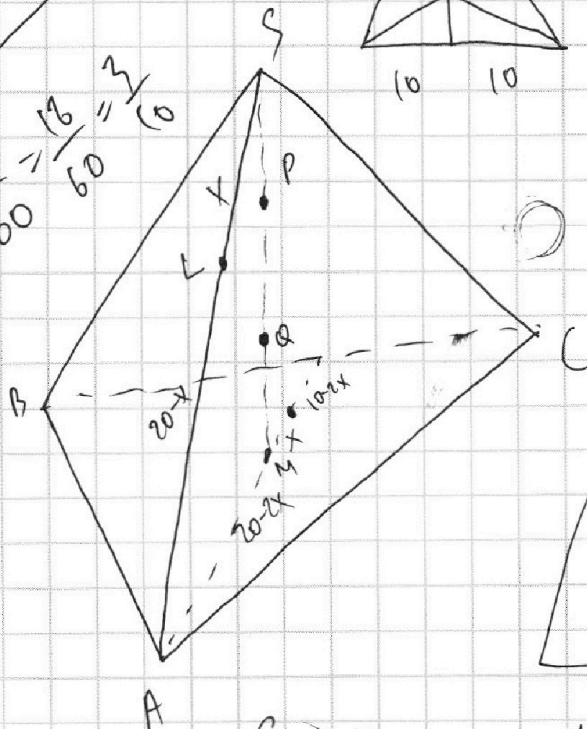
$$2a^{12} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$M_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

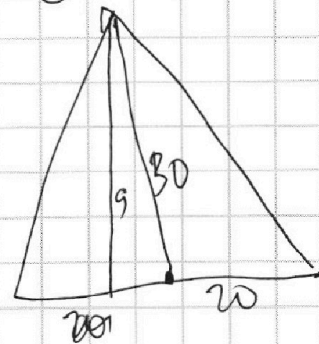


$$= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{120}{600} = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$$



$m = 30 - 2x$



$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$S = 30 - 20 \sin \alpha = 600 \sin \alpha$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6) Пусть расс-м такие  $A, B$ , где  $x_2 > x_1$ . Пусть  
они лежат на прямой  $y = kx + b$

тогда  $y_1 = kx_1 + b$

$$y_2 = kx_2 + b$$

~~$$b(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) = 48$$~~

~~$$(b + k)(x_2 - x_1) = 48$$~~

$$1) x_2 - x_1 = 1 \Rightarrow k = 48$$

~~$$x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow \text{точки } (0; 0) \text{ и } (1; 48)$$~~



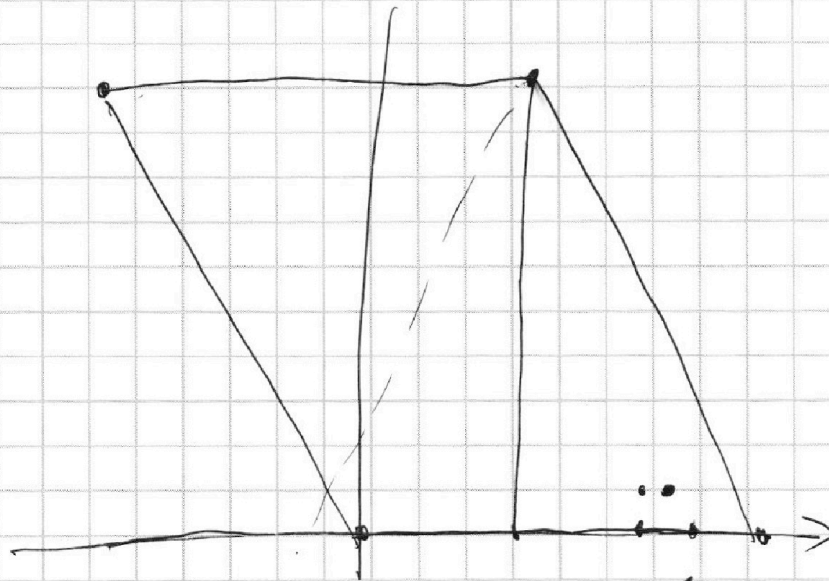
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1$$

$$y = 42x + 6$$

$$90 = 84 + 6$$

$$6 = 6$$

$$6 = 6$$

$$y = 42x + 6$$
$$y =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



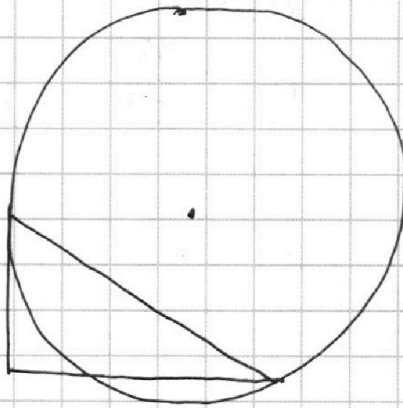
$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\sin x = t \quad \arcsin t = x$$
~~$$\sin x = t$$~~

$$\arccos(\sin x)$$

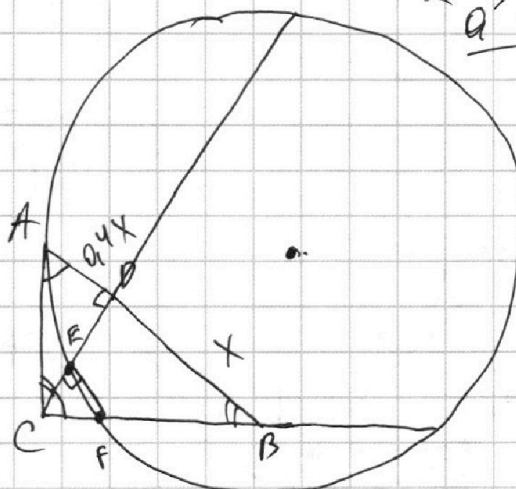
~~$$10 \arccos(\sin x)$$~~

$$b^4 - b^4 + b^4$$



$$\frac{CF}{CD} = \frac{CF}{CB}$$

$$\frac{a^5 + b^5}{a \cdot b}$$



$$\begin{array}{r} a^5 + 0 \cdot a^4 + 0 \cdot a^3 + 0 \cdot a^2 + 0 \cdot a + b^5 \\ - a^5 - a^4 b \\ \hline a^4 b + 0 \cdot a^3 \\ - a^4 b - a^3 b^2 \\ \hline - a^3 b^2 + 0 \cdot a^2 \\ - a^3 b^2 - a^2 b^3 \\ \hline - a^2 b^3 + 0 \cdot a \\ - a^2 b^3 - a b^4 \\ \hline a b^4 + b^5 \end{array}$$

$$a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4 \cdot 5 = 0$$

$$ab(a^3 + b^2)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^3 \cdot 5^{20}$$

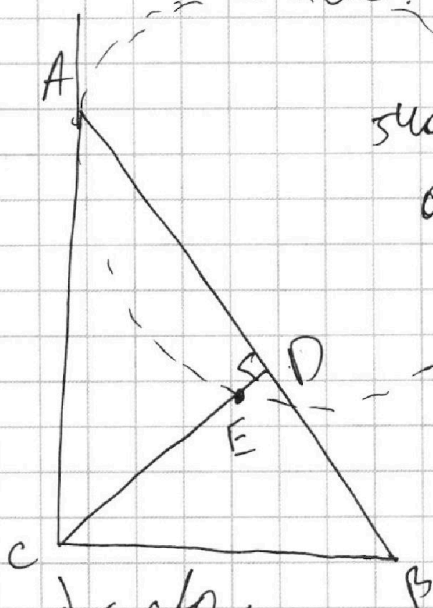
$$\frac{5}{45} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{CD}{CF} = \frac{CB}{CD}$$

~~abc~~  $abc : 2^{22} \cdot 3^{36} \cdot 5^{59} \cdot 7^{52}$

$$abc : 2^{18} \cdot 5^{26} \cdot 3^{29}$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$$



$$\sin \alpha \cdot 35 = 0$$

$$a = \frac{35}{54}$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$AB = 1,4 BD$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$$

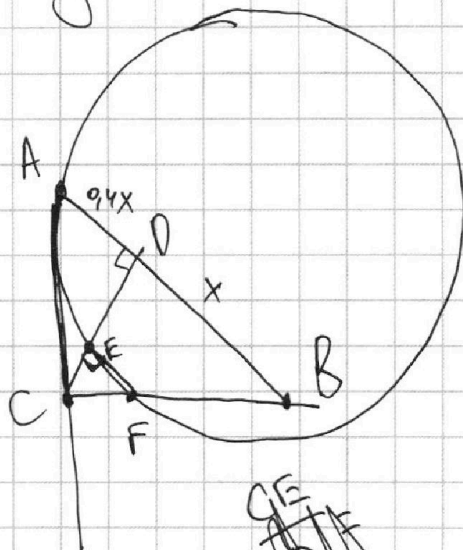
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$CE \cdot CD = CF \cdot CB$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$$

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$$

$$CB = CD$$



$$\frac{CE}{CF} = \frac{CD}{CB}$$