



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$n=1$

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = abc : 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$$

$$\text{Пусть } ab = 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot k$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot l$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \cdot m$$

$$\Rightarrow ab \cdot bc \cdot ac = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot klm$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \sqrt{klm} \quad \text{мысли}$$

$\nexists abc \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{klm} \cdot 3 \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$

Очевидно, что $klm : 3 \Rightarrow$ одно из k, l или m делится

на 3 и klm минимально при 2 значениях равных 1 и

$$\text{одно } 3 \Rightarrow \sqrt{klm} = 3 \Rightarrow abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \text{ (минимально)}$$

$$\text{Ответ: } 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

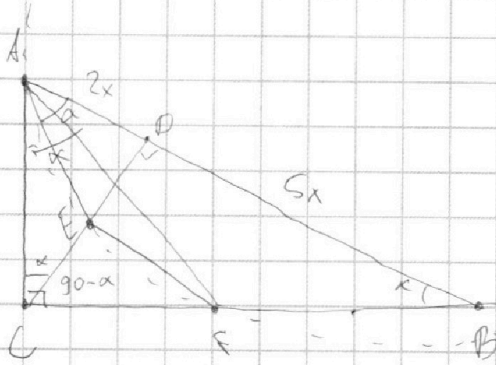
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 2



$$\textcircled{1} \frac{AB}{BD} = 1, x = \frac{7}{5}$$

Пусть $BD = 5x \Rightarrow AB = 7x$
 $\Rightarrow AD = 2x$

Пусть $\angle EAB = x$

т.к. $\triangle ABF$ - равнобедренная, то она равнобедренная. $\Rightarrow \angle EAB = \angle ABF = x$

т.к. AC - касательная к окружности,

то $\angle CAF = \angle ABF = x$ (угол между касательной и секущей)

$$\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = \left(\frac{AD}{AB} \cdot S_{\triangle ABC} \right) : \left(\frac{CE}{CD} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{DB}{AB} \cdot S_{\triangle ABC} \right) = \frac{AD \cdot CD \cdot BC \cdot AP}{AB \cdot EC \cdot CF \cdot DB} \cdot \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}} =$$

$$= \frac{AD}{BD} \cdot \left(\frac{BC}{CF} \right)^2 \quad \text{т.к. } EF \parallel AB, \text{ то } \frac{CE}{CD} = \frac{CF}{CB}$$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \operatorname{tg} \alpha}{CB} = \frac{CD \cdot \operatorname{tg} \alpha}{BD} \quad \text{т.к. } \frac{AC}{CD} = \frac{CB}{BD} = \cos \alpha \quad \left(\begin{array}{l} \angle C \text{ - кат. } \angle \text{ в } \triangle ABC \\ \angle ACP = 90^\circ - \angle ACP = \\ = 90^\circ - \alpha, \text{ т.к.} \end{array} \right)$$

$$\left(\angle PCB = 90^\circ - \angle DBC = 90^\circ - \alpha \right)$$

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$ в эту формулу в-ков $\triangle ACD$ и $\triangle CDB$ по

Зучаит (св-во высоты прямого \triangle -ка)

$$\Rightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Rightarrow CD = \sqrt{2x \cdot 5x} = x\sqrt{10} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{AP}{CD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{AD}{BD} \cdot \left(\frac{BC}{CF} \right)^2 = \frac{AD}{BD} \cdot \left(\frac{BD}{CD \cdot \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2x}{5x} \cdot \left(\frac{5x}{\sqrt{10x} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}} \right)^2 =$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{5}{2} = 2,5$$

Ответ: $\frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{5}{2} = 2,5$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N° 3

$$1) \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\cos(\arccos(\sin x)) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{9\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) = \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{4\pi}{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2 \sin \left(\frac{x - \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}}{2}\right) \cos \left(\frac{x + \frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5}}{2}\right) = 0$$

$$\textcircled{1} \sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$\textcircled{2} \cos\left(\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{5} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi n - \pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{5\pi n - \pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}, \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Ответ: } \frac{5\pi n - \pi}{2}, n \in \mathbb{Z}, \frac{7\pi}{6} + \frac{5}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

\Rightarrow при $69a \in \left[-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}\right]$ решений нет (теорема)
В остальных случаях, двоякая прямая \textcircled{B} можно
получить 4 решения.

$$\textcircled{B} \quad y = \frac{b}{6a} - \frac{5}{6a}x \quad (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{6a} \in \left[-\frac{\sqrt{32}}{7}; \frac{\sqrt{32}}{7}\right] \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{6a} \leq -\frac{\sqrt{32}}{7} \\ -\frac{5}{6a} \geq \frac{\sqrt{32}}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a < \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ a > \frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a < -\frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ a > -\frac{35}{6\sqrt{32}} \end{cases}$$

$$a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$$

и.к. \emptyset порядок

Ответ: при $a \in \left(-\frac{35}{6\sqrt{32}}; \frac{35}{6\sqrt{32}}\right)$

стр 2 из 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

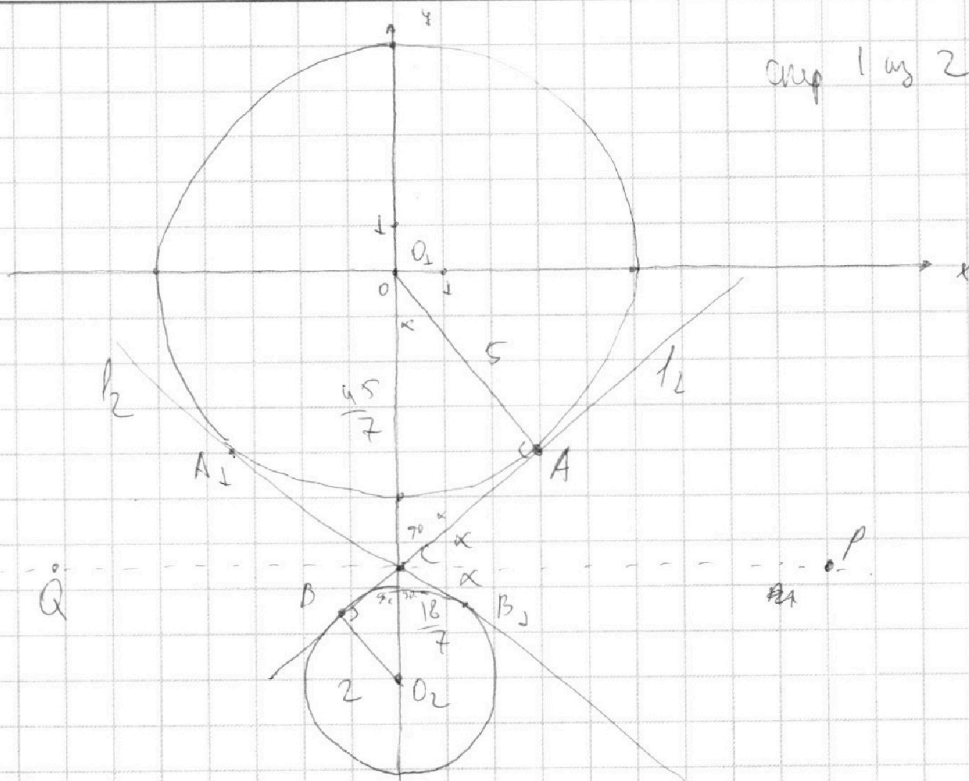


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N=4

опр 1 и 2



$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6ay = b - 5x \quad (3) \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \quad (1) \\ x^2 + (y+9)^2 - 4 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Графики функций (1) и (2) представляют собой окружности с центром в $O_1(0;0)$ и радиусом 5 и окружности с центром в $O_2(0;-9)$ радиуса 2. График (3) — прямая

Пусть l_1 и l_2 — общие внутренние касательные к 2 окружностям (см. рисунок). Пусть точки касания: A и B и $C = (O_1O_2) \cap (AB)$
 $\Rightarrow O_1A \perp AB$ и $O_2B \perp AB$ т.к. O_1 и O_2 — центры окружностей $\Rightarrow \angle O_1AC$ равен $\angle O_2BC$ по 3 углам.

$$\Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{и } O_1O_2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} O_1C = \frac{45}{7} \\ O_2C = \frac{16}{7} \end{cases}$$

(1) $a=0$ или $b=0 \Rightarrow 5x=0 \Rightarrow a=0$ порокорит, в остальных случаях x считаем, что $a \neq 0$. Пусть $\angle CAO_1 = \alpha$. Пусть $PQ \parallel O_1O_2$ и $C \in PQ$.
 $\angle ACP = 90^\circ - \angle O_1CA = \alpha \Rightarrow \angle BCP = \alpha$ в силу симметрии (очевидно из углов)

$$\begin{aligned} l_1 &= 6g \cdot x - O_1C \\ \Rightarrow l_2 &= -6g \cdot x - O_2C \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{По теореме Пифагора } b = CA \cdot O_2C = AC^2 = (O_2C - O_1C)^2 \\ \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{32}}{7} \Rightarrow 6g \cdot \alpha = \frac{AC}{O_1A} = \frac{\sqrt{32}}{7} \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$n=5$

$\log_{11}^4 x + 6(\log_x 11) = \log_x \frac{1}{121} - 5 + \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{(0,5y)} 11 = \log_{0,125y}^4 (11^{-3})$

пусть $a = \log_{11}^4 x$ $b = \log_{11}^4 0,5y$

$$\begin{cases} a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \\ b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b^2 + a^2)(b-a)(a+b) + \frac{16(b+a)}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$$

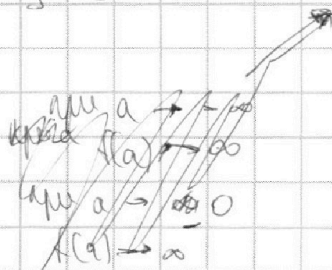
$\Rightarrow \textcircled{1} b-a=0$ $\textcircled{2} \begin{cases} (b^2 + a^2)(\frac{b-a}{a+b}) + \frac{16}{3ab} = 0 \\ a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \end{cases}$

$\log_x 11 = \log_{0,5y} 11$
 $x = 0,5y$

$f(a) = a^4 - \frac{16}{3a} + 5$ если $a \uparrow$, то $a^4 \uparrow + \frac{16}{3a} \downarrow - \frac{16}{3a}$
 $f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3a^2} = 0 \Rightarrow f(a) \uparrow$ на $(0, +\infty)$ на $(-\infty, 0)$

$xy = 2$

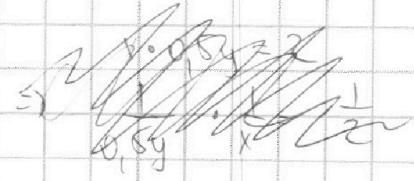
$12a^5 = -16$ имеет не более 1 решения



\Rightarrow по теореме Вейерштрасса в промежутке таком заданном $f(a)$ имеет не более 2 решений

при $a < 0$ $f(a)$ убывает
при $a > 0$ $f(a)$ возрастает
 $f(a) > 0 \Rightarrow$ на $(-\infty, 0)$ $f(a) > 0 \Rightarrow$ один корень
 \Rightarrow система имеет не более 2 решений

Скажем, что если $x=0,5y$ - решение, то $(\frac{1}{0,5y}, \frac{1}{x})$ - тоже решение



при очень малых a $f(a) > 0 \Rightarrow$ на $(-\infty, 0)$ нет пересечений с осью x .

Ответ: 2

\Rightarrow решений столько сколько осей $x, 0,5y$ пересеклись

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

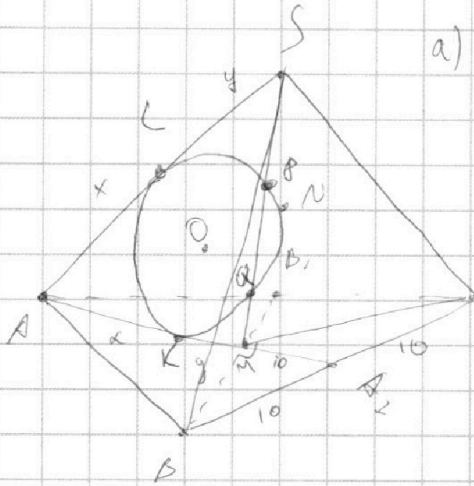
1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N°7



а) Пусть $AL = x$; $SL = y$; $SP = MQ = z$
Тогда площадь точки S = $\pi \cdot r^2$
 $= z(SM - z) = y^2$

А точка M = $z(SM - z) = x^2 \Rightarrow x = y$

M - центр $\triangle ABC$. По свойству
медианы $\frac{AM}{MA_1} = \frac{2}{1} \Rightarrow MA_1 = \frac{AM}{2}$

$$AM = x + y = AS = 20$$

$$\Rightarrow MA_1 = 10 = A_1C = PA_1 = \frac{1}{2} BC$$

$\Rightarrow \triangle BMC$ - прямоугольный (медиана равна половине стороны)

$$S_{BMC} = \frac{MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC} = \frac{MC \cdot BC}{2}$$

$$\Rightarrow AA_1 \cdot MC \cdot BC = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$$

$$AA_1 \cdot \frac{2}{3} BB_1 \cdot \frac{2}{3} CC_1 = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 180}{2} = 8100$$

Ответ: произведение длин медиан = 8100

б) $SN = 6 \Rightarrow SL = 6 = y$ (касательные из одной точки)

$$\Rightarrow x = 14$$

Пусть A_1K и A_1N_1 - касательные, причем $N_1 \in KA_1O$, где O - центр $\triangle ABC$

Рассмотрим $\triangle ONA_1$

$A_1N_1 = A_1K$. Пусть $N_1M \perp A_1BC \Rightarrow KN \perp BC$ в
силу симметрии

$$\frac{KM}{AN_1} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KM = \frac{8}{15} \cdot AN_1 = \frac{8}{15} \cdot \frac{S_{ABC}}{2BC} =$$

$$= \frac{8}{15} \cdot \frac{18}{2} = \frac{48}{5}$$

стр. 1 из 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

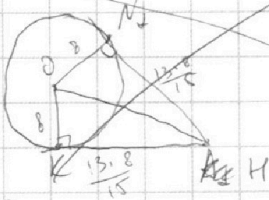
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



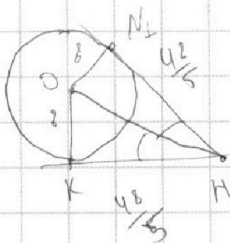
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим плоскость UN, OK



по теореме Пифагора: $OH = \frac{\sqrt{394} \cdot 8}{15}$

Рассмотрим плоскость HN, OK



по теореме Пифагора в $\triangle KON$:

$$OH = \frac{8\sqrt{51}}{5} \quad \text{угол } \varphi = \angle ONK$$

$$\cos \varphi = \frac{48 \cdot 5}{5 \cdot 8\sqrt{51}} = \frac{6}{\sqrt{51}}$$

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 = \frac{2 \cdot 36}{51} - 1 = \frac{7}{17} \quad \text{двуугольный угол} = 2\varphi$$

Ответ: $\arccos \frac{7}{17}$

стр 2 из 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$n=5$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \frac{1}{121} - 5 \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{11} 0,5y = \log_{11}^2 \frac{1}{x} - 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{11} x + 5 = 0 \\ \log_{11}^4 0,5y + \frac{16}{3} \log_{11} 0,5y + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 2 \end{cases}$$

① $\log_{11} 0,5y + \log_{11} x = 0$ ② $\log_{11} 0,5y + \log_{11} x = 0$ (вычитаем)

Заметим, что если (x, y) - решение, то $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$ тоже решение.
 $\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 \frac{1}{x}$
 $\log_{11}^4 0,5y = \log_{11}^4 \frac{1}{0,5y}$

Пусть $a = \log_{11}^4 x \Rightarrow f(a) = a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$

$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3} \Rightarrow f'(a)$ не может иметь больше

2 решений (по теореме Коши о промежуточном значении $\xi \in [a; b]$ если $f(a)=0$ и $f(b)=0$, то $\exists \xi$ существует $f'(\xi)=0$)

$\log_{11} 0,5y = -\log_{11} x \Leftrightarrow \log_{11} \frac{1}{x} = \log_{11} 0,5y$

\Rightarrow если (x, y) - решение, то $(\frac{1}{y}, \frac{1}{x})$ - тоже решение

① $\Rightarrow \log_{11}^2 0,5y (\log_{11} 0,5y + \log_{11} x) (\log_{11}^2 0,5y + \log_{11}^2 x + \frac{16}{3}) = 0$

\Rightarrow 2 значения $\log_{11} 0,5y$

\Rightarrow кр. $0,5y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 2$ (и кр. $x \neq 0$)

$\frac{1}{0,5y} = \frac{1}{0,5y} = 2$ Обмен x и y

$$\begin{aligned} \log_{11} x &= -\log_{11} 0,5y \\ &= \log_{11} \frac{1}{0,5y} \\ \log_{11} 0,5y &= -\log_{11} x \\ &= \log_{11} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

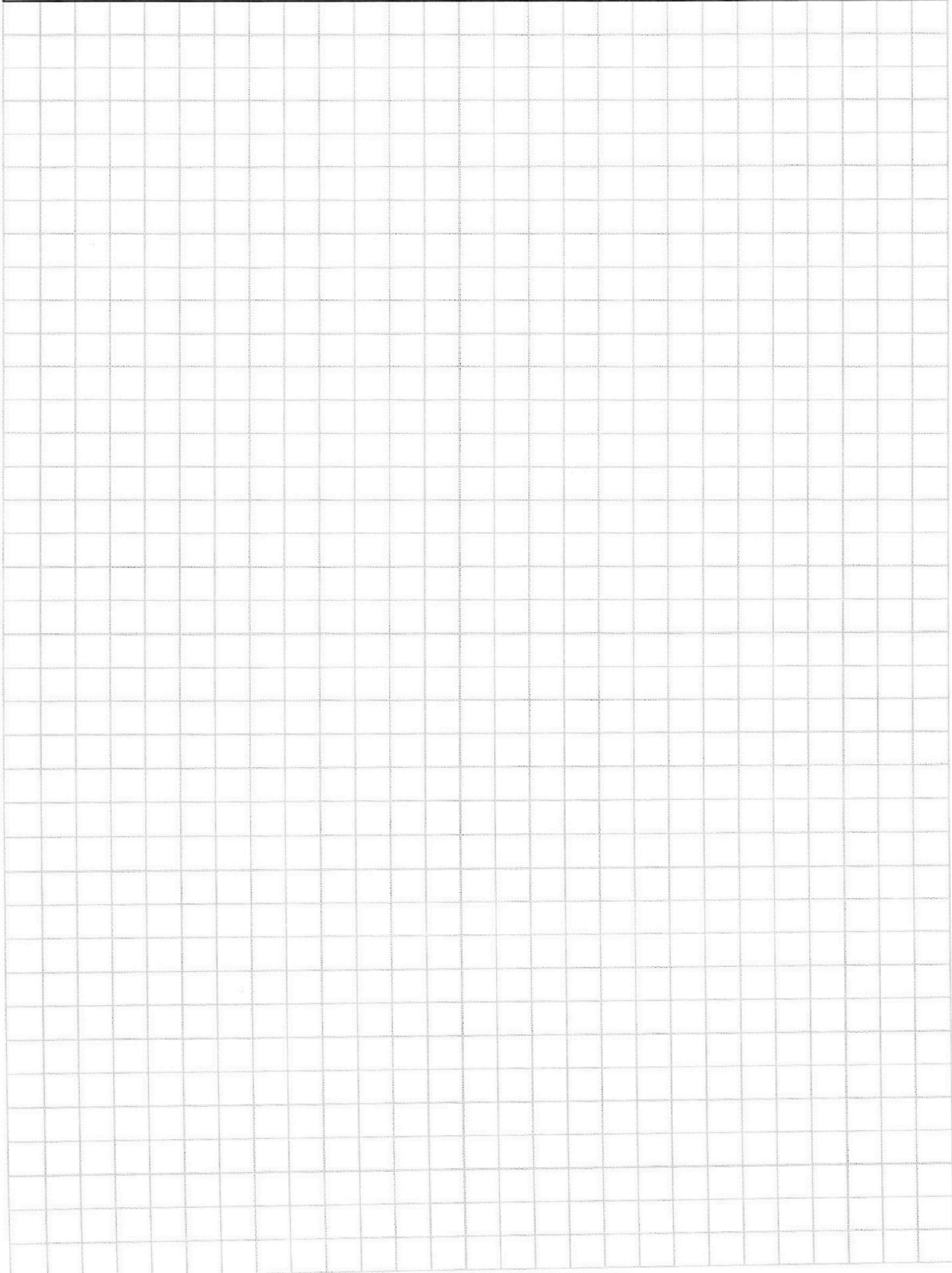


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



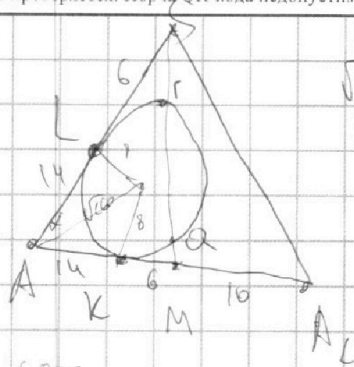
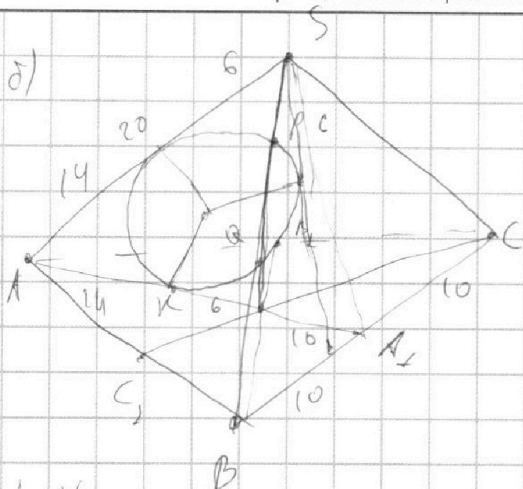
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\sqrt{196+81} = \sqrt{277}$$

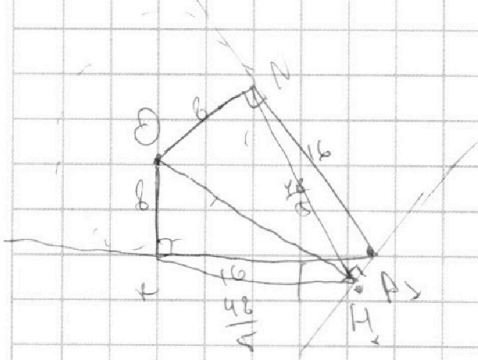
$$= \sqrt{260}$$

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{260}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{49 \cdot 2}{65} - 1 = \frac{98}{65} - 1 = \frac{33}{65}$$

по теореме косинусов

$$\Rightarrow SA_1^2 = 400 + 900 - \frac{2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 33}{65} = \frac{240 \cdot 33}{13}$$



Пусть AH - высота $\triangle OAK \Rightarrow AH \cdot DC = 180$

$$\Rightarrow AH = \frac{360}{20} = 18$$

$$\frac{KA_1}{AA_1} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} \Rightarrow KH_1 = \frac{8}{15} \cdot AH$$

$$= \frac{8}{15} \cdot 18 = \frac{48}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{KH_1}{AH} =$$

по теореме Пифагора $AH_1 = \frac{8\sqrt{51}}{5}$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{48 \cdot 5}{5 \cdot 8 \cdot \sqrt{51}} = \frac{6}{\sqrt{51}} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 =$$

$$= \frac{2 \cdot 36}{51} - 1 = \frac{21}{51} = \frac{7}{17}$$

и $\cos \alpha = \frac{7}{17}$

$$\frac{-\sqrt{32}}{7} \leq \frac{-5}{6a}$$

$$\frac{\sqrt{32}}{7} \geq \frac{5}{6a}$$

$$- \frac{5}{6a}$$

$$a > 0$$

$$6a \geq \frac{5}{\frac{\sqrt{32}}{7}}$$

$$a \geq \frac{35}{6\sqrt{32}}$$

$$\Rightarrow a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{35}{6\sqrt{32}}; \infty\right)$$

или $a < 0$
 $a < \frac{35}{6\sqrt{32}}$

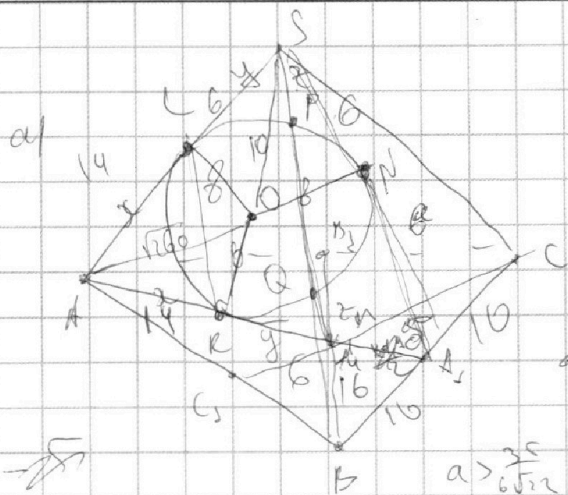
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = 16\sqrt{3}$$

$$S_A = S_B = S_C = 20$$

$$a < -\frac{35}{6\sqrt{32}}$$

$$a > 0$$

$$z(SM - z) = y$$

$$LK \parallel SM$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = \dots$$

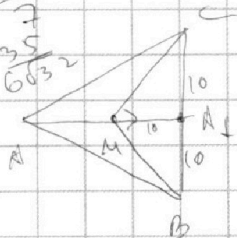
$$a > -\frac{35}{6\sqrt{32}}$$

СМВ - медиана

$$x^2 - y^2 = y$$

$$a > \frac{35}{6\sqrt{32}}$$

$$a < \frac{35}{6\sqrt{32}}$$



$$S_{CMB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MA_1}{AA_1} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{2}$$

$$CM \cdot MM \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot AA_1 \cdot AA_1 = \frac{1}{2} \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$$

$$AA_1 \cdot AA_1 \cdot CC_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 180 =$$

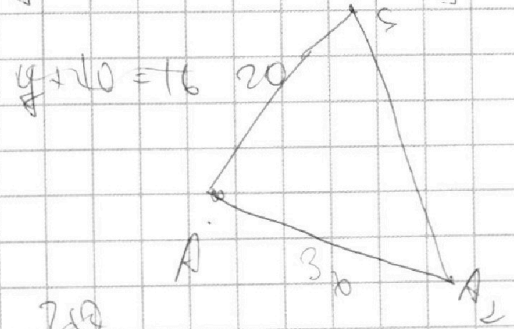
$$\begin{array}{r} 1800 \\ + 14 \\ \hline 1814 \\ + 6 \\ \hline 1820 \\ + 196 \\ \hline 2016 \\ + 64 \\ \hline 2080 \\ + 200 \\ \hline 720 \\ \hline 8100 \end{array}$$

$$CM \cdot MB = 2 S_{CMB} = \frac{2 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}}{AA_1}$$

$$AA_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot CC_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot BB_1 = 2 \cdot MA_1 \cdot S_{ABC}$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot S_{ABC} \cdot 10 \cdot MA_1 = \frac{180 \cdot 10 \cdot 9}{2} = 8100$$

a) $SN = 6 = SL \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 14$



$$14^2 = (a-6)(a+6) =$$

$$196 - 64 = 260$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{260}}$$

$$\cos \alpha = \frac{14}{\sqrt{260}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{2 \cdot 49}{65} - 1 = \frac{33}{65}$$

$$\frac{400 + 500 - 600}{65} =$$

$$\frac{260}{65} = 4$$

$$\frac{98}{65} = 1$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$a \cdot b = 6$
 $b + c = 14$
 $a + c = 16$
 $b - a + c = 6$

$n=1$
 $ab = 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot k$
 $bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{16} \cdot n$
 $ac = 2^{16} \cdot 3^{27} \cdot 5^{28} \cdot l$

$a^2 b^2 c^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k \cdot n \cdot l$
 $abc = \sqrt{2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52} \cdot k \cdot n \cdot l} = 2^{18} \cdot 3^{29} \cdot 5^{26} \cdot \sqrt{3 \cdot k \cdot n \cdot l}$
 $= \sqrt{2^{36} \cdot 3^{58} \cdot 5^{52}}$

найдем все значения
косинуса угла α
или $\alpha = t, \beta = t$
 $2 = t$ и $t = 3$

$\frac{S_{ACD}}{S_{CEB}} = \frac{AD}{PB} \cdot S_{CAB} = \frac{CE \cdot CF \cdot BD}{CP \cdot CB \cdot AB} \cdot S_{CAB}$
 $= \frac{AD \cdot CP \cdot CB \cdot AB}{AB \cdot CE \cdot CF \cdot BD}$

$\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5}$
 $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{2}{7}$

$\frac{AD}{AB} \cdot \frac{AB}{BD} = \frac{2}{5} = \frac{AD}{BD}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AD}{CP} \cdot \frac{CP}{DB} = \frac{AD}{AC} = \frac{CP}{BD}$

$\alpha_i \begin{cases} k+l \geq 6 \\ l+m \geq 14 \\ n+k+m \geq \end{cases}$

$a_1 + b_1 + c_1 = 8$
 $a_2 = 12$
 $a_2 + b_2 = 6$
 $b_2 + c_2 = 14$
 $a_2 + c_2 = 16$

$2x \cdot \cos \alpha = 5x \cdot \sin \alpha$
 $\frac{2}{5} = \tan \alpha$

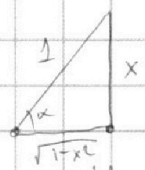
$\frac{2x \cdot 2}{5} = \frac{2}{5} = 5x$

$\cos \alpha = \frac{BD}{CP} = \frac{AD}{AB}$

$CP^2 = BD \cdot AD = 10x^2 = 2x \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow 50x^2 = 4x$
 $x = \frac{2}{50}$

$n=3$

$10a \cos(\sin x) = 9a - 2x$

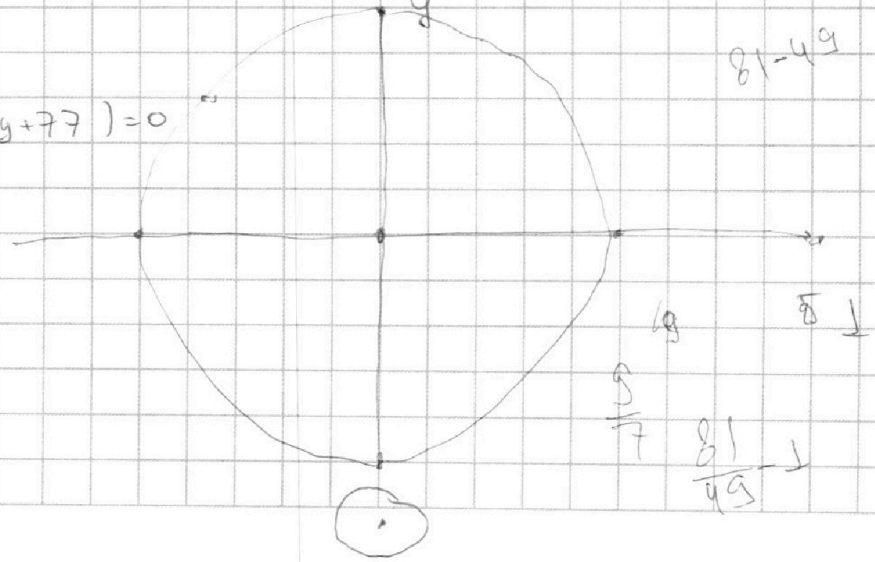


$\cos \alpha = \sin x = \cos \frac{9a - 2x}{10}$

$n=4$

$5x + 6ay - 6 = 0$
 $(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0$

$x^2 + (y+9)^2 = 4$



что $a = \cos \alpha + t$
 формула закон косинусов

$y = \frac{6 - 5x}{6a}$

$81 - 49$

$\frac{9}{7}$

$\frac{81}{49}$

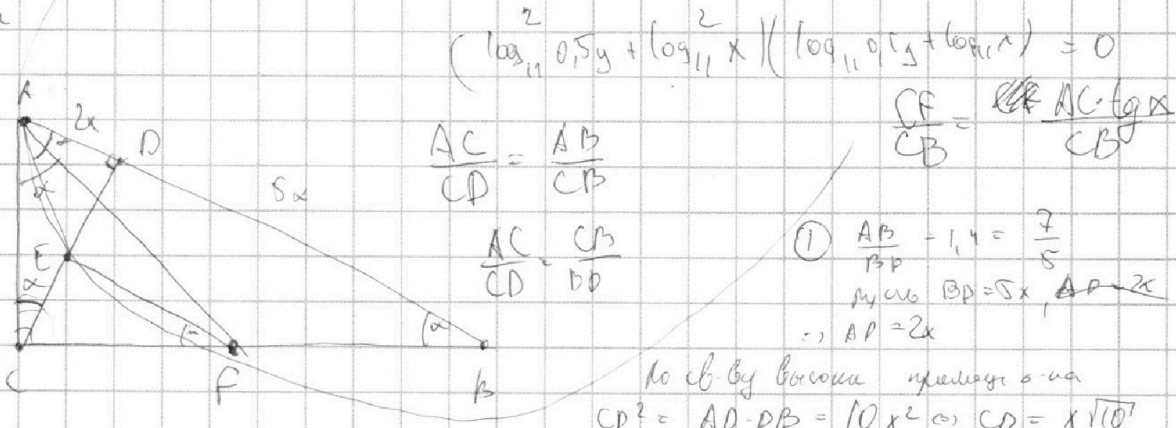
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$(\log_{11} 0,5y + \log_{11} x) (\log_{11} 0,1y + \log_{11} 1) = 0$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{CB}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{DB}$$

① $\frac{AB}{BD} = 1,4 = \frac{7}{5}$
 Пусть $BD = 5x, AD = 2x$
 $\Rightarrow AP = 2x$

По теореме Вюрца имеем: $CD^2 = AD \cdot DB = 10x^2 \Rightarrow CD = x\sqrt{10}$

$$\frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \sin \alpha}{CB} \Rightarrow \frac{CE}{ED} = \frac{CD - AD \cdot \sin \alpha}{CD}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{CB}{CA} \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{AC \cdot \sin \alpha}{CB} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AD}{CD} = \frac{2x}{x\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{CFE}} = \frac{S_{ACD}}{S_{CFD}} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CE}{CD} \cdot \frac{CF}{CB} \cdot \frac{BD}{AB} \right) \cdot S_{ABC} = \frac{AD \cdot CD \cdot CB \cdot AB}{AB \cdot CE \cdot CF \cdot BD}$$

$$= \frac{AD}{BD} \cdot \frac{CD \cdot CB}{CE \cdot CF}$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{BD} = \frac{\sqrt{10}x}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ACB}}{S_{CFE}} = \frac{2x}{5x} \cdot \left(\frac{CB}{CF} \right)^2 = \frac{2 \cdot 25}{5 \cdot 4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Ответ: **2,5**

$$\log_{11}^4 2 - 6 \log_x 11 = \log_{11}^4 x \Rightarrow \frac{1}{|2|} - 5 \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,5y}^4 y \Rightarrow 11^{-14}$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 + \frac{2}{3} \log_x 11 + 5 = 0 \quad \left| \log_{11}^4 0,5y + \log_{0,5y} 11 + \frac{13}{3} \log_{0,5y} 11 + 5 = 0 \right.$$

$$\log_{11}^4 2 - \frac{16}{3} \log_x 11 + 5 = 0 \quad \left| \log_{11}^4 0,5y + \log_{0,5y} 11 \cdot \frac{16}{3} + 5 = 0 \right.$$

$$\log_{11}^4 2 = \log_{11}^4 0,5y \Rightarrow \log_{0,5y} 11 - \log_{11} 2 + \log_{0,5y} \frac{16}{3} (\log_{0,5y} 11 + \log_x 11) = 0$$

1) $(\log_{0,5y} 11 + \log_x 11 = 0)$ 2) $(a^2 + b^2)(a + b) = 0$ $a + b = 0$
 $t = 0$ 2) $t^2 = -2ab$
 $a + b = -2ab$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_{0.5}^4 0.5y - \log_{0.5}^4 x + \frac{16}{3} (\log_{0.5}^2 |1| + \log_{0.5}^2 |1|) = 0$$

$$4a^2 - \frac{16}{3}a = 0$$

① $(a^2 + b^2)(a - b) = 0$ ② $a + b = 0$

$$((a-b)^2 + 2ab)(a-b) = 0$$

$$4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0 \quad \frac{16}{3} \sqrt{\frac{16}{3}} - \frac{16}{3} \sqrt{\frac{16}{3}}$$

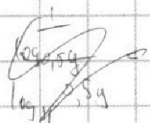
$$11a - b = 0$$

$$2) (a-b)^2 + 2ab = 0$$

$$a^2 + b^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{4}{3}$$

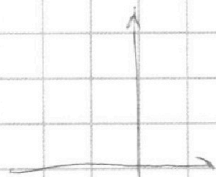
$$\log_{0.5}^2 |1| = \log_{0.5}^2 |1|$$



$$x = 0.5y$$

$$\log_{0.5}^4 x - \frac{16}{3} \log_{0.5}^2 |1| + 5 = 0$$

$$4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$



$$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$f'(a) = 4a^3 - \frac{16}{3}$$

$$f''(a) = 12a^2$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{3}} - \frac{16}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

если бы $f'(a)$ имела 3 корня
или $f'(a)$ имела бы более 2 корни
→ $f(a)$ имела бы

$$\log_{0.5}^4 x - 6 \log_{0.5}^2 |1| = \log_{0.5}^4 \frac{1}{12} - 5$$

$$\log_{0.5}^4 (0.5y) + \log_{0.5}^2 |1| = \log_{0.5}^4 (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{0.5}^4 x - \frac{16}{3} \log_{0.5}^2 |1| + 5 = 0$$

$$\log_{0.5}^4 0.5y + \frac{16}{3} \log_{0.5}^2 |1| + 5 = 0$$

$$\log_{0.5}^4 a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$a^4 - \frac{16}{3}a + 5 = 0$$

$$a(b^4 - a^4) + \frac{16}{3}(a+b) = 0$$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3} = 0$$

$$a+b = 0$$

$$a^2 - b^2 - a^2 + b^2$$

$$t(t^2 + 2ab) + \frac{16}{3} = 0$$

① $a + b = 0$

② $(a-b)(a^2+b^2) + \frac{16}{3} = 0$

$$(\log_{0.5}^2 x - \log_{0.5}^2 0.5y) (\log_{0.5}^2 x + \log_{0.5}^2 0.5y) \neq \frac{16}{3} = 0$$

$$\log_{0.5}^2 |1| = \log_{0.5}^2 \frac{1}{0.5y} |1|$$

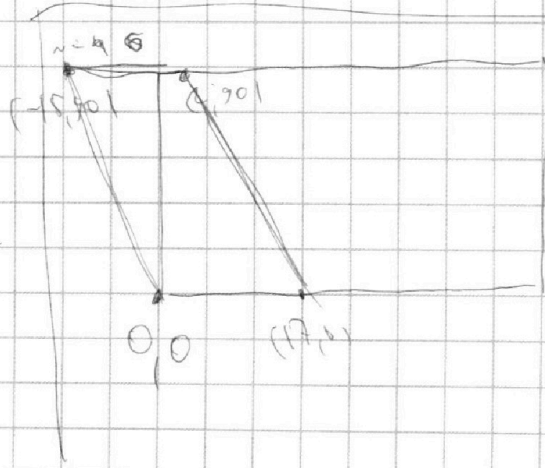
$$(\log_{0.5}^2 |1| - \log_{0.5}^2 |1|)$$

$$0.5xy = 1$$

$$xy = 2$$

$$\frac{1}{x_1} \frac{1}{y} = \text{some value} = 0.5$$

Ответ: 0.5, 2



$$6x_2 - 6x_1 + (y_2 - y_1) = 42$$

$$6x_2 + y_2 = 6x_1 + y_1$$

$$\log_{0.5}^2 |1| = \log_{0.5}^2 |1| - \log_{0.5}^2 |1| =$$

$$= \log_{0.5}^2 \frac{1}{0.5y} |1|$$

$$\log_{0.5}^2 |1| = -\log_{0.5}^2 |1| =$$

$$= \log_{0.5}^2 |1|$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving two circles and a line.

Problem Statement (reconstructed): Two circles are given. The first circle has center $O_1(0,0)$ and radius $r_1=5$. The second circle has center $O_2(0,-3)$ and radius $r_2=2$. A line l is tangent to both circles. Find the equation of the line l .

Solution:

Let the equation of the line be $5x + by - 6 = 0$.

Distance from $O_1(0,0)$ to line l is 5 :

$$\frac{|-6|}{\sqrt{25 + b^2}} = 5 \Rightarrow \sqrt{25 + b^2} = \frac{6}{5} \Rightarrow 25 + b^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow b^2 = \frac{36}{25} - 25 = -\frac{616}{25}$$
 (This path leads to a contradiction, so the line is not horizontal/vertical in the standard form used.)

Let the line be $5x - by = 6$.

Distance from $O_1(0,0)$ to line l is 5 :

$$\frac{|6|}{\sqrt{25 + b^2}} = 5 \Rightarrow \sqrt{25 + b^2} = \frac{6}{5} \Rightarrow 25 + b^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow b^2 = \frac{36}{25} - 25 = -\frac{616}{25}$$
 (Still a contradiction.)

Let the line be $5x + by = 6$.

Distance from $O_1(0,0)$ to line l is 5 :

$$\frac{|6|}{\sqrt{25 + b^2}} = 5 \Rightarrow \sqrt{25 + b^2} = \frac{6}{5} \Rightarrow 25 + b^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow b^2 = \frac{36}{25} - 25 = -\frac{616}{25}$$
 (Still a contradiction.)

Let the line be $5x - by = 6$.

Distance from $O_2(0,-3)$ to line l is 2 :

$$\frac{|6 - 3b|}{\sqrt{25 + b^2}} = 2 \Rightarrow |6 - 3b| = 2\sqrt{25 + b^2}$$
 Squaring both sides:

$$36 - 36b + 9b^2 = 4(25 + b^2) = 100 + 4b^2 \Rightarrow 5b^2 - 36b - 64 = 0$$
 Solving the quadratic equation:

$$b = \frac{36 \pm \sqrt{36^2 + 4 \cdot 5 \cdot 64}}{2 \cdot 5} = \frac{36 \pm \sqrt{1296 + 1280}}{10} = \frac{36 \pm \sqrt{2576}}{10}$$
 This path is also complex.

Geometric Solution:

Let $O_1(0,0)$ and $O_2(0,-3)$ be the centers. The distance between centers is 3 . The radii are 5 and 2 . The line l is tangent to both circles. The distance from O_1 to l is 5 , and from O_2 to l is 2 . The distance between the projections of O_1 and O_2 onto l is 3 .

Let A be the projection of O_1 onto l , and B be the projection of O_2 onto l . Then $AB = 3$, $AO_1 = 5$, and $BO_2 = 2$.

Let O be the midpoint of O_1O_2 . Then $OC = \frac{5}{2}$.

Let α be the angle between O_1O_2 and O_1A . Then $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ and $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

The angle between O_1O_2 and O_2B is $180^\circ - \alpha$. Then $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{3}{5}$ and $\cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5}$.

Let h be the distance from O to l . Then $h = \frac{5}{2} \cos \alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} = 2$.

The equation of the line l is $5x - by = 6$.

Distance from $O(0, -1.5)$ to l is 2 :

$$\frac{|6 - 1.5b|}{\sqrt{25 + b^2}} = 2 \Rightarrow |6 - 1.5b| = 2\sqrt{25 + b^2}$$
 Squaring both sides:

$$36 - 18b + 2.25b^2 = 4(25 + b^2) = 100 + 4b^2 \Rightarrow 2.25b^2 - 18b - 64 = 0$$
 Solving the quadratic equation:

$$b = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 + 4 \cdot 2.25 \cdot 64}}{2 \cdot 2.25} = \frac{18 \pm \sqrt{324 + 576}}{4.5} = \frac{18 \pm \sqrt{900}}{4.5} = \frac{18 \pm 30}{4.5}$$

$$b = \frac{48}{4.5} = \frac{16}{1.5} = \frac{32}{3}$$
 or $b = \frac{-12}{4.5} = -\frac{8}{3}$.

The equation of the line l is $5x - \frac{32}{3}y = 6$ or $5x + \frac{8}{3}y = 6$.