



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc . $2^{22} 3^{26} 5^{30}$
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.
- а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1 .
- б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

исходя из усл. $ac = x \cdot 2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 5^{30}$, $ab = y \cdot 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$,
 $bc = z \cdot 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$, где $x, y, z \in \mathbb{N}$, числа 2, 3 и 5 взаимно просты)

$$\Rightarrow ac \cdot b \cdot c \cdot ab = (abc)^2 = xyz \cdot 2^{42} \cdot 3^{41} \cdot 5^{53}$$

$$\Rightarrow abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{27} \quad (\text{так } (abc)^2 : 3^{41}, \text{ то } abc : 3^{\frac{41}{2} + \frac{1}{2}}, \text{ и т.д.})$$

замечим, что $ac : 5^{30} \Rightarrow abc : 5^{30} \Rightarrow$
 $\Rightarrow abc : 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \Rightarrow \min abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$

приведем пример таких a, b, c :

$$a = 2^7 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}, \quad b = 2^2 \cdot 3^2, \quad c = 2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{15}$$

$$\Rightarrow abc = 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30} \text{ существует.}$$

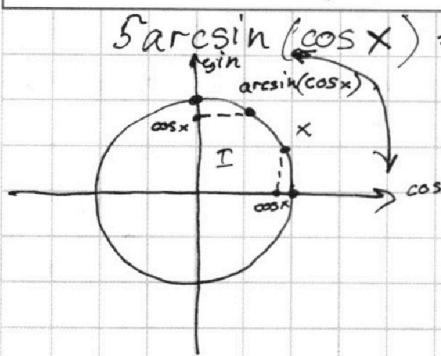
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ОДЗ: } |\arcsin(\cos x)| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x \in [-3\pi; 2\pi]$$

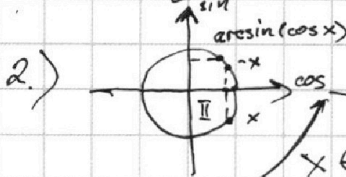
$$\Rightarrow 1.) \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n), x \in [0 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi + 10\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{4\pi}{3}; -3\pi$$

но $x \in [0 + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n] \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}; x = 2\pi$ (с ур. ОДЗ)



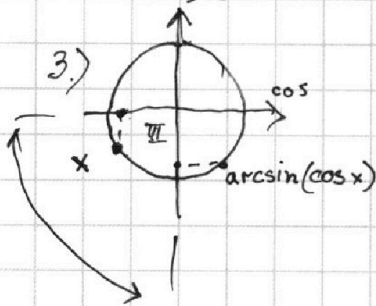
$$2.) \arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} + (x - 2\pi n), x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 0 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{2} + 5x - 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi + 10\pi n \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}n$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}; 2\pi; -3\pi \text{ (с ур. ОДЗ)}$$

с ур. ограничений на x в 2.) $x = -\frac{\pi}{2}; x = 2\pi$



$$3.) \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2} - 2\pi n, x \in [-\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 5x + \frac{5\pi}{2} - 10\pi n = x + \frac{\pi}{2}$$

$$4x = -2\pi + 10\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; 2\pi; -3\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2}; -3\pi$$

с ур. + ур. 2

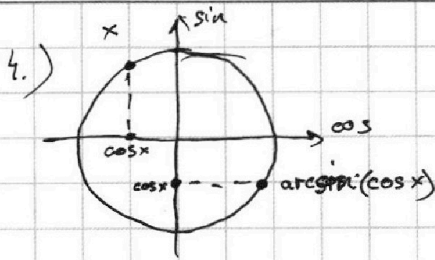
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - (x - 2\pi n);$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{2} - 5x + 10\pi n = \frac{\pi}{2} + x$$

$$6x = 2\pi + 10\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{3}; 2\pi; -\frac{4\pi}{3}; -3\pi \text{ (с уч. ОДЗ) (в к.1) это уже не решение)}$$

$$\text{с уч. на } x \text{ 4.) } x = -3\pi; -\frac{4\pi}{3}$$

в п.1.), 2.), 3.) и 4.) в общем рассмотрели все возможные значения x . \Rightarrow найдены все значения x .

$$x = 2\pi; \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{4\pi}{3}; -3\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

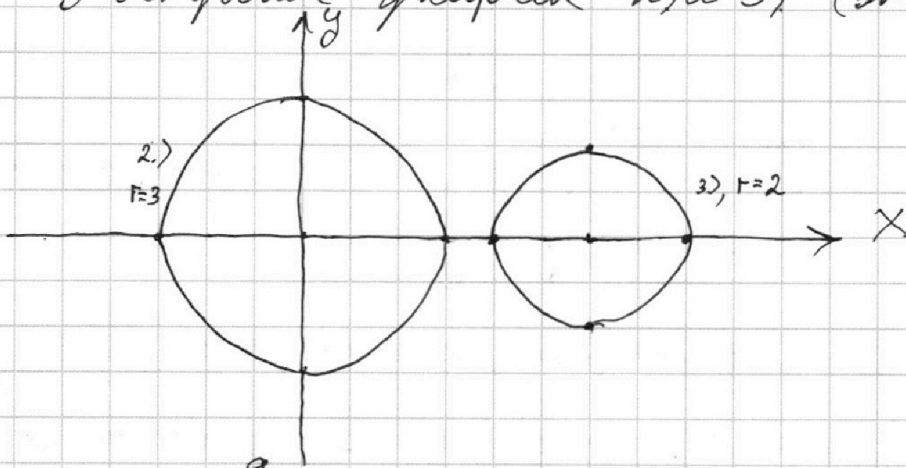
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

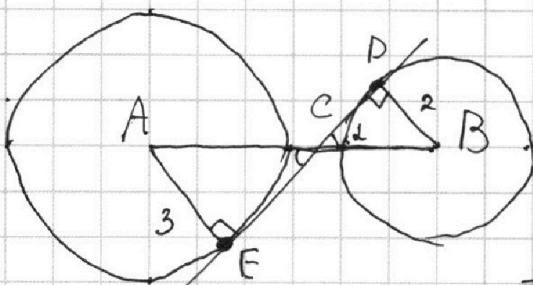
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} ax + 2y - 36 = 0 \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}6 & 1) \\ x^2 + y^2 = 9 & 2) \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 & 3) \end{cases}$$

Построим график 2) и 3) (это окружности)



пусть $-\frac{a}{2} = a_1$. 1.) - это прямая. нужно найти все $-2a_1$, где a_1 - коэфф. наклона, при кот. Е прямая, пересек. график в 4 точки (это возможно лишь тогда, когда эта прямая пересек. Зокр. в 2м. и II окр в 2. точка). так как есть симметрия отн. x , то если при a_1 такое есть, то и при $-a_1$ такое есть, и наоборот - если при a_1 невозможно, то и при $-a_1$ невозможно \Rightarrow найдём все $a_1 \geq 0$ (для удобства) пусть a_0 - коэфф. общей внутренней касательной к 2 окр. тогда при $a_1 \in [0; a_0)$ прямая существует. при $a_1 \geq a_0$ решений максимум 2, $\Rightarrow a_1 \in [0; a_0)$ найдём a_0 :



как ED - кас. \Rightarrow углы прямые,
 $AB = 6$ (из координат, $A=(0,0), B=(6,0)$)
 $\angle DCB = \angle ACE$ (верт.)

$$a_0 = \text{tg} \alpha = \frac{DB}{CD} \quad \triangle CDB \text{ и } \triangle ACE \sim \text{по 2 \u00c2}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{DB} = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2AC = 3CB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = 1,5CB \quad AB = AC + CB = 2,5CB = 6$$

$$BC = 2,4 \quad \text{по т. Пифагора: } CD = \sqrt{CB^2 - DB^2}$$

$$CD = \sqrt{5,76 - 4} = 4\sqrt{0,11} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2\sqrt{0,11}} \Rightarrow a_1 \in [0; \frac{1}{2\sqrt{0,11}})$$

$$\Rightarrow a \in (-\frac{1}{\sqrt{0,11}}; \frac{1}{\sqrt{0,11}})$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Равенства можно переписать в виде

$$1) \log_3^4 x = -\frac{7}{2} \log_x 3 - 8$$

$$2) \log_3^4(5y) = +\frac{7}{2} \log_{(5y)} 3 - 8$$

как видите, $5y = x \Rightarrow$

надо найти всевозможные ~~решения~~ ^{произведения 2} ~~решения~~ $\cdot \frac{1}{5}$

$$\log_3^4 x = \frac{1}{\log_x 3}, \log_x 3 = t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^4} = -\frac{7}{2} \log_x 3 - 8 \quad \log_{5y} 3 = t,$$

$$\frac{7}{2} t + \frac{1}{t^4} = -8. \text{ есть лишь } \frac{1}{5} \text{ р., так при } t \geq 0$$

реш. нет, а при $t < 0$ ~~решения 2~~ и при $t > -1$

реш. нет, то при $t < -1$, $\frac{7}{2} t$ умень-
шается ~~быстрее~~ $\frac{1}{t^4}$ уменьшается быстрее,
чем $\frac{1}{t^4}$. \Rightarrow надо найти ~~все~~ ~~решения~~ ~~единст-~~
~~венно~~ ~~возможная~~ пара $5y = x, xy = \frac{1}{5} x^2$

аналогично есть лишь 1 реш. $5y$, придем

$$5y = -x \text{ (из симметрии)} \Rightarrow xy = -\frac{1}{5} x^2$$

$$-\frac{7}{2} \log_x 3 = \frac{7}{2} \log_{(5y)} 3 \quad (t = -t, \text{ из симметрии})$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5y} \Rightarrow xy = \frac{1}{5}, \text{ и это } \frac{1}{5} \text{ значение.}$$



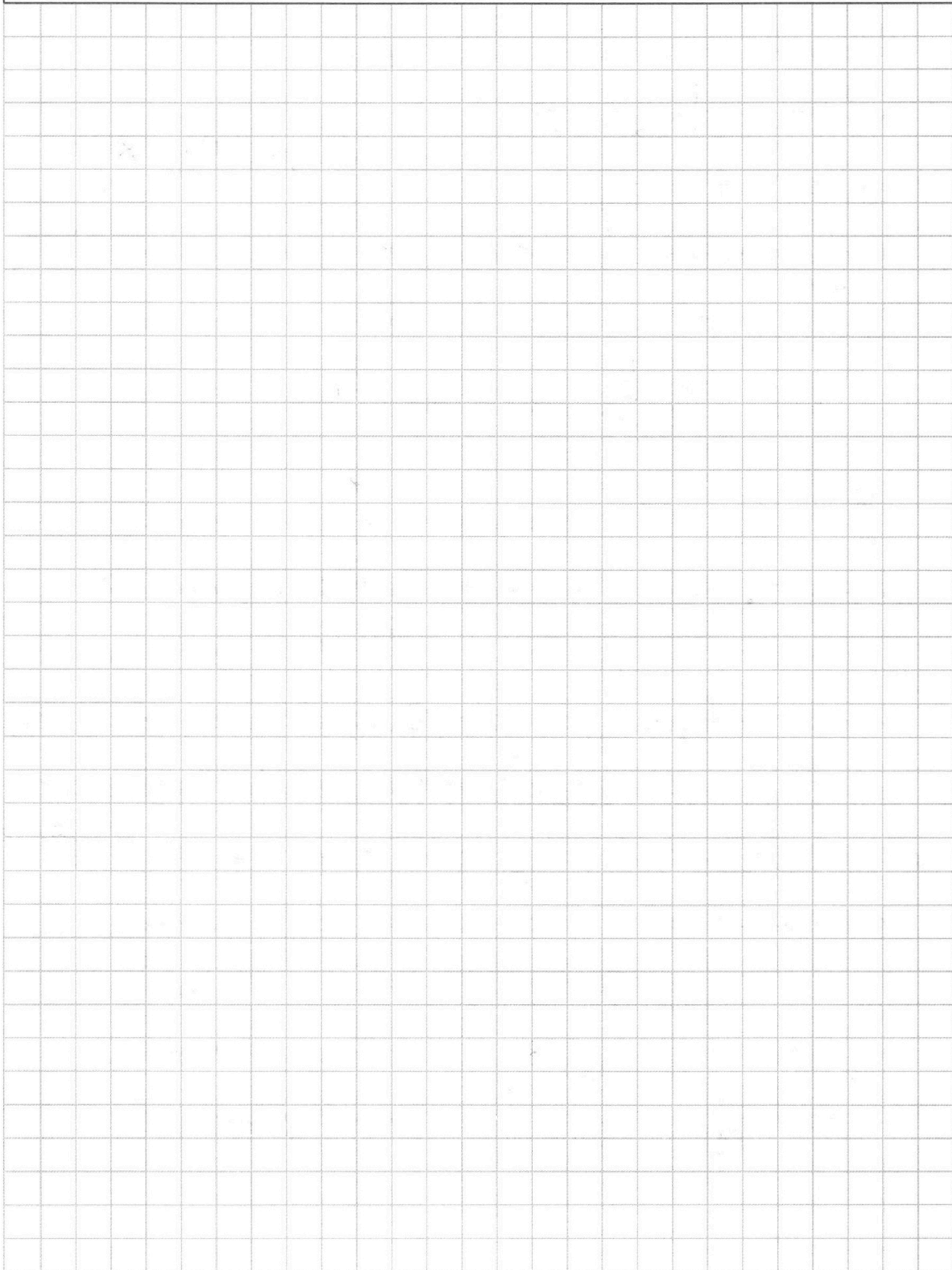
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



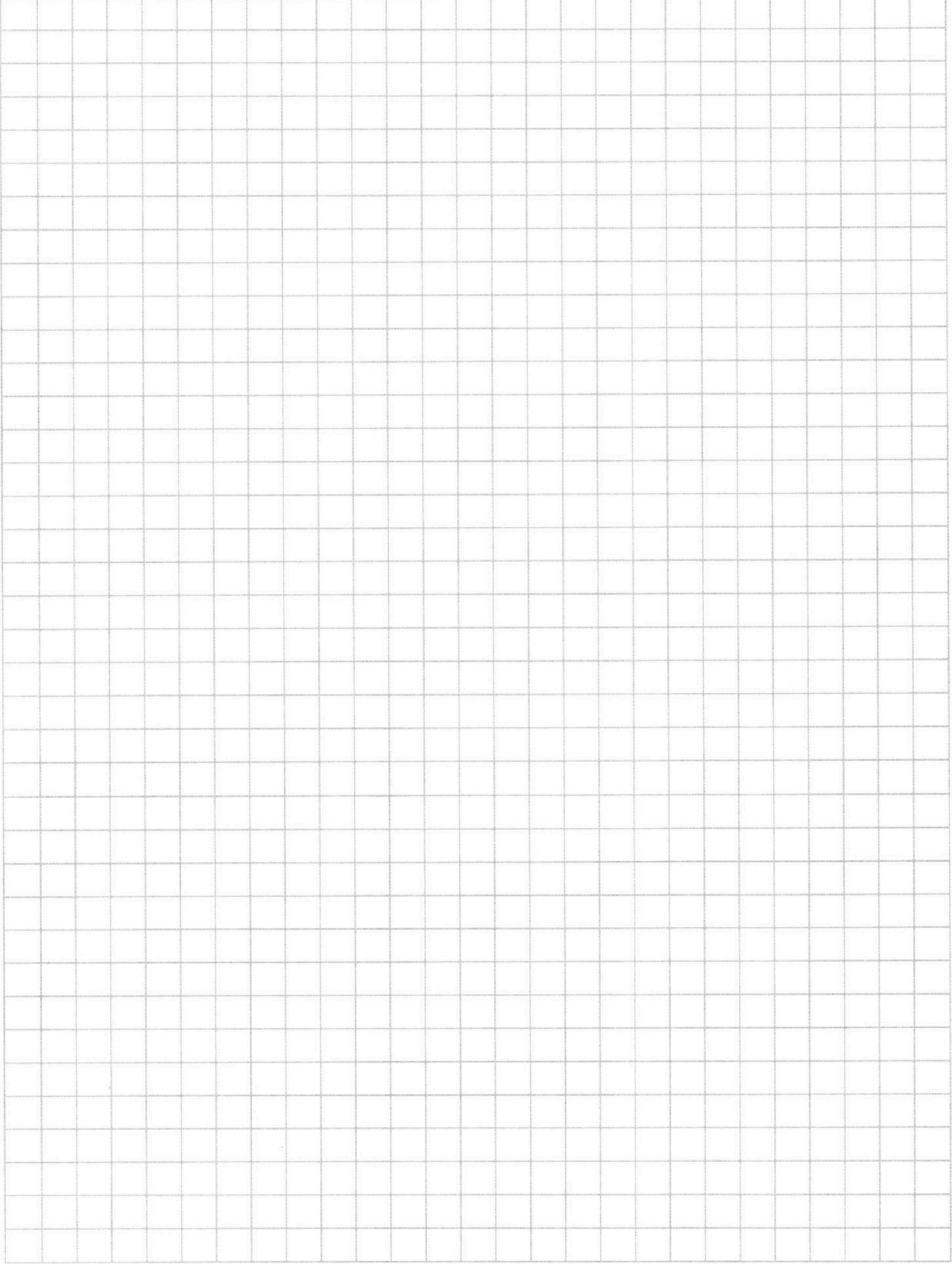
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

