



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\underbrace{5 \arcsin(\cos x)}_{\in [-5\pi; 5\pi]} = \underbrace{x + \frac{\pi}{2}}_{\in [-5\pi; 5\pi]} \quad \left( \text{OP3}; x \in \mathbb{R} \right)$$
$$\Rightarrow x \in [-5,5\pi; 4,5\pi]. \quad (1)$$

$$5 \arcsin\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = x + \frac{\pi}{2}; \quad \alpha = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$
$$\alpha \in [-\pi; \pi]$$

тогда существует 2 семейства:

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = \alpha + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{\pi}{2} = \pi - \alpha + 2\pi k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ x - \frac{3\pi}{2} = -\frac{x}{5} - \frac{\pi}{10} + 2\pi k. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 5\pi = 2x + \pi + 20\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 10x - 15\pi + 2x + \pi = 20\pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 6\pi + 20\pi k, & \\ 12x = 14\pi + 20\pi k, & \end{cases} \quad \begin{cases} 4x = 3\pi + 10\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ 6x = -3\pi + 10\pi k, & \end{cases}$$

$$\text{Исходя из (1): } x \in [-5,5\pi; 4,5\pi] \Rightarrow \begin{cases} 4x \in [-22\pi; 18\pi] \\ 6x \in [-33\pi; 27\pi] \end{cases}$$

Из этого ограничения следует, что

$$4x \in \{-17\pi; -7\pi; 3\pi; 13\pi\} \quad \text{Больше решений нет.}$$
$$6x \in \{-33\pi; -23\pi; -13\pi; -3\pi; 7\pi; 17\pi\}$$

$$x \in \left\{ -\frac{33}{6}\pi; -\frac{17}{4}\pi; -\frac{23}{6}\pi; -\frac{13}{6}\pi; -\frac{7}{4}\pi; -\frac{3}{6}\pi; \frac{3}{4}\pi; \frac{7}{6}\pi; \frac{17}{6}\pi; \frac{13}{4}\pi \right\}$$

ответ:  $\uparrow$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

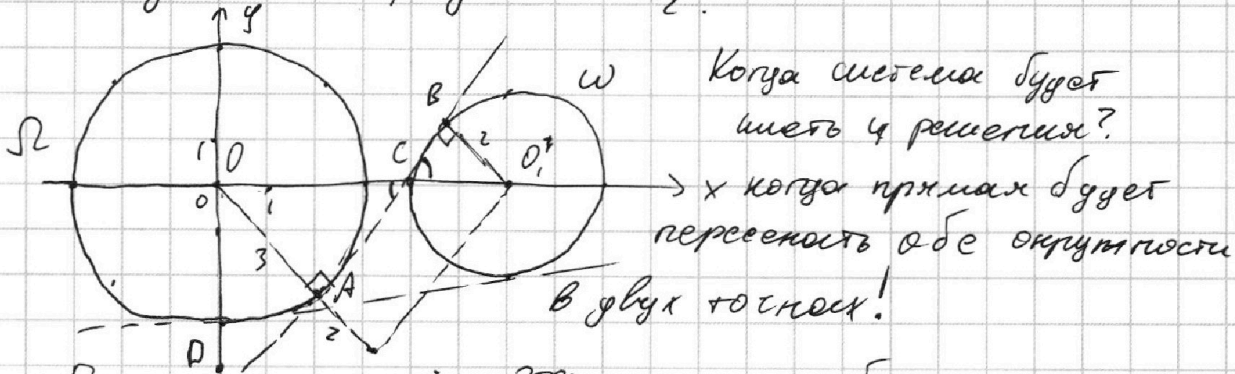
Задача 4.

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{ОРЗ: } x, y \in \mathbb{R}$$

$$(2): \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + y^2 = -32 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 = 36 - 32 = 4 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = 9$  - окр.  $\Omega$  с центром в  $(0; 0)$  радиуса 3  
 $(x - 6)^2 + y^2 = 4$  - окр.  $\omega$  с центром в  $(6; 0)$  радиуса 2

(1):  $2y = 3b - ax$ ;  $y = 1,5b - \frac{ax}{2}$  - линейная функция.



Когда система будет иметь 4 решения?  
 → когда прямая будет пересекать обе окружности в двух точках!

Пределной ситуацией: эта прямая - общая касательная.

Заметим, что если прямая - внешняя касательная, то ее всегда можно сместить так, чтобы появились 4 точки пересечения, ибо в одной из поперечностей, ~~пересекаемых~~ ~~этой~~ ~~прямой~~ ~~этой~~ ~~прямой~~ всегда есть окружности и если сдвинуть касательную в сторону центров окружностей на не "слишком большое" ненулевое расстояние, очевидно, что коэффициент  $a$  не изменится, т.к. выполняется параллельный перенос, а точек пересечения станет 4, что и требуется.

Значит, предельной ситуацией - внутренней общей касательной.

Стр 1 из 2.



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача 4, продолжение.

Т.к. картинка симметрична отн.  $OX$ , будем рассматривать лишь  $\omega$  касательную  $AB$  с рисунка.

$A$  - точка касания  $\Omega$  прямой  $AB$ .

$B$  - точка касания  $\omega$  прямой  $AB$ .

$O; O_1 \in OX$ ;  $OO_1 = 6$ .

радиусы  $\Omega, R = 3$ ; радиусы  $\omega, r = 2$ .

$C = AB \cap OO_1 \Rightarrow \triangle OAC \cong \triangle O_1BC$  т.к.  $\angle OCA = \angle O_1CB$   
(вертикальные)

$$\angle OAC = \angle O_1BC = 90^\circ \Rightarrow \frac{OC}{O_1C} = \frac{OA}{O_1B} = \frac{R}{r} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{OC}{O_1C} = \frac{3}{2} \\ OC + O_1C = OO_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OC = 3,6 \\ O_1C = 2,4 \end{cases}$$

$\triangle O_1BC$ :  $\angle B = 90^\circ$ ;  $O_1B = r = 2$ ;  $O_1C = 2,4$ . по т. Пифагора:

$$CO_1^2 = O_1B^2 + CB^2; \quad \frac{4 \cdot 144}{100} = \frac{400}{100} = CB^2 = \frac{176}{100}; \quad CB = \sqrt{\frac{16 \cdot 11}{100}}$$

$$CB = 0,4 \sqrt{11}$$

вычисляем угловой коэффициент  $\alpha$  для  $AB$  в системе  $OxOy$ .

$$\alpha = \operatorname{tg}(\angle OX; AB) = \operatorname{tg} \angle O_1CB = \frac{O_1B}{BC} = \frac{2}{0,4 \sqrt{11}} = \frac{20}{4 \sqrt{11}} = \frac{5 \sqrt{11}}{11}$$

т.к.  $O_1C \in OX$ ;  $CB \perp AB$ .

Значит, при  $\alpha \geq \frac{5 \sqrt{11}}{11}$  при любом  $b$  может быть не более двух решений.

Т.к. картинка симметрична отн.  $OX$ , то все верно и для  $\alpha \leq -\frac{5 \sqrt{11}}{11}$ .

Значит, лишь при  $\alpha \in \left( -\frac{5 \sqrt{11}}{11}; \frac{5 \sqrt{11}}{11} \right)$

можно найти такое  $b$ , что иск. сист. имеет 4 решения.

$$\text{Ответ: } \alpha \in \left( -\frac{5 \sqrt{11}}{11}; \frac{5 \sqrt{11}}{11} \right)$$

стр 2 из 2



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \\ \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^4) - 8 \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } 5y > 0; x > 0. \\ 5y \neq 1 \quad x \neq 1$$

Замена:  $5y = a$ ;  $\log_3 x = \alpha$ ;  $\log_3 a = \beta$ .

$$\begin{cases} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 x} = 8 \\ \log_3^4 a + 2 \cdot \frac{1}{\log_3 a} - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 a} = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^4 + 6 \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} = 8 \\ \beta^4 + 2 \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\beta} = 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^5 + 6 - \frac{5}{2} = 8\alpha \\ \beta^5 + 2 - \frac{11}{2} = 8\beta \end{cases} \quad \begin{cases} 8(\alpha + \beta) = \alpha^5 + \beta^5 + 8 - \frac{16}{2} = \alpha^5 + \beta^5 \\ \alpha^5 + \beta^5 - 8(\alpha + \beta) = 0. \end{cases}$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha^4 - \beta\alpha^3 + \beta^2\alpha^2 - \beta^3\alpha + \beta^4) - 8(\alpha + \beta) = 0.$$

$$\begin{cases} (\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = \log_3 x + \log_3 a = \log_3(ax) = \log_3(5xy) = 0 \\ \alpha^4 - \beta\alpha^3 + \beta^2\alpha^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 = 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5xy = 1; \\ xy = 0,2. \end{cases}$$

Ответ: 0,2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



### Задача 6.

Заведём  ~~$b(x, y) = 3x + y$~~   $b(x, y) = 3x + y$ .

Заметим, что условие:  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$   
можно записать в виде:

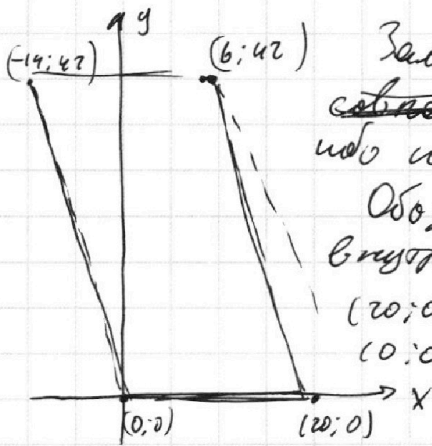
$$3x_2 + y_2 = 33 + 3x_1 + y_1 \quad \text{т.е.} \quad b(x_2, y_2) = 33 + b(x_1, y_1)$$

Объединим точки в семейства, где в семействе  $b_1$   
где  $b_2$  это всех точек одного семейства совпадают.

Заметим, что все точки семейства лежат на одной  
прямой:  $b(x, y) = 3x + y$  и  $y = -3x + b(x, y)$ .

и т.к.  $b(x, y)$  совпадают, то все они лежат на одной  
прямой:  $y = -3x + c$ ;  $c = \text{const}$ .

Семейство будем обозначать по  $b(x, y)$ . Например,  
 $b_1$  - семейство, где  $b(x, y) = 21$ .



(не перпендикулярны оси  $Ox$ )  
Заметим, что стороны параллелограмма  
составлены параллельными прямыми семейств,  
ибо имеют угловой коэффициент  $-3$ .

Обозначим:  $|b_i|$  - количество точек семейства  
внутри параллелограмма.

$(60;0) \in b_{60}$ . Значит, имеет смысл  
 $(0;0) \in b_0$  рассматривать только.

$b_i$ , где  $i \in [0; 60]$ .

Заметим, что при  $i \in [0; 57]$ :  $|b_i| = |b_{i+3}|$ , т.к. ~~то~~  
точки семейств отличаются лишь сдвигом  $x$  координаты  
на 1. ~~(тогда)~~

~~Всего~~ итого: Задача свелась к тому, чтобы  
посчитать:  $\sum_{i=0}^{57} |b_i| \cdot |b_{i+3}|$  (потому что для каждой  
пары точек из разных семейств,  
~~каждая пара~~  $b(x_2, y_2) - b(x_1, y_1) = i + 33 - i = 33$  стр 1 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

### Задача 6 (продолжение)

$|b_0|$  - количество точек на отрезке  $(-14; 42) \cap (0; 0)$ .

$|b_0| = 15$ , т.к.  $\forall x \in \mathbb{Z}, x \in [-14; 0]$  можно сопоставить  $y = -3x$ , ~~которые~~, ибо  $y \in [0; 42]$ .

$|b_1| = 14$ , т.к. если ~~рассмотреть~~ рассмотреть  $f(x) = -3x + 1$ ,  
~~то на отрезке  $[0; 42]$~~ , то  $\begin{cases} f(x) \geq 0 & x \geq -\frac{1}{3} \\ f(x) \leq 42 & -3x \leq 41 \end{cases} \begin{matrix} x \in [0; 14\frac{2}{3}] \\ 13\frac{2}{3} \end{matrix}$ .

$$|b_2| = 14, \quad f(x) = -3x + 2; \quad \begin{cases} -3x + 2 \geq 0 & x \geq -\frac{2}{3} \\ -3x + 2 \leq 42 & x \leq \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3} \end{cases}$$

т.к.  $|b_i| = |b_{i+3}|$ , то  $|b_i| = |b_r|$ , где  $r \equiv i \pmod{3}$ ; ~~т.к.  $|b_i| = |b_{i+3}|$~~ .

Итого:

$$\sum_{i=0}^{27} |b_i| \cdot |b_{i+33}| = \sum_{i=0}^{27} |b_i|^2, \quad \text{т.к. } 33 \equiv i \pmod{3}$$

$$\sum_{i=0}^{27} |b_r|^2, \quad \text{где } r - \text{остаток } i \text{ от деления на } 3.$$

$$\sum_{i=0}^{27} |b_r|^2 = |b_0|^2 \cdot \left\lfloor \frac{27}{3} \right\rfloor + |b_1|^2 \cdot \left\lfloor \frac{26}{3} \right\rfloor + |b_2|^2 \cdot \left\lfloor \frac{25}{3} \right\rfloor =$$

$$= 15^2 \cdot 9 + 14^2 \cdot 8 + 14^2 \cdot 8 = 225 \cdot 9 + 196 \cdot 16 =$$

$$= 3136 + 2025 = 5161.$$

Ответ: 5161.

стр 2 из 2.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

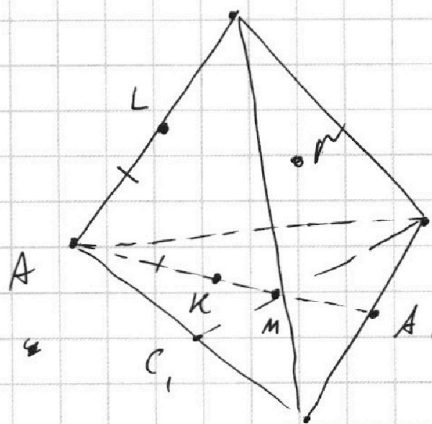
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Заметим, что.

$AB = BC$ ,  
тогда  $AA_1$  — высота  
симметричная относительно  $AA_1$ .

~~8000~~

$$S_{ABC} = CB \cdot AA_1 \Rightarrow AA_1 = 15 \quad SN = SL = 4 \Rightarrow AL = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK = 8 \Rightarrow KA = 7$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Замена:  $5y = a$ ;  $a > 0 \therefore a \neq 1$   $\log_3 x = \alpha$   
 $x > 0 \therefore x \neq 1$   $\log_3 5y = \beta$   
 $xy = aex \cdot \frac{1}{5}$

$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{1}{2} \log_x^2 \frac{25}{3} = \alpha + \beta = \log_3(a \cdot x)$

$\alpha^4 + 6 \cdot \frac{1}{\alpha} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} = 8$

$\beta^4 + 2 \cdot \frac{1}{\beta} - \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{\beta} = 8$

$\alpha^5 + 6 - \frac{5}{2} = 8\alpha$

$\beta^5 + 2 - \frac{11}{2} = 8\beta$

$\alpha^4 + \beta^4$   
 КВ ( $-11, 8$ )

2025
3136
5161

$\alpha^5 + \beta^5 + 8 - \frac{5+11}{2} = (\alpha + \beta) \cdot 8$

$\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha + \beta) \cdot 8$

$x^5 + 0 + 0 + 0 + 0 + a^5$	$x + a$
$x^5 + ax^4$	$x^4 + ax^3$
$ax^4$	
$0^5$	

$(x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4) =$   
 $= x^5 + ax^4 - ax^4 - a^2x^3 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^3x^2 + a^4x - a^4x$

$\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \beta\alpha^3 - \alpha\beta^2 = 8$

$(\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha\beta(\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\beta^2)$

$\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \beta\alpha^3 + \alpha\beta^2 = 8$

$(\alpha^2 - \beta^2)^2 - (\alpha - \beta)\alpha\beta$

$-\frac{11\alpha}{4} =$





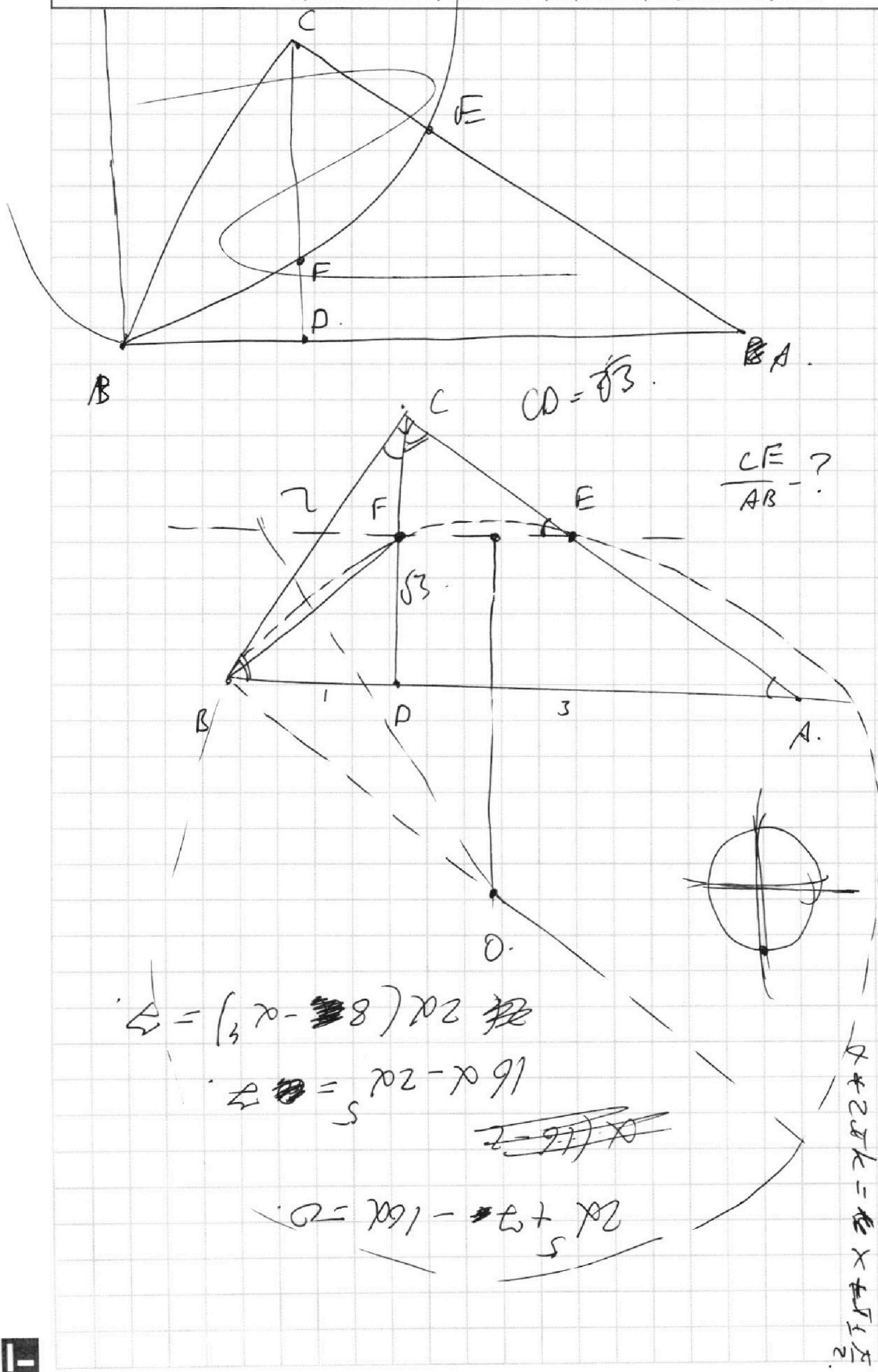
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$5 \cos \sin \left( \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$G(-5x; 5x)$$

$$x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$x + 2\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$5 - x + 2\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

$$2x + \pi - 16x = 0$$

$$16x - 2x = \pi$$

$$14x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{14}$$

$$x + 2\pi k = x + \frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



003:  $x > 0$   
 $x \neq 1$

$\delta - \beta = 20$   
 $\delta + \beta = 13$

$x - \frac{\pi}{2}$

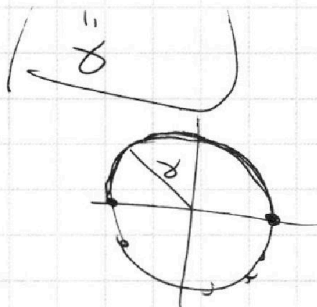
$30x + 0y = 33$

$\cdot (1 - 9) = 9 \cdot 1$

$\alpha_2 = 9$   
 $\beta_2 = 0$   
 $\delta_2 = 20$   
 $\alpha_2 = 9$   
 $\beta_2 = 2$   
 $\delta_2 = 12$

$\log_3^4 x + 6 \log_3 x = \log_3^{243} - 8$

$4 \log_3 x + 6 \log_3 x = \frac{1}{2} \log_3 3^5 - 8$



$\arcsin(\sin(x - \frac{\pi}{2})) = x + \frac{\pi}{2}$

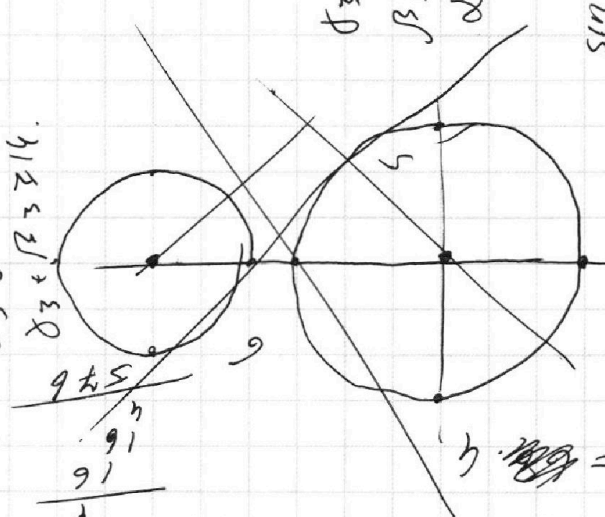
$\frac{19}{51}$   
 $\frac{41}{55}$   
 $\frac{42}{9}$

$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = \cos x$

$\cos x$

$\delta_3 - \beta_3 \geq 8$

$\delta_3 + \beta_3 \geq 14$

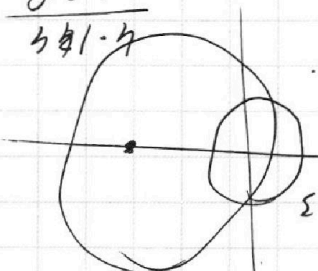


100  
4.144  
diametr. cer.

$\frac{16}{91}$   
 $\frac{16}{91}$   
 $\frac{144}{4}$

$(x-6)^2 + y^2 = 2(9-x)$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 = 18 - 2x$



$\frac{16}{2} = \frac{36}{2.4}$

$9.5 = 9.0.9.2$   
 $\frac{36}{3} = \frac{24}{3}$

$x^2 + y^2 = 12x + 32$   
 $x^2 + y^2 = 8$

$2.12$

$ax + 2y - 3b = 0$   
 $y = \frac{3b - ax}{2}$   
 $15b -$