



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11



1. [4 балла] Решите неравенство

$$|x^3 + 4| + |x^2 - 1| \leq |x^3 - x^2 + 5|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?
3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2(y - 2) - x(13y - 27) + 44y - 94 = 0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω . Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC . Прямые ED и CF пересекаются в точке G , принадлежащей Ω . Найдите углы треугольника ABC , если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF .
5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a , b и c не все равны между собой, и при этом

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc .

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω , а на дуге AC , не содержащей точку B , взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F . На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 1-я стр

$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5| = |(x^3+4) - (x^2-1)|$$

↑полож ↑полож ↑полож - можно возвести в квадрат

$$(x^3+4)^2 + (x^2-1)^2 + 2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq ((x^3+4) - (x^2-1))^2 =$$

$$(x^3+4)^2 + (x^2-1)^2 - 2(x^3+4)(x^2-1)$$

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

Рассмотрим случаи, когда $x^3+4 \geq 0$ и $x^2-1 \geq 0$ и нео-

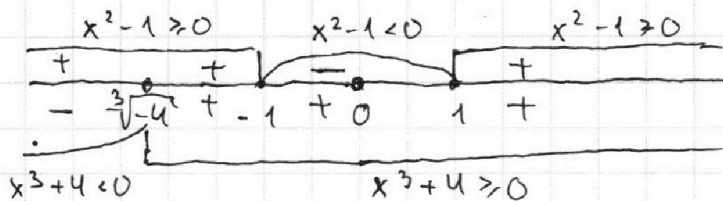
борот.

$$x^3+4 \geq 0 \quad x^3 \geq -4 \quad \Rightarrow \quad x \geq \sqrt[3]{-4}$$

$$x^3+4 < 0 \quad x^3 < -4 \quad \Rightarrow \quad x < \sqrt[3]{-4}$$

$$x^2-1 \geq 0 \quad x^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$

$$x^2-1 < 0 \quad x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1; 1)$$



Возьмем отрезок $(-\infty; \sqrt[3]{-4})$. Тогда
 - меньше 0 поэтому берем отр. знак.

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

$$2 \cdot (-(x^3+4)) \cdot (x^2-1) \leq -2(x^3+4)(x^2-1) - \text{верно при любых } x$$

" $-2(x^3+4) \cdot (x^2-1)$ "

равно 0 при $x^2=1$ и $x^3=-4$

Возьмем отрезок $[\sqrt[3]{-4}; -1]$. Тогда
 ← полож. или 0 так и остается

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 2 а стр

$$2(x^3+4)(x^2-1) \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

отриц. произведение если $x^2 \neq 1$ или $x^3 \neq -4$
 $0 \leq -4(x^3+4)(x^2-1)$ не имеет решений, если $x^2 \neq 1$
↑ $x^2=1$ или 0 иначе имеет, или если $x^3 \neq -4$

Возьмем отрезок $(-1; 1)$ - нет точек когда равно 0
полож. отриц.

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

$$2(x^3+4) \cdot (-(x^2-1)) \leq -2(x^3+4)(x^2-1) \text{ - верно при любых } x$$

$$-2(x^3+4) - (x^2-1)$$

Возьмем отрезок $[1; +\infty)$ - равно 0 при $x^2=1$ ($x=1$)
полож. положит. или равно 0

$$2|x^3+4| \cdot |x^2-1| \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

$$2(x^3+4) \cdot (x^2-1) \leq -2(x^3+4)(x^2-1)$$

отриц. произв. если $x^2 \neq 1$
 $0 \leq -4(x^3+4)(x^2-1)$ не имеет решений, если $x^2 \neq 1$,
↑ $x^2=1$ или 0 иначе имеет ($x=1$)

Плюс x принадлежит (включая все верхние решения)

$$x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}) \cup [\sqrt[3]{-4}] \cup [-1] \cup (-1; 1) \cup [1]$$

$$x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [-1; 1]$$

$$\text{Ответ: } x \in [-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [-1; 1]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N2 1-я стр.

Пусть коэф-ты геом. прогр. равен d . Тогда $b = ad$; $c = ad^2$

$$abc = a \cdot ad \cdot ad^2 = a^3 \cdot d^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

Пусть $a = 2^x \cdot 3^y$; $d = 2^m \cdot 3^n$, где x, y, m, n ^{неотриц.} целые ^{числа}

~~am, n, y, m, n~~

$$a^3 \cdot d^3 = (2^x \cdot 3^y)^3 \cdot (2^m \cdot 3^n)^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y} \cdot 2^{3m} \cdot 3^{3n} =$$

$$2^{3(x+m)} \cdot 3^{3(y+n)} = 2^{150} \cdot 3^{300} \Rightarrow 3(x+m) = 150 \Rightarrow x+m = 50$$

$$3(y+n) = 300 \Rightarrow y+n = 100$$

Тогда x может принимать значения целых чисел от 0 до 50 (т.к. m хотя бы 0 и $x+m=50$) и y может

принимать значения целых чисел от 0 до 100

(т.к. n хотя бы 0 и $y+n=100$). Тогда $a = 2^x \cdot 3^y$

может иметь такое кол-во значений:

$$(50 - 0 + 1) \cdot (100 - 0 + 1) = 51 \cdot 101 = 5151$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

МФТИ



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 1-я стр.

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

Пусть $y \neq 2$. Тогда это квадратное уравнение. Найдем дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac = (-13y+27)^2 - 4(y-2)(44y-94) = 169y^2 - 702y + 729 - 176y^2 + 376y + 352y - 752 = -7y^2 + 26y - 23$$

П.к. мы ищем решение этого уравнения, то пусть

$D \geq 0$ и равен d .

$$-7y^2 + 26y - 23 = d \Rightarrow -7y^2 + 26y - 23 - d = 0$$

Давайте ограничения d :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{13y-27 \pm \sqrt{d}}{2(y-2)}, \text{ т.к. } y \text{ целое и } x \text{ тоже,}$$

то d должен быть квадратом, иначе x будет нецелым.

$$-7y^2 + 26y - (23+d) = 0$$

$$D_y = 26^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-(23+d)) = 26^2 - 28 \cdot 23 - 28d = 676 - 644 - 28d = 32 - 28d.$$

П.к. d натуральный, то $d=0$ или $d=1$

иначе $D_y < 0$ и y будет не иметь решений. При этом

D_y должен быть полным квадратом, ведь иначе y будет нецелым. Тогда $d=1$ и $D_y=4$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3 2-е стр.

$$\text{Тогда } y = \frac{-26 \pm \sqrt{Dy}}{-14} = \frac{-26 \pm \sqrt{4}}{-14} = \frac{-26 \pm 2}{-14}$$

$$\text{При } +2 \text{ } y \text{ будет нецелым. При } -2: y = \frac{-26-2}{-14} = 2,$$

но по нашему предположению $y \neq 2$, противоречие.

$$\text{Тогда } y = 2:$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$0 - x(26-27) + 88 - 94 = 0$$

$$x = 6$$

$$\text{Ответ: } x = 6$$

$$y = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 стр 2

Пусть $DF=x$, тогда $BF=4x$

Пусть $GD=y$, тогда $BC=4y$

По т. Пифагора $GF = \sqrt{DF^2 + GD^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

По т. Пифагора $FC = \sqrt{BF^2 + BC^2} = \sqrt{16x^2 + 16y^2} = 4\sqrt{x^2 + y^2}$

~~так $AB = DB =$~~

$$AD = DB = DF + BF = 5x$$

$$AF = AD + DF = 6x$$

$\angle AGF = \angle FBC = 90^\circ$ (впис. угол. двой.) } $\triangle AGF \sim \triangle FBC \Rightarrow$
 $\angle GFA = \angle BFC$ (верт. углы)

$$\Rightarrow \frac{GF}{BF} = \frac{AF}{FC} = \frac{AG}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{4x} = \frac{6x}{4\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{AG}{BC} \Rightarrow$$

$$4 \cdot (x^2 + y^2) = 24x^2$$

$$20x^2 = 4y^2 \Rightarrow y^2 = 5x^2 \Rightarrow y = \sqrt{5}x$$

$$BC = 4y = 4\sqrt{5}x ; AB = AF + FB = 10x$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{4\sqrt{5}x}{10x} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \angle BCA = \frac{AB}{BC} = \frac{10x}{4\sqrt{5}x} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \angle BCA = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$; $\angle BAC = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\angle BCA = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

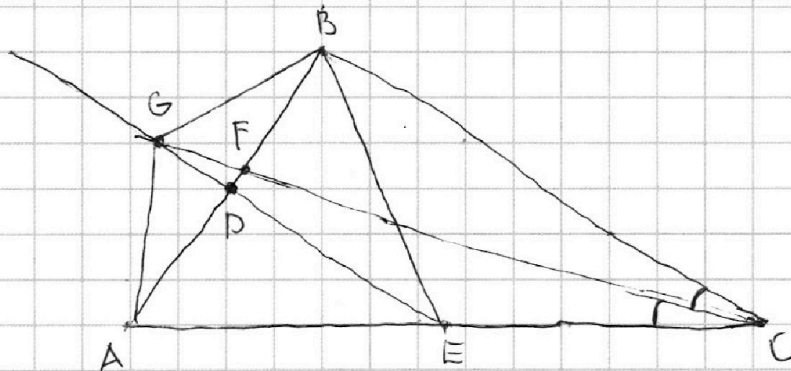
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4 стр 1



Дано: $\angle ACF = \angle BCF$; $AE = EC$; ~~AB~~ $AD = DB$; $AGBC$ - вписанный четырехугольник.

$$S_{BCF} = 16 \cdot S_{DGF}$$

- 1) $\angle GBA = \angle ACF$ (вписан. четырехугольник свой.)
2) $\angle GAB = \angle BCF$ (вписан. четырехугольник свой.)
- } $\triangle AGB$ - р/б (углы при основании AB равны)

Т.к. $\triangle AGB$ - р/б и $AD = DB$, то GD - высота, медиана, биссектриса

$$\Rightarrow \angle GDF = 90^\circ$$

$\triangle AEB$ - р/б, т.к. $AD = DB$; $\angle ADE = \angle GDF = 90^\circ$ (верт.), то есть

DE - высота и медиана, тогда по признаку р/б треугольник $\triangle AEB$ - р/б.

$$\Rightarrow AE = EB = EC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ \text{ по обратной теореме медиан}$$

или в прямоугольном треугольнике.

$$\angle GFD = \angle BFC \text{ (верт.)}; \angle GDF = \angle FBC = 90^\circ \Rightarrow \triangle DGF \sim \triangle BCF \text{ по трем углам}$$

Т.к. $S_{BCF} = 16 \cdot S_{DGF}$, то коэффициент подобия треугольников равен $\sqrt{16} = 4$,

т.к. площади подобных треугольников имеют отношение k^2 , где k -

коэффициент подобия

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 5 2-я стр.

Исходя из 1, 2, 3, 4 $\triangle AOA' = \triangle BOB' = \triangle COC' = \triangle DOD'$ (по ш-
потенкузе и углу). Тогда:

$$AA' = BB' = CC' = DD' \Rightarrow -x_1 = x_3 = -y_4 = y_2 \quad (1)$$

$$A'O = B'O = C'O = D'O \Rightarrow y_1 = x_2 = -y_3 = -x_4 \quad (2)$$

Найдем коэф. прямой AD. Пусть она $y = kx + c$

$$y_1 = kx_1 + c \quad \text{при этом} \quad y_1 = 3x_1$$

$$y_4 = kx_4 + c \quad \text{подставим} \quad x_4 = k_1 \quad \text{при этом} \quad y_4 = \frac{x_4}{3}$$

$$(y_4 - y_1) = k(x_4 - x_1)$$

$$\left(\frac{x_4}{3} - 3x_1\right) = k(x_4 - x_1) \Rightarrow k = \frac{x_4 - 9x_1}{3(x_4 - x_1)} \quad \text{подставим} \quad (2)$$

$$k = \frac{-y_1 - 9x_1}{3(y_1 - x_1)} = \frac{-3x_1 - 9x_1}{3(-3x_1 - x_1)} = \frac{-6x_1}{-12x_1} = 0,5$$

$$y_1 = kx_1 + c = 0,5x_1 + c \quad \text{при этом} \quad y_1 = 3x_1 \Rightarrow c = 2,5x_1$$

$$y_4 = kx_4 + c = 0,5x_4 + c \quad \text{при этом} \quad y_4 = \frac{x_4}{3} \Rightarrow c = -\frac{x_4}{6}$$

$$2,5x_1 = -\frac{x_4}{6} \Rightarrow 15x_1 = -x_4$$

Тогда: $-x_4 = y_1 = 3x_1 \Rightarrow x_4 = 3x_1$. П.к. вершины квадра-
та лежат на графике фун. $y = x^5 + ax$, то:

$$y_1 = x_1^5 + ax_1 = -3x_1 \Rightarrow x_1^5 = x_1(-3 - a)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

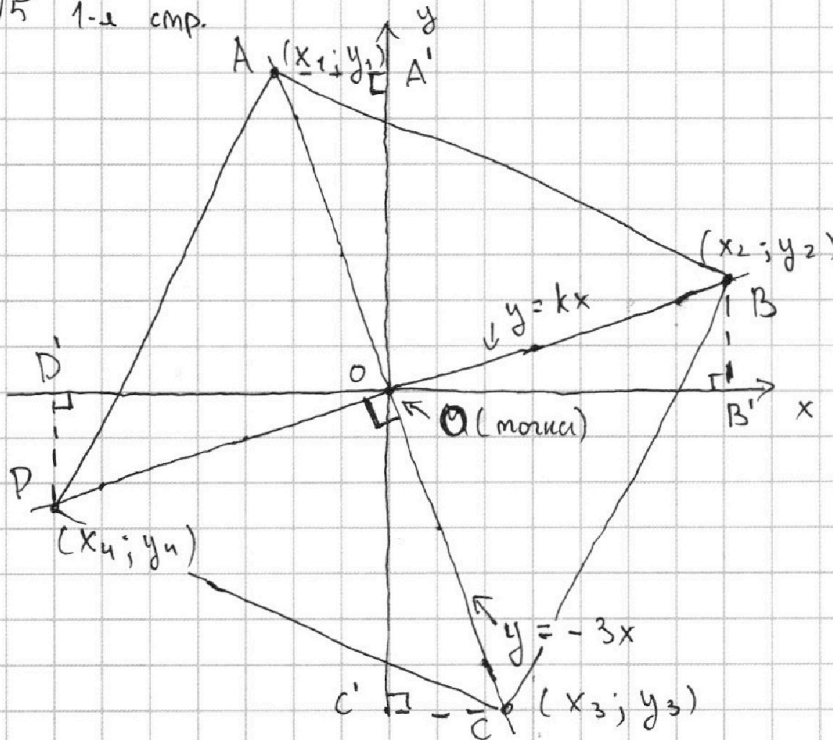
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5 1-я стр.



Пусть $(x_i; y_i), \dots, (x_n; y_n)$ — это вершины квадрата

Найдем уравнение второй прямой, на которой лежит вторая диагональ. Т.к. диагонали квадрата перпендикулярны, то

$-3 \cdot k = -1$ (свой. перпендикулярности двух прямых) \Rightarrow

$\Rightarrow k = \frac{1}{3}$. Тогда $y_1 = -3x_1$; $y_2 = \frac{x_2}{3}$; $y_3 = -3x_3$; $y_4 = \frac{x_4}{3}$

Т.к. диагонали в точке пересечения делятся пополам, то:

1) ~~AB~~ \Rightarrow ~~AM = MC~~ \Rightarrow ~~BM = MD~~. $AO = CO = BO = DO$

2) $\angle AOA' = \angle COC'$ (верт. углы); $\angle BOB' = \angle DOD'$ (верт. углы)

3) $\angle AA'O = \angle BB'O = \angle CC'O = \angle DD'O = 90^\circ$

4) $\angle AOA' = \angle DOD'$ (т.к. $\angle A'OD' = 90^\circ$, $\angle AOD = 90^\circ$, поворот на угол $\angle AOA'$)
аналогично с другими

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N5 3-я стр.

$$y_1 = x_4^5 + ax_1 = (3x_1)^5 + 3ax_1. \text{ подставим } \textcircled{1}$$

$$x_1 = y_1 = (3x_1)^5 + 3ax_1 \Rightarrow 3^5 \cdot x_1^5 = x_1(1 - 3a)$$

$$x_1^5 = x_1(-3 - a) \quad /x \quad 3^5 \quad 3^5 \cdot x_1^5 = x_1(-3 - a) \cdot 3^5 \quad \leftarrow \text{отделим}$$

$$0 = x_1(1 - 3a) - x_1(-3 - a) \cdot 3^5$$

$$0 = x_1(1 - 3a + 3^6 + 3^5 a), \text{ т.к. } x_1 \neq 0, \text{ то:}$$

$$1 - 3a + 3^6 + 3^5 a = 0$$

$$1 - 3a + 729 + 243a = 0$$

$$240a = -730 \Rightarrow a = \frac{-730}{240} = -\frac{73}{24}$$

$$\text{Тогда } y_1 = x_1^5 - \frac{73}{24}x_1 = -3x_1$$

$$x_1^5 = x_1 \left(-3 + \frac{73}{24}\right) = x_1 \cdot \frac{1}{24} \quad /x_1, \text{ т.к. } x_1 \neq 0$$

$$x_1^4 = \frac{1}{24} \Rightarrow x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}} \Rightarrow y_1 = -3x_1 = -3 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

$$x_4 = 3x_1 = 3 \sqrt[4]{\frac{1}{24}} \Rightarrow y_4 = \frac{x_4}{3} = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

Тогда сторона квадрата:

$$\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2} = \sqrt{\left(\sqrt[4]{\frac{1}{24}} - 3\sqrt[4]{\frac{1}{24}}\right)^2 + \left(-3 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{24}} - \sqrt[4]{\frac{1}{24}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 \sqrt{\frac{1}{24}} + 16 \sqrt{\frac{1}{24}}} = 2\sqrt{5} \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N6 1a сmp

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$$

$$a = b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b} = \frac{b^2c + 5b - 5c}{bc}$$

$$\frac{5}{a} = b + \frac{5}{c} - c = \frac{bc + 5 - c^2}{c}$$

$$a = \frac{bc + 5 - c^2}{5c}$$

$$\frac{b^2c + 5b - 5c}{bc} = \frac{bc + 5 - c^2}{5c}$$

$$\frac{5b^2c + 25b - 25c}{5bc} = \frac{b^2c + 5b - 5c^2}{5bc}, \text{ т.к. } b, c \neq 0$$

$$5b^2c + 25b - 25c = b^2c + 5b - 5c^2$$

$$4b^2c + 20b + 5c^2 - 25c = 0 \quad c(4b^2 + 5c) + 4(5b) - 5(4b - 5c) = 0$$

$$4b(bc + 5) + 5c(c - 5) = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$a \quad b=ad \quad c=ad^2$$

$$abc = a^3 d^3 = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

3

9

27

81

243

729

$$a = 2^x \cdot 3^y$$

$$d = 2^m \cdot 3^n$$

$$a^3 = (2^x \cdot 3^y)^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y}$$

$$d^3 = 2^{3m} \cdot 3^{3n}$$

$$a^3 d^3 = 2^{3x} \cdot 3^{3y} \cdot 2^{3m} \cdot 3^{3n} = 2^{3x+3m} \cdot 3^{3y+3n} = 2^{150} \cdot 3^{300}$$

$$a = 2^x \cdot 3^y$$

$$ad = 2^{x+m} \cdot 3^{y+n}$$

$$ad^2 = 2^{x+2m} \cdot 3^{y+2n}$$

$$2^0 \cdot 3^0 = 1$$

$$d = 2^{50} \cdot 3^{100}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 51 \\ \hline 5151 \end{array}$$

$$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$$

$$D = 0$$

$$(13y-27)^2 - 4(y-2)(44y-94)$$

$$169y^2 - 702y + 729 - 176y^2 + 376y$$

$$+ 352y - 752$$

$$-7y^2 + 26y - 23 \geq 0$$

$$x = \frac{27-13y \pm \sqrt{D}}{2y-4}$$

$$\begin{array}{r} 752 \\ - 729 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 176 \\ - 169 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 94 \\ \hline 282 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 94 \\ \hline 352 \end{array}$$

$$(4y-8)(44y-94)$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 44 \\ \hline 176 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 94 \\ \hline 376 \end{array}$$

$$3x + 3m = 150$$

$$3y + 3n = 300$$

$$x + m = 50$$

$$x = 0 \text{ or } 50$$

$$y + n = 100$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 27 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 27 \\ \hline 108 \\ 180 \\ \hline 376 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3-x^2+5| \quad \uparrow^2$$

$$\text{При } x^2-1 \geq 0 \quad x^2 \geq 1 \quad x \in (-\infty; -1] \cup [1; \infty)$$

$$|x^2-1| \leq |x^3-x^2+5| - |x^3+4|$$

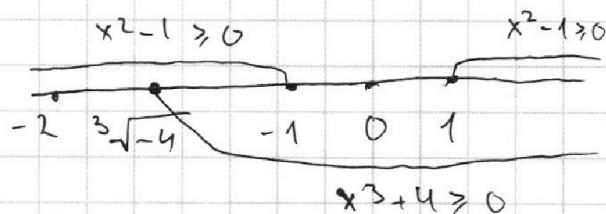
$$x^3-x^2+5 - x^3-4$$

$$x^2-1 \leq -x^2+1$$

$$x^3+4 \geq 0$$

$$x^3 \geq -4$$

$$x \in \left[\sqrt[3]{-4}; +\infty \right)$$



$$x^3-x^2+5 \geq 0 \quad x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4})$$

$$|x^3+4| + |x^2-1|$$

$$-x^3-4 + x^2-1$$

$$-3m = m^5 + am$$

$$m^5 + m(a+3) = 0$$

$$3m = -m^5 - am$$

$$-x^3-x^2-5 \leq |x^3-x^2+5|$$

$$|(x^2-1) + x^3+4|$$

$$(x^3+4)^2 + (x^2-1)^2 + 2 \cdot |x^3-4| |x^2-1| \leq -(4-1) + 8+4$$

$$\frac{((x^3+4)-(x^2-1))^2}{x}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$-7y^2 + 26y - 23 = 0$$

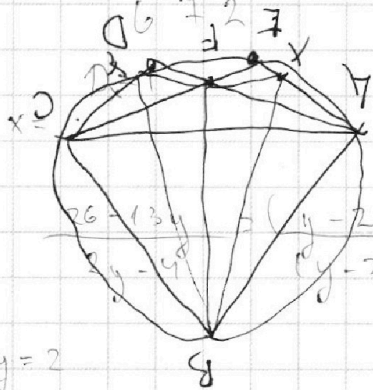
$$-7y^2 + 26y - 23 = 1 \quad D = 4$$

$$D = 26^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 676 - 644 = 32$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 23 \\ \hline 84 \\ 56 \\ \hline 644 \\ - 28 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \\ - 644 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$y = \frac{-26 \pm \sqrt{32}}{-14} = 2$$



при $y \neq 2$

↑ ускорен.

$$\begin{array}{r} 9 \\ 27 \\ \hline 81 \\ \times 3 \\ \hline 243 \end{array}$$

$$y = 2$$

$$-x(13 \cdot 2 - 27)$$

$$y = x^5 + ax$$

$$y_1 = x_1^5 + ax_1$$

$$x + 82 - 94 = 0$$

$$-3x_1 = x_1^5 + ax_1$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \sqrt{243} \\ 3 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 2 \end{array}$$

$$y_1 = x_1^5 + ax_1$$

$$x_1 = 3^5 \cdot x_1^5 + 3ax_1$$

$$3x_1 = y_1 = x_1^5 + \frac{73}{24} x_1$$

$$x_1(-3-a) = x_1^5 \quad x_1^5$$

$$x_1^5 = -3x_1 + \frac{73}{24} x_1$$

$$x_1(-1-3a) = 3^5 \cdot x_1^5$$

$$x_1^5 = \frac{1}{24} x_1$$

$$x_1(1-3a) - 243x_1(-3a) = 0$$

$$x_1^4 = \frac{1}{24}$$

$$x_1(1-3a-243(-3a)) = 0$$

т.к. $x_1 \neq 0$

$$x_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{24}}$$

$$1 - 3a + 729 + 243a = 0$$

$$730 = -240a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a} \quad b = a + \frac{5}{b}$$

$$abc = a \left(a + \frac{5}{b} \right) \left(a + \frac{5}{b} - \frac{5}{a} \right)$$

$$\frac{ab+5}{b} = \frac{bc+5}{c} = \frac{ac+5}{a}$$

$$a^3 + \quad a = b + \frac{5}{c} - \frac{5}{b}$$

$$\frac{ab+5}{b} = \frac{bc+5}{c}$$

$$\frac{5}{a} = \frac{b+5}{c} - c$$

$$abc + 5c = b^2c + 5b$$

$$\frac{5}{a} = \frac{bc+5-c^2}{c}$$

$$abc = b^2c + 5b - 5c = b(bc+5) - 5c$$

$$-a - \frac{5}{b}$$

$$a \geq b \geq c$$

$$a = \frac{bc+5-c^2}{5c}$$

$$a \geq c \geq b$$

$$\frac{b^2c+5b-5c}{bc}$$

$$\frac{b^2c+5b-c^2}{5bc} =$$