МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 11

1. [4 балла] Решите неравенство

$$\left|x^{3}+4\right|+\left|x^{2}-1\right| \leqslant\left|x^{3}-x^{2}+5\right|.$$

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a; b; c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150} \cdot 3^{300}$?

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^{2}(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0.$$

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y=x^{5}+ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y=-3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом

$$a+\frac{5}{b}=b+\frac{5}{c}=c+\frac{5}{a}.$$

Найдите минимально возможное значение произведения abc.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC $(AB=BC)$ вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX=CF$ и $CY=AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF=17$, $XY=31$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$|x^3+4| + |x^2-1| \le |x^3-x^2+5|$

$a = x^3+4$
$b = x^2-1$ $\Rightarrow$ $|a| + |b| \le |a-b|$

Для действительных чисел a, b справедливо $\pm a \pm b \le |a| + |b|$

в частности $|a|+|b| \geq a-b$, $b-a$ т.е. $|a|+|b| \geq |a-b|$

тогда $|a-b| \le |a|+|b| \le |a-b| \Rightarrow |a|+|b| = |a-b|$

Числа a и $-b$ не должны быть парой полож. и отриц. чисел. Т.к. в противном случае $|a-b| < |a|+|b|$.
Это условие необходимо и достаточно.
Тогда у нас 2 варианта.

I. $\begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ x^2-1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ x \in [-1;1] \end{cases}$ все $x \in [-1;1]$ подходят под $x^3+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1;1]$

II $\begin{cases} x^3+4 \le 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \le -4 \\ x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \sqrt[3]{-4} \\ x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}]$

Ответ: $x \in (-\infty; \sqrt[3]{-4}] \cup [-1;1]$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Пусть q - ~~разно~~ знаменатель прогрессии.

$b = aq \quad c = aq^2 \quad ac = a^2q^2 = b^2 \Rightarrow abc = b^3 = 2^{150}\cdot 3^{300}$

$b = 2^{50}\cdot 3^{100} \quad b^2 = 2^{100}\cdot 3^{200} \quad ac = 2^{100}\cdot 3^{200} \quad a, c \in \mathbb{N}$

поэтому $a = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$ (других множителей нет), $\Rightarrow$

$c = 2^{100-\alpha}\cdot 3^{200-\beta} \quad \alpha \in \{0, 1, 2 \dots 100\}. \ \beta \in \{0, 1, 2 \dots 200\}$

И при любом выборе α и β числа a, b, c будут обр. геом. прогрессию т.к. $q = \frac{b}{a} = \frac{2^{50}\cdot 3^{100}}{2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}} = 2^{50-\alpha}\cdot 3^{100-\beta}$

и $q = \frac{c}{b} = \frac{2^{100-\alpha}\cdot 3^{200-\beta}}{2^{50}\cdot 3^{100}} = 2^{50-\alpha}\cdot 3^{100-\beta}$. ~~И очевидно при~~ $\cancel{(\alpha_1, \beta_1) \neq (\alpha_2, \beta_2)} \quad \cancel{2^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1} \neq 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}}$ ~~, поэтому все 3-ки различны~~

Заметим, что если вместо α взять $100-\alpha$, а вместо β взять $200-\beta$, то тройки чисел получатся одинаковыми.

Поэтому если мы рассмотрим все $101 \cdot 201$ тройки для всех этих 3-ек a, b, c (кроме $a = b = c = 2^{50}\cdot 3^{100}$) найдется 3-ка c, b, a.

Тогда кол-во различных 3-к: $\frac{101\cdot 201 - 1}{2} =$

$= 10150$

Ответ: 10150

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0$

$x^2(y-2)-x((y-2)13-1)+(y-2)44-6=0 \qquad y-2=a \in \mathbb{Z}$

$ax^2-(13a-1)x+44a-6=0$

$D=169a^2-26a+1-4a(44a-6)=-7a^2-2a+1 \qquad D\geq 0$

$7a^2+2a-1\leq 0 \qquad a=\frac{-2\pm\sqrt{32}}{14} \qquad a\in\left[\frac{-2-\sqrt{32}}{14};\frac{-2+\sqrt{32}}{14}\right]$

$\frac{-2-\sqrt{32}}{14}>\frac{-2-\sqrt{36}}{14}=\frac{-8}{14}=\frac{-4}{7}$

$\frac{-2+\sqrt{32}}{14}<\frac{-2+\sqrt{36}}{14}=\frac{4}{7}$ Тогда $\frac{-4}{7}<a<\frac{4}{7}$ и a - целое

$\Rightarrow a=0 \qquad y=2 \Rightarrow x^2(2-2)-x(26-27)+88-94=0$

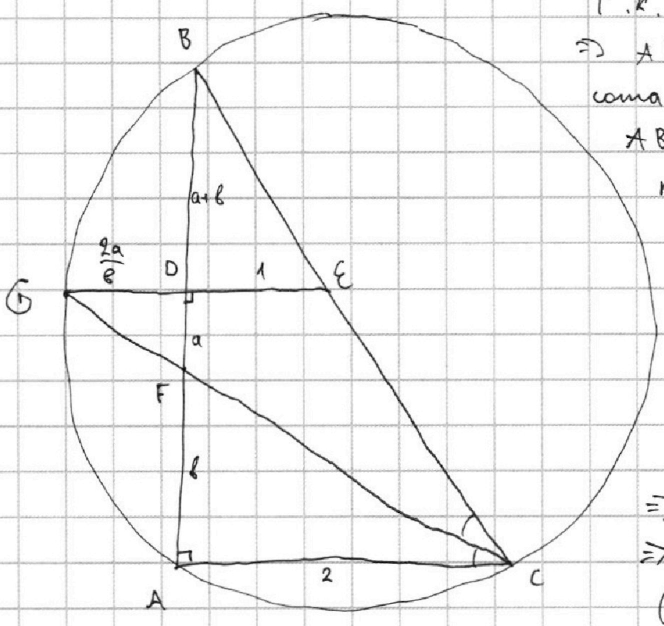
$x-6=0 \qquad \Rightarrow x=6$

Ответ: $x=6$; $y=2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
			x			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. CG - бис-са $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{GB}$
$\Rightarrow AG = GB$, GD - медиана значит и высота $GE \perp AB$, но $GE \parallel AC$ (ср. линия) $AB \perp AC$. Сожмём либо растянем конструкцию так, что $AC = 2$. $DE = 1$.

Пусть $AF = b$; $DF = a$; $DB = a+b$

$\triangle GDF \sim \triangle AFC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{GD}{2}$ $\quad GD = \frac{2a}{b}$

$$S_{FBC} = 16 S_{DGF} = 2a+b = 16\frac{a^2}{b}$$

$$\Rightarrow 2ab + b^2 = 16a^2$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 17a^2$$

$$(a+b)^2 = (\sqrt{17}a)^2$$

$$a+b = \sqrt{17}a \qquad b = \sqrt{17}a - a$$

E - центр диаметра BC - центр окр.

$$EC = EG = \frac{2a+b}{b} \qquad BC = \frac{4a+2b}{b} \qquad BE = \frac{2a+b}{b}$$

По т. Пиф для $\triangle DBE$ $\quad (a+b)^2 + 1 = \left(\frac{2a+b}{b}\right)^2$

$$17a^2 + 1 = \left(\frac{\sqrt{17}a + a}{\sqrt{17}a - a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1}\right)^2$$

$$17a^2 = \left(\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1} - 1\right)\left(\frac{\sqrt{17}+1}{\sqrt{17}-1} + 1\right) = \frac{2}{\sqrt{17}-1} \quad \frac{2\sqrt{17}}{(\sqrt{17}-1)^2}$$

$$a^2 = \frac{4\sqrt{17}}{(\sqrt{17}-1)^2\, 17\sqrt{17}} \Rightarrow a = \frac{2}{(\sqrt{17}-1)\sqrt[4]{17}} \qquad b = a(\sqrt{17}-1) = \frac{2}{\sqrt[4]{17}}$$

$$a+b = \frac{2\sqrt{17}}{(\sqrt{17}-1)\sqrt[4]{17}} \qquad 2a+2b = AB = \frac{4\sqrt{17}}{(\sqrt{17}-1)\sqrt[4]{17}}$$

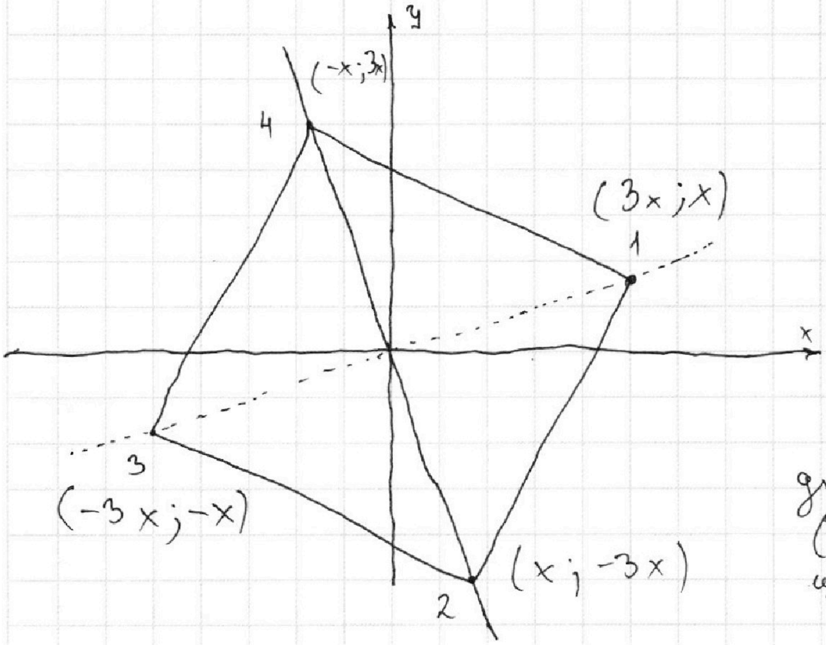
Ответ: $\angle A = 90^\circ$; $\angle C = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{17}}{(\sqrt{17}-1)\sqrt[4]{17}}$; $\angle B = \operatorname{arcctg}\frac{2\sqrt{17}}{(\sqrt{17}-1)\sqrt[4]{17}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Проведём прямую $y = \frac{x}{3}$

Она $\perp$ $y = -3x$
потому что можно
представить что
мы повернули OY и OX
на $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ градус.

Тогда 2-ая
диагональ лежит на ней
(все т. на один. расст от
центра, т.к. центр квадрата)

Пронумеруем вершины. Пусть у 1 координаты $(3x; x)$ $(x>0)$.
Тогда у 2 $(x; -3x)$. у 3 $(-3x; -x)$. у 4 $(-x; 3x)$

По усл. они все лежат на $y = x^5 + ax$. Тогда:

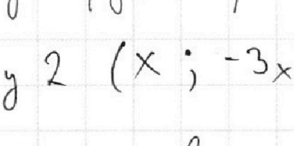
1) $x = 243x^5 + 3ax$ $\qquad 1 = 243x^4 + 3a$

2) $-3x = x^5 + ax$ $\qquad -3 = x^4 + a$ $\qquad x^4 = -3 - a$

$0 = -1 + 243(-3-a) + 3a = -730 - 240a$ $\qquad 73 + 24a = 0$

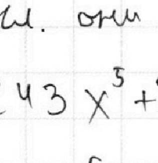
$a = \frac{-73}{24} = -3 - \frac{1}{24}$ $\qquad x^4 = -3 + 3 + \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$

т.к. $x > 0$ $\quad x = \frac{1}{\sqrt{24}}$



$d = \sqrt{\frac{9}{24} + \frac{1}{24}} = \sqrt{\frac{10}{24}} = \sqrt{\frac{5}{12}}$

$S = \sqrt{\frac{5}{12} + \frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$



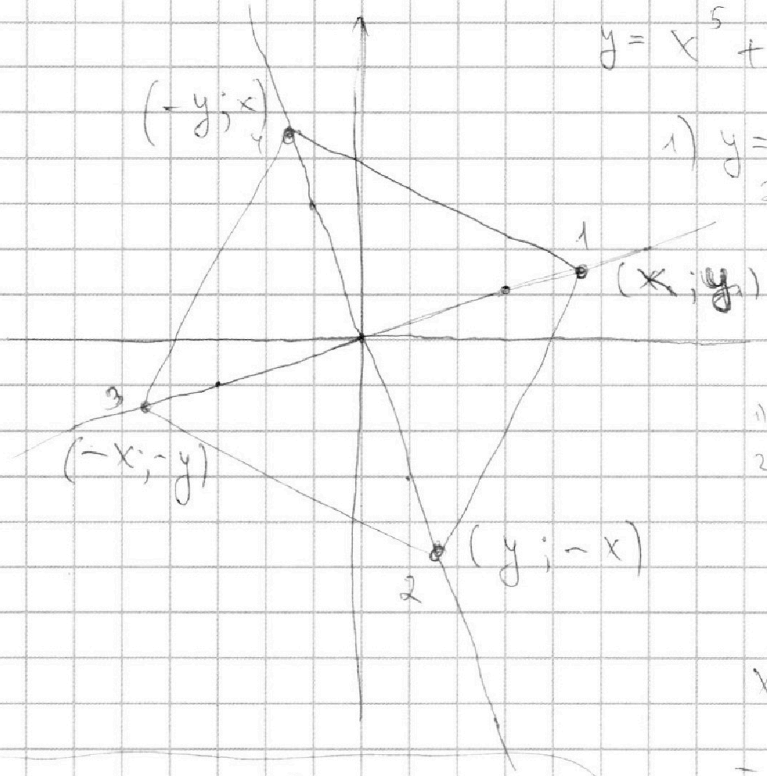
Ответ: $a = \frac{-73}{24}$; сторона $= \sqrt{\frac{5}{6}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$y = x^5 + ax \qquad y = 3x$

1) $y = x^5 + ax$

2) $-x = y^5 + ay$

3) $-y = -x^5 - ax$

4) $x = -y^5 - ay$

1) $3x = x^5 + ax$

2) $-3x = 3^5x^5 + a3x$

$3 = x^4 + a$

$-1 = 3^5x^4 + 3a$

$3^5 = 243$

$x^4 = 3 - a$

$243 \cdot 3 = 729$

$-1 = 243(3-a) + 3a$

$0 = 1 + 729 - 243a + 3a$

$0 = 730 - 240a$

$0 = 73 - 24a$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$

$abc - ?$

a, b, c – разл.

a – max

$a = b$

$a + \frac{5}{a} = a + \frac{5}{c}$

$a + \frac{5}{b} = S$

$a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c}$

$abc = \left(S - \frac{5}{b}\right)\left(S - \frac{5}{c}\right)\left(S - \frac{5}{a}\right)$

$= S^3 - \frac{S^2 5}{a} + \frac{S25}{ab} - \frac{5^3}{abc}$

$\times 3 \qquad \times 3$

$a - b > 0 \quad \frac{5}{c} - \frac{5}{b} > 0$

$\frac{5}{c} > \frac{5}{b}$

$101 \cdot 201$: 101, 202, 20301

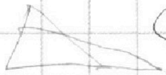
$20300 : 2 = 10150$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

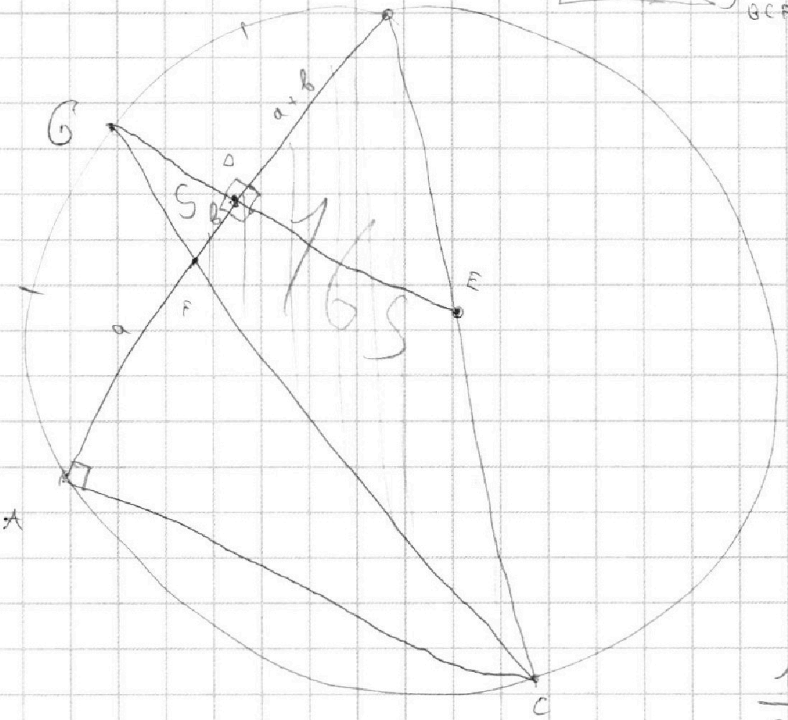
1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

DE - ср. линия



$S_{BCF} = 16\, S_{DGF}$



$\frac{16S}{2b+a} = \frac{S_{AFC}}{a}$

$\frac{S}{S_{AFC}} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$

$S_{AFC} = \frac{16S \cdot a}{2b+a}$

$\frac{b^2}{a^2} S$

$\frac{16a}{2b+a} = \frac{b^2}{a^2}$

$16a^3 = (2b+a)b^2$

$16\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{2b+a}{a}$

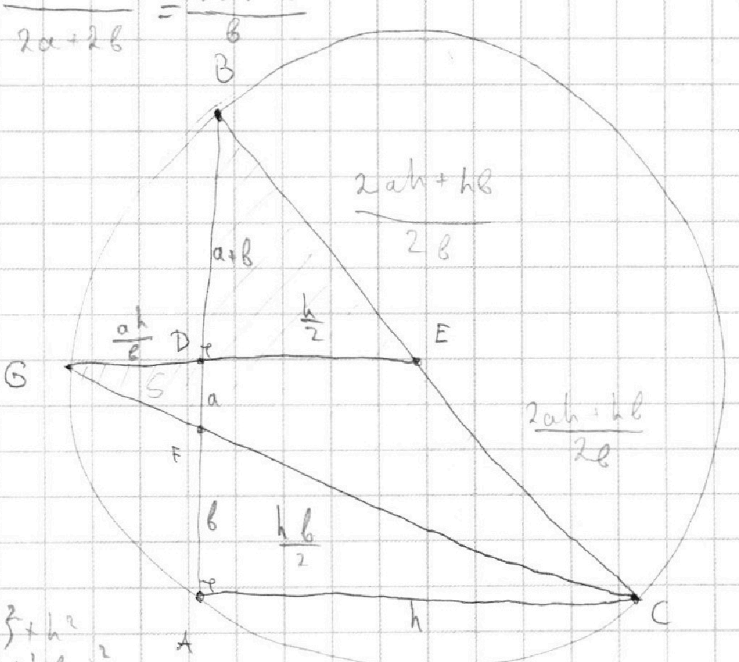
$\frac{\sin a}{a} = 2r$

$\frac{\sin C}{2a+2b} = \frac{2ah+hb}{b}$

$\frac{2ah+hb}{2b}$

$\frac{a}{} = \frac{b}{h}$

$\frac{}{a} = \frac{h}{b}$



$(2a+b)h = 16 \cdot \frac{a^2 h}{b}$

$2a+b = 16 \cdot \frac{a^2}{b}$

$2ab + b^2 = 16a^2$

$\frac{\cancel{S}\ \frac{a^2h}{2b}}{\frac{hb}{2}} = \frac{a^2}{b^2}$

$(a+b)^2 + h^2 = \left(\frac{2ah+hb}{b}\right)^2$

$\frac{a^2 h b^2}{2b} = \frac{a^2 h b}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$x, y \in \mathbb{Z}$

$(13y-27)\cdot 4 + 2y + 14$ $\quad -108$

$x^2(y-2) - x(13y-27) + 44y - 94 = 0$ $\qquad 44y - 94 \vdots x$

$y(x^2 - 13x + 44) - 2x^2 + 27x + \cancel{44y} - 94 = 0$

$y(x^2 - 13x + 44) = 2x^2 - 27x + 94$

$2x^2 - 26x + 88 = 2x^2 - 27x + 94$ $\qquad 19^2 - 19(12) +$

$88 = 94 - x$ $\qquad x = 6 \quad y = 2$

$y - 2 = a$

$x^2(y-2) - x(13(y-2) - 1) + 44(y-2) - 6$ $\qquad a = 1 \quad x = 19$

$ax^2 - x(13a - 1) + 44a - 6 = 0$ $\qquad 44a - 6 \vdots x$; $\; 6 - x \vdots a$

$ax^2 - 13ax + x + 44a - 6 = 0$ $\qquad 2(22a - 3) \vdots x$

$6 - x \vdots a$

$a(x^2 - 13x + 44) = 6 - x$ $\qquad 6 - x = ka \quad a = \frac{6-x}{k}$

$x = 6 - ka$

$X = \dfrac{13a - 1 \pm \sqrt{169a^2 - 26a + 1 - 4a(44a - 6)}}{2a}$ $\qquad 160 + 16 = 176$

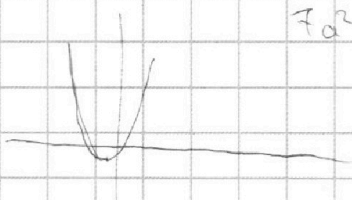
$169a^2 - 176a^2 - 26a + 24a + 1$

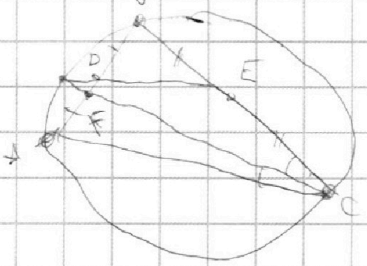
$-7a^2 - 2a + 1$

$x = \dfrac{13a - 1 \pm \sqrt{}}{}$ $\qquad -(7a^2 + 2a - 1)$

$7a^2 + 2a - 1 \leq 0$

$\frac{-b}{2a}$ $\qquad -1 \qquad \frac{-2}{14}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$a \quad aq \quad aq^2$

$a^3q^3 = 2^{150}\cdot 3^{300}$

$b^3 = 2^{150}\cdot 3^{300}$

$b = 2^{50}\cdot 3^{100}$

$a \quad 2^{50}\cdot 3^{100} \quad c$

$ac = 2^{100}\cdot 3^{200}$

$a = 2^{\alpha}\cdot 3^{\beta} \qquad c = 2^{100-\alpha}\cdot 3^{200-\beta}$

$\alpha = 0, \dots 100 \qquad 101 \cdot 201$ сп.

$\beta = 0, 200$

$2^{\alpha}\, 3^{\beta} \quad 2^{50}\, 3^{100} \quad 2^{100-\alpha}\, 3^{200-\beta}$

$\frac{2^{50}\, 3^{100}}{2^{\alpha}\, 3^{\beta}} = 2^{50-\alpha}\cdot 3^{100-\beta}$

$\frac{2^{100-\alpha}}{2^{50}}$

$16\cdot 1.5 = 24$

$24\cdot 1.5 = 24 + 12 = 36$

$16 \quad 24 \quad 36$

$1 \quad 2^{50}\, 3^{100} \quad 2^{100}\cdot 3^{200}$

$|x^3+4| + |x^2-1| \leq |x^3 - x^2 + 3|$

$|a| + |b| \leq |a-b|$

$\frac{a-b}{|a+b|} \leq$

$-1 \quad 3$

$a \leq 0 \quad b \leq 0$

$a \geq 0$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$|a| + |b| = |a-b|$

$\boxed{a \leq 0 \quad b \geq 0}$

$-a-b, +a+b \leq |a| + |b|$

$b-a, a-b \leq |a| + |b|$

$|a-b| \leq |a| + |b| \leq |a-b|$

$\mathrm{I} \begin{cases} x^3+4 \geq 0 \\ x^2-1 \leq 0 \end{cases}$

$\mathrm{II} \begin{cases} x^3+4 \leq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$

$\mathrm{I} \cup \mathrm{II}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

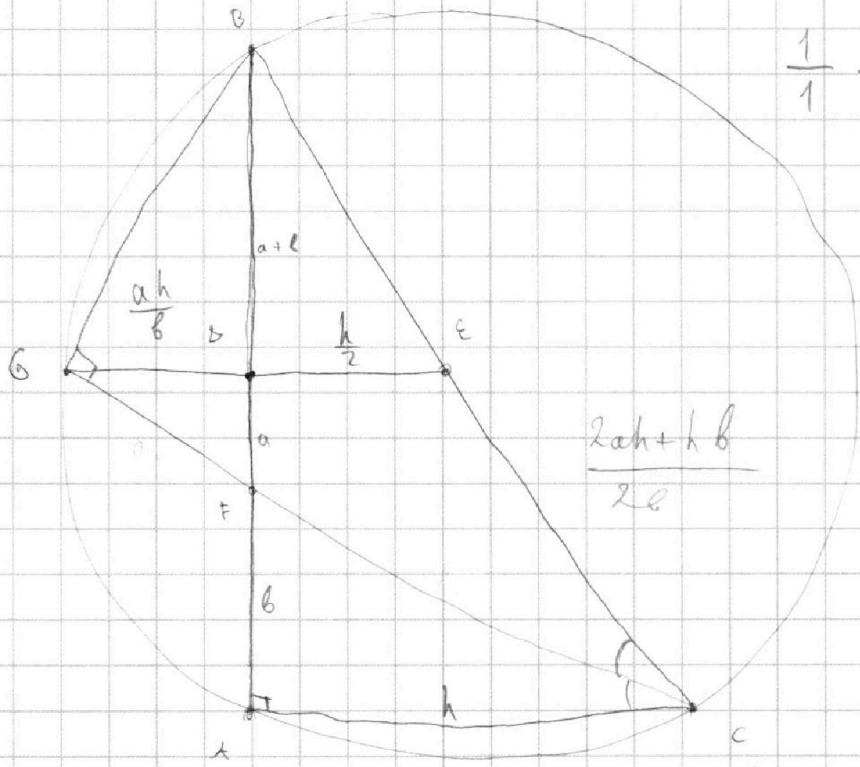
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{CFB} = 16 S_{DGF}$$

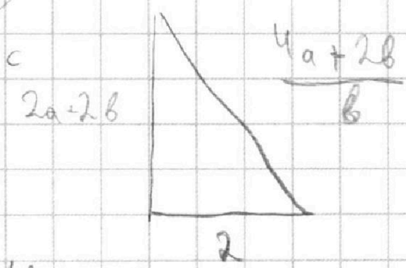
$$\frac{1}{1}\cdot\frac{a+b}{a}\cdot\frac{GF}{GF+FC} = 1$$

$$(a+b)\,GF = a\,GF + a\,FC$$

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{\frac{a}{b}}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$



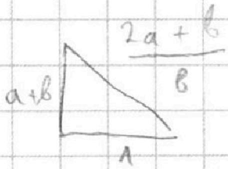
$$\frac{2ah+hb}{2b}$$



$$(2a+b)h = 16\frac{a^2h}{b}$$

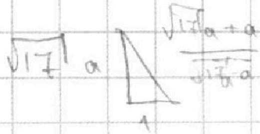
$$2a+b = \frac{16a^2}{b} \qquad a^2+2ab+b^2 = 16a^2+a^2$$

$$(a+b)^2 = (\sqrt{17}a)^2$$



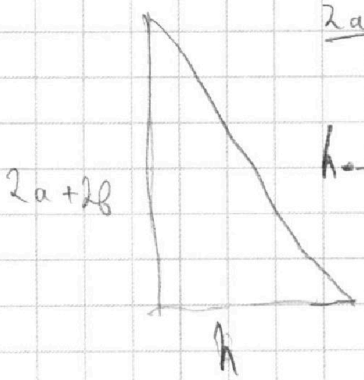
$$\frac{2ah+hb}{b}$$

$$a+b = \sqrt{17}a$$



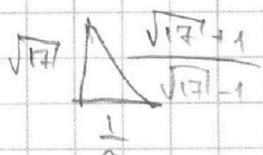
$$h\cdot\frac{2a+b}{b}$$

$$\boxed{b = \sqrt{17}a - a}$$



$$17a^2+1 = \frac{17a^2}{}$$

$$h\cdot\frac{\sqrt{17}a+a}{\sqrt{17}a-a}$$



$$\pm a \pm b \le |a| + |b|$$

$$2a + 2a\sqrt{17}$$

$$17 + \frac{1}{a^2} = \frac{17+2\sqrt{17}+1}{17-2\sqrt{17}+1}$$

$$\frac{17a^2+1}{a^2}$$