



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $3^{11}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $3^{18}7^{16}$ ,  $ac$  делится на  $3^{21}7^{38}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4} - \sqrt{2x^2+x+3} = 1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , диаметр  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC = 1$  и  $BC = 16$ . Найдите длину общей касательной к окружностям  $\omega$  и  $\Omega$ .
5. [4 балла] Ненулевые действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения  $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$ .

6. [5 баллов] Из пункта  $A$  в пункт  $B$  выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт  $B$  на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от  $A$  к  $B$ , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в  $B$  на 1 час 15 минут позже ~~велосипедиста~~ <sup>мотоциклиста</sup>. Найдите расстояние между  $A$  и  $B$ .
7. [6 баллов] Вписанная окружность  $\omega$  прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $B$  касается его сторон  $CA, AB, BC$  в точках  $D, E, F$  соответственно. Луч  $ED$  пересекает прямую, перпендикулярную  $BC$ , проходящую через вершину  $C$ , в точке  $Y$ ;  $X$  – вторая точка пересечения прямой  $FY$  с окружностью  $\omega$ . Известно, что  $EX = 2\sqrt{2}XY$ . Найдите отношение  $AD : DC$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Ответ: ~~3<sup>25</sup> · 7<sup>38</sup>~~  $3^{25} \cdot 7^{38}$

Решение:

Предположим, что какое-то из чисел  $a, b$  или  $c$  кратно простому  $p$ , при этом  $p \neq 3$  и  $p \neq 7$ . Поделим число  $a, b$  или  $c$  (которое кратно  $p$ ) на  $p$ . Тогда, на делимость на 3 и на 7 чисел  $ab, bc$  и  $ac$  наше действие не повлияет. Будем повторять это действие до тех пор, пока ~~будет~~ найдётся такое <sup>простое</sup> число  $p$ , что  $p \neq 3$  и  $p \neq 7$ , при этом какое-то из чисел  $a, b$  или  $c$  кратно  $p$ . Нетрудно видеть, что такими операциями мы ~~никогда~~ не повлияем на делимость чисел  $ab, bc$  и  $ac$  на 3 и 7; ~~как~~ при этом число  $abc$  мы можем только уменьшать с помощью таких операций.

По итогу, у нас остаются три числа  $a, b, c$ , каждое из которых не делится простыми делителями ~~ни на 3, ни на 7, ни на простое число  $p$ , отличное от 3 и 7.~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Не кратны никакому простому числу, отличному от 3 и 4.

Тогда  $a = 3^{a_1} \cdot 4^{b_1}$ ;  $b = 3^{a_2} \cdot 4^{b_2}$ ;  $c = 3^{a_3} \cdot 4^{b_3}$ , где числа  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$  — целые неотрицательные.

Тогда  $ab = 3^{a_1+a_2} \cdot 4^{b_1+b_2}$ ;  $ac = 3^{a_1+a_3} \cdot 4^{b_1+b_3}$ ;  $bc = 3^{a_2+a_3} \cdot 4^{b_2+b_3}$ ;  
 $abc = 3^{a_1+a_2+a_3} \cdot 4^{b_1+b_2+b_3}$ ;  
 Так как  $ab : (3^{11} \cdot 4^{11})$ ;  $ac : (3^{21} \cdot 4^{38})$ ;  $bc : (3^{18} \cdot 4^{16})$ ,

то получаем систему:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 11 \\ a_1 + a_3 \geq 21 \\ a_2 + a_3 \geq 18 \\ b_1 + b_2 \geq 11 \\ b_1 + b_3 \geq 38 \\ b_2 + b_3 \geq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_1 + a_3 + a_2 + a_3 \geq 11 + 21 + 18 \\ b_1 + b_2 + b_1 + b_3 + b_2 + b_3 \geq 11 + 38 + 16 \end{cases} \Rightarrow$$

Так как  $abc = 3^{a_1+a_2+a_3} \cdot 4^{b_1+b_2+b_3}$  тогда

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(a_1 + a_2 + a_3) \geq 50 \\ 2(b_1 + b_2 + b_3) \geq 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 \geq 25 \\ b_1 + b_2 + b_3 \geq 32,5 \end{cases} \Rightarrow$$

т.к.  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  — целые неотрицательные  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 \geq 25 \\ b_1 + b_2 + b_3 \geq 33 \end{cases}$$

минимальное значение  $abc$  равно  $3^{25} \cdot 4^{38}$

$abc \geq 3^{25} \cdot 4^{33}$ . Но т.к.  $b_1, b_2, b_3$  — целые и неотрицательные, и т.к.  $b_1 + b_2 + b_3 \geq 33$ , то  $b_1 + b_2 + b_3 \geq 33 \Rightarrow abc \geq 3^{25} \cdot 4^{38}$

Пример:  $a_1 = 4, a_2 = 4, a_3 = 14, b_1 = 19, b_2 = 0, b_3 = 19$ .

Как видно, ~~каждые~~ эти числа удовлетворяют системе (1) и  $a_1 + a_2 + a_3 \geq 25$  и  $b_1 + b_2 + b_3 \geq 33$ , как видно,  $a = 3^4 \cdot 4^{19}$ ;  $b = 3^4$ ;  $c = 3^{14} \cdot 4^{19}$  и  $abc = 3^{25} \cdot 4^{38}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2 продолжение

$$m \leq 10$$

Пример на  $m=10$ :  $a=4$ ;  $b=3$ , дробь  $\frac{a}{b}$  - несократима

$$\frac{a+b}{a^2-3ab+b^2} \leq \frac{10}{49-8 \cdot 21+9} \leq \frac{10}{58-168} \leq \frac{10}{-110} \Rightarrow \text{числитель}$$

и знаменатель дроби  $\frac{a+b}{a^2-3ab+b^2}$  можно сократить

на  $m=10$ .

↓

Ответ:  $m=10$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$  пусть  $c:d$ , если  $|c|:|d|$ , числа  $c$  и  $d$  - целые,  $d \neq 0$

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$$

Если и числитель, и знаменатель кратны  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,

то:

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a^2-8ab+b^2):m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (a^2+2ab+b^2-10ab):m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ ((a+b)^2-10ab):m \\ \text{и т.к. } (a+b):m, \text{ то } (a+b)^2:m. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ (-10ab):m \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+b):m \\ 10ab:m. \end{cases}$$

Если  $\text{НОД}(a, m) = x$ , причём  $x \neq 1$ , то т.к.  $(a+b):m$  и  $m:x$ ,

то  $x$  - натуральное, то и  $a:x$ , то  $b:x \Rightarrow \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x} \cdot \frac{10}{x} : \frac{m}{x}$ ,

$x$  - натуральное,  $x \neq 1$ .  $\Rightarrow$  дробь  $\frac{a}{x}$  сократима, что неверно

по условию.  $\Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow \text{НОД}(a, m) = x$ ,  $x = 1$ .

Аналогично  $\text{НОД}(b, m) = 1$ .

и т.к.  $\text{НОД}(a, m) = 1$  и  $\text{НОД}(b, m) = 1$  и  $(10ab):m$

$$10 \cdot m$$

$$m \leq 10.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

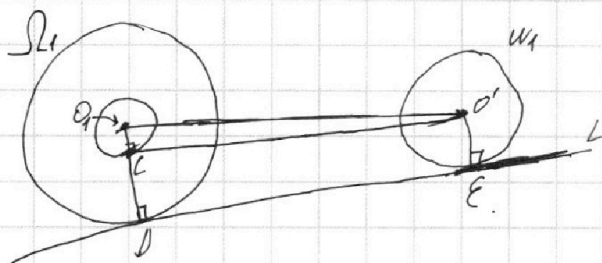


1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение



$\omega_1$  - радиус  $R$ ,  $\omega_2$  - радиус  $r$ .

$\omega_1$  - центр  $O$ ,  
 $\omega_2$  - центр  $O'$

$l$  - общая касательная

$l \perp \omega_1 = \{D\}$ ;  $l \perp \omega_2 = \{E\}$

пусть  $\omega_2$  - окружность с центром  $O_1$  и радиусом  $R-r$ .

Проведем касательную  $a$  из  $O_1$  к  $\omega_2$  так, чтобы  $a$  пересекала  $O_1D$ . (см. рисунок). Пусть  $\omega_2 \cap a = \{C\} \Rightarrow O_1C = R-r$

Параллельно перенесем  $a$  на вектор  $\vec{O'E}$ . Тогда,

т.к.  $|\vec{O'E}| = r$  и  $O_1C = R-r$ , то прямая  $a'$ , полученная

параллельным переносом  $a$  из  $a$  на вектор  $\vec{O'E}$ , касается  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (это следует из построения общей касательной для двух окружностей, у которых не

совпадают центры). Тогда,  $O_1C \parallel DE$ . Также  $DE = O_1C$ , и

$C \in O_1D$ , также из ~~того~~ построения общей касательной

для двух неконцентрических окружностей.

Т.к.  $DE \parallel O_1C$  и  $DE \perp O_1D$ , то  $O_1C \perp O_1D$ , т.к.  $C \in O_1D$ .

Тогда треугольник  $O_1CO_1$  - прямоугольный с прямым углом  $\angle O_1CO_1$ .

Тогда, по теореме Пифагора,  $O_1C^2 + O_1D^2 = (O_1O')^2 \Rightarrow O_1C = \sqrt{(O_1O')^2 - O_1D^2}$ ,

т.к.  $O_1O' = d$  и  $O_1D = R-r$ , то  $O_1C = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$ . Это и требовалось доказать.

Тогда, для окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  из задачи, т.к. они неконцентрические,

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 продолжение 2

верно, что  $DE = \sqrt{O_1O_2^2 - (R-r)^2}$ .

ТЛ.к.  $R=8,5$ ,  $r=1$ , а  $O_1O_2=R$ , то  $DE = \sqrt{8,5^2 - (8,5-1)^2}$

$$DE = \sqrt{8,5^2 - 7,5^2}$$

$$DE = \sqrt{1 \cdot 16}$$

$$DE = \sqrt{16}$$

$$DE = 4$$

Ответ: 4.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5.

$3x + 2y = z$  (1) и  $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$  (2) Обозначим:  $a \stackrel{\text{no}(x)}{=} b$  - означает, что  $a = b$  по утверждению (x).

$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2}{z} - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{2y - z}{yz}$   
 $\Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{-3x}{yz} \Rightarrow -x^2 = yz$  (3)

$3x + 2y = z \Rightarrow 3x = z - 2y$

из (1):  $x = \frac{z - 2y}{3} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{z - 2y}{3}\right)^2$  (4)

~~из (3) и (4):~~

из (3) и (4):  $-\left(\frac{z - 2y}{3}\right)^2 = yz$

$-\frac{(4y^2 + z^2 - 4yz)}{9} = yz$

$-4y^2 - z^2 + 4yz = 9yz$

$-4y^2 - z^2 = 5yz$  (5)

$4y^2 + z^2 + 5yz = 0$

$(4y + z)(y + z) = 0$

$\begin{cases} y = -z \\ y = -\frac{z}{4} \end{cases}$  (6)

$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \stackrel{\text{no}(5) \text{ и } (6)}{=} \frac{-3yz + 5yz}{x^2 - 6y^2} \stackrel{\text{no}(3)}{=} \frac{2yz}{-yz - 6y^2}$  (7)

по (6)  $\begin{cases} y = -z \\ y = -\frac{z}{4} \end{cases}$

если  $y = -z$ :

$\frac{2yz}{-yz - 6y^2} \stackrel{\text{no}(6)}{=} \frac{-2y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2}{1 - 6} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} = 0,4$

т.к.  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \stackrel{\text{no}(6)}{=} \frac{2yz}{-yz - 6y^2}$  по (7), то  $\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = 0,4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6 продолжение

$$\begin{aligned} \text{№3 (8) и (6):} \quad & \begin{cases} v_1 v_2 = 540 \\ v_1 + v_2 = 48 \end{cases} \\ & \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ (48 - v_2) v_2 = 540 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ -v_2^2 + 48v_2 - 540 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 48 - v_2 \\ v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0 \end{cases}$$

решим уравнение  $v_2^2 - 48v_2 + 540 = 0$  ( $D$ -дискриминант)

$$D = 48^2 - 540 \cdot 4 = 2304 - 2160 = 144 = 12^2$$

$$v_2 = \frac{12 + 48}{2}$$

$$\begin{cases} v_2 = \frac{\sqrt{D} + 48}{2} \\ v_2 = \frac{-\sqrt{D} + 48}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = \frac{12 + 48}{2} \\ v_2 = \frac{-12 + 48}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = 30 \\ v_2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_2 = 30 \\ v_1 = 48 - v_2 \\ v_2 = 18 \\ v_1 = 48 - v_2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} v_2 = 30 \\ v_1 = 18 \\ v_2 = 18 \\ v_1 = 30 \end{cases}$$

Поскольку мотоциклист изначально имеет равные скорости, а стартовал от двигателя, то  $v_1 > v_2$

$$\begin{cases} v_1 = 30 \\ v_2 = 18 \end{cases}$$

$$\text{по (5), } 25 = S \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \Rightarrow S = \frac{2v_1 v_2}{v_1 - v_2} \text{ км} \Rightarrow S = \frac{2 \cdot 30 \cdot 18}{30 - 18} \text{ км} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{2 \cdot 540}{18} \text{ км} \Rightarrow S = \frac{540 \cdot 2}{18} \text{ км} \Rightarrow S = \frac{270}{3} \text{ км} \Rightarrow S = 90 \text{ км.}$$

Ответ: 90 км.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

р. - час, км/ч - километр в час; км. - километр.  
 №. Пусть  $S$  км. - путь из А в В,  $V_1$  км/ч - скорость

мотоциклиста,  $V_2$  км/ч - скорость велосипедиста. (зна-  
 чательные)

Тогда мотоциклист ехал  $\frac{S}{V_1}$  часов, а велосипедист -  $\frac{S}{V_2}$ .

Тогда, по условию,  $\frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} - 2$  (всё в часах)

Если мотоциклист ехал бы время, за которое велосипедист проехал весь путь  $S$ , то мотоциклист проехал бы  $\frac{S}{V_2} \cdot V_1$  км. Если бы велосипедист ехал время, затраченное мотоциклистом на путь  $S$ , то велосипедист бы проехал бы  $\frac{S}{V_1} \cdot V_2$  км. Тогда, по условию,  $\frac{S}{V_1} \cdot V_2 + 96 = \frac{S}{V_2} \cdot V_1$  (всё км.)

Если бы каждый увеличил скорость на 6 км/ч, то мотоциклист бы ехал  $\frac{S}{V_1+6}$  часов, а велосипедист -  $\frac{S}{V_2+6}$  ч. По условию,  $\frac{S}{V_1+6} = \frac{S}{V_2+6} - 1,25$  (всё в ч.).

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S}{V_1} = \frac{S}{V_2} - 2 & (1) \\ \frac{S}{V_1+6} = \frac{S}{V_2+6} - 1,25 & (2) \\ \frac{S}{V_2} \cdot V_1 = \frac{S}{V_1} \cdot V_2 + 96. & (3) \end{cases}$$

из (3) следует, что  $96 = S \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2}$  (4)

из (1) следует, что  $2 = S \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2}$  (5)

из (4) и (5) следует, что  $V_1 + V_2 = 48$ . (м.к.  $S \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_1 V_2} = S \cdot \frac{(V_1 + V_2)(V_1 - V_2)}{V_1 V_2}$ ) (6)

из (2) следует, что  $1,25 = \frac{S}{V_2+6} - \frac{S}{V_1+6}$ , м.к.  $S \cdot \frac{V_1 - V_2}{(V_2+6)(V_1+6)} = 1,25$ . (7)

из (5) и (7) следует, что  $S \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 V_2} = \left( \frac{V_1 V_2}{(V_1+6)(V_2+6)} \right)^{-1} \cdot \frac{2}{1,25} = \frac{2}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$

$$\left( \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{(V_1+6)(V_2+6)} \right)^{-1} = 1,6 \Rightarrow \frac{(V_1+6)(V_2+6)}{V_1 V_2} = 1,6 \cdot \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{V_1 V_2 + 6(V_1+V_2) + 36}{V_1 V_2} = \frac{5}{8} \cdot 1,6 \Rightarrow$$

м.к.  $V_1+V_2=48$   
 $\Rightarrow \frac{V_1 V_2}{V_1+V_2} + \frac{6 \cdot 48 + 36}{V_1 V_2} = \frac{5}{8} \cdot 1,6 \Rightarrow 1 + \frac{324}{V_1 V_2} = 1,6 \Rightarrow \frac{324}{V_1 V_2} = 0,6 \Rightarrow \frac{V_1 V_2}{324} = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_1 V_2 = \frac{324 \cdot 5}{3} \Rightarrow V_1 V_2 = 108 \cdot 5 \Rightarrow V_1 V_2 = 540. \quad (8)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№7 продолжение

Поскольку  $BF = BE$  (см. выше обоснование), то

$\triangle BFE$  - равнобедренный с основанием  $FE$ . Т.к.  $\angle FBE = \angle CAB = 90^\circ$ ,

то  $\angle BFE = \angle BEF = 45^\circ$  - по сумме углов  $\triangle BFE$ .

$$\begin{cases} \angle BFE = 45^\circ \\ \angle CFY = 45^\circ \text{ (см. выше обоснование)} \end{cases} \Rightarrow \angle EFY = 90^\circ, \text{ т.к.}$$

углы  $\angle BFE$ ,  $\angle CFY$ ,  $\angle EFY$  в сумме дают  $180^\circ$ .

$\angle EFY = \angle EFY$ , т.к.  $Y \in FY$ . ~~т.к.  $Y \in FY$ , т.к.~~

~~точки  $X, Y, F$  лежат на одной прямой.~~

$$\angle EFY = 90^\circ \text{ (т.к. } \angle EFY = \angle EFY = 90^\circ)$$

т.к. точки  $E, F, X$  - лежат на  $w$ , то  $\angle EFY$  опирается на диаметр  $w \Rightarrow EX$  - диаметр  $w$ .

и  $\angle EDX = 90^\circ$ , т.к. точка  $D$  тоже лежит на  $w$

$$\angle XDY = 90^\circ, \text{ как угол, смежный с } \angle EDX = 90^\circ.$$

т.к.  $\angle EDX = 90^\circ$  и  $\angle XDY = 90^\circ$ , то  $\triangle EXD$  - н/у с

$\angle EDX = 90^\circ$  и  $\triangle XDY$  - н/у с  $\angle XDY = 90^\circ$

по теореме Пифагора

$$\begin{cases} EX^2 = ED^2 + XD^2 \\ XY^2 = DY^2 + XD^2 \end{cases}$$

т.к.  $EX = 2\sqrt{2}XY$

$$\begin{cases} EX^2 = 8XY^2 \\ XY^2 = DY^2 + XD^2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№7 продолжение 2.

в м.к.  $EX = 2\sqrt{2}XY$

$$\begin{cases} 8XY^2 = EP^2 + XD^2 \\ XY^2 = DY^2 + XD^2 \end{cases}$$

$$(EP^2 + XD^2) - (DY^2 + XD^2) = 7XY^2$$

$$EP^2 - DY^2 = XY^2 = 4$$

Заметим, что  $\triangle EDA \sim \triangle DYC$  (по  $\angle AED = \angle DYC$  и  $\angle EDA = \angle YDC$ ).  
в м.к.  $CD = CY$  и  $EA = AD$ .

$$\frac{AD}{CD} = \frac{EP}{DY}$$



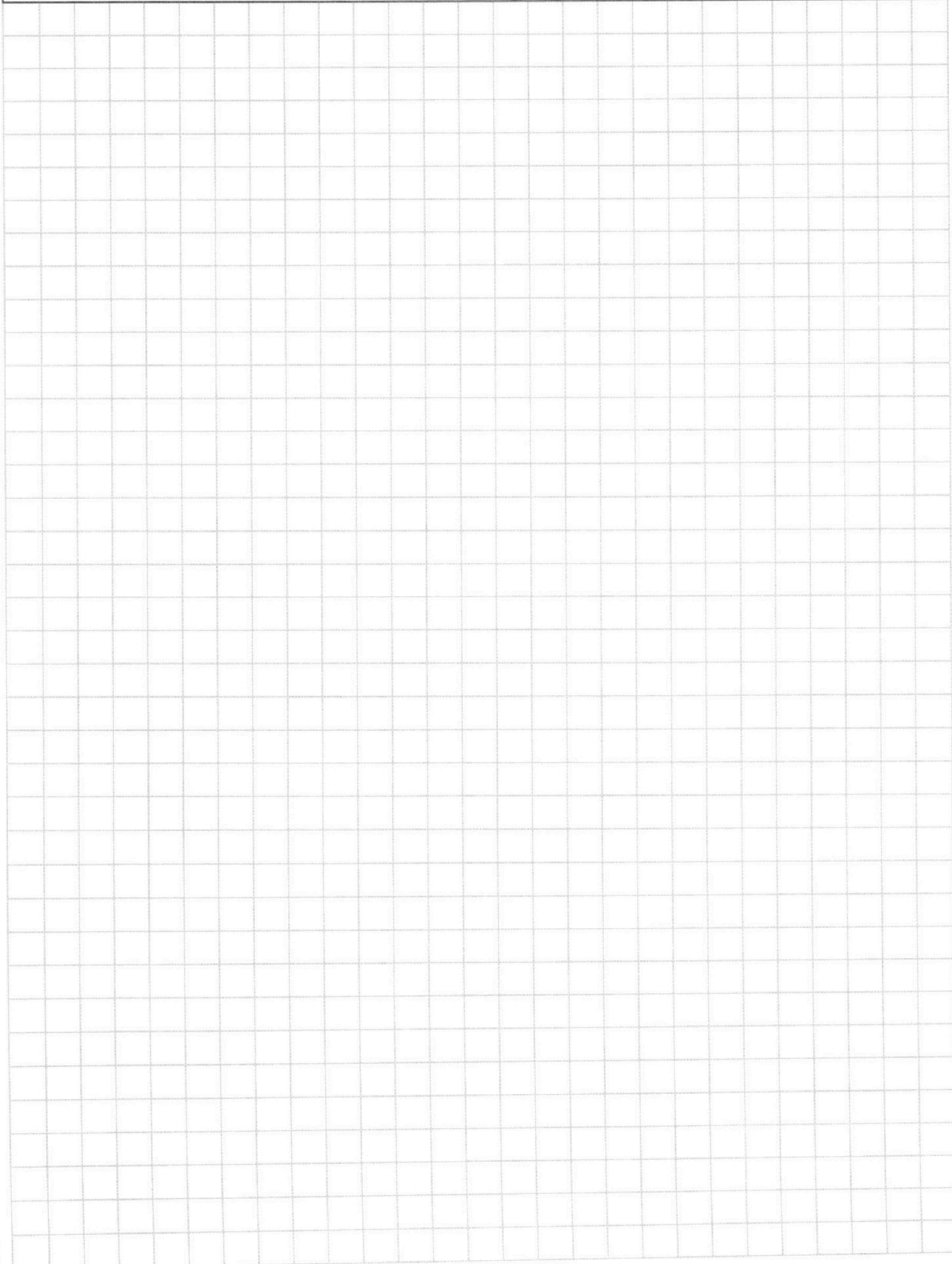
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1 <sup>Черновик.</sup>

$$ab : (3^{11} \cdot 4^{11}); \quad bc : 3^{18} \cdot 4^{16}; \quad ac : 3^{21} \cdot 4^{38}$$

Очевидно, что если какие-то из чисел  $a, b, c$  кратны каким-то простым числам, <sup>кроме 3 и 4,</sup> то можно число, делящееся на простое число, разделить на это простое число столько раз,

$$a = 3^{a_1} \cdot 4^{b_1}$$

$$b = 3^{a_2} \cdot 4^{b_2}$$

$$c = 3^{a_3} \cdot 4^{b_3}$$

25	33
<del>8</del> 4	<del>4</del>
<del>4</del>	4
<del>16</del>	<del>32</del>

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \geq 11 \\ b_1 + b_2 \geq 11 \\ b_2 + b_3 \geq 16 \\ a_2 + a_3 \geq 18 \\ a_1 + a_3 \geq 21 \\ b_1 + b_3 \geq 38 \end{cases}$$

$$abc = 3^{a_1 + a_2 + a_3} \cdot 4^{b_1 + b_2 + b_3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq (11 + 18 + 21)/3 = 7 + 6 + 3 \frac{2}{3} = 16 \frac{2}{3}$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq (11 + 16 + 38)/3 = (27 + 38)/3 = 65/3 = 32 \frac{2}{3}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 17$$

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 33$$

Пример верен решать!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

~~№ 9 482~~  $4x^2 - 2x + 7 - 2\sqrt{\dots} = 16x^2$   
 $3x + 2y = 2$

$\sqrt{2}$

$\frac{a}{b}$  - несократима, т.е.  $(a, b) = 1$ .

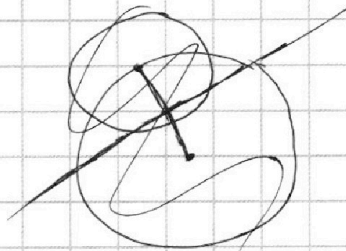
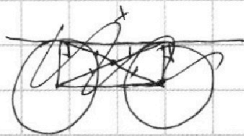
$$\begin{array}{r} 6 \\ 48 \\ \times 48 \\ \hline 1440 \\ + 384 \\ \hline 182 \\ \hline 2304 \end{array}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$a+b : m$   
 $(a-b)^2 + 6ab : m$

$\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{2}}$

$a+b : m$   
 $(a+b)^2 - 10ab : m$



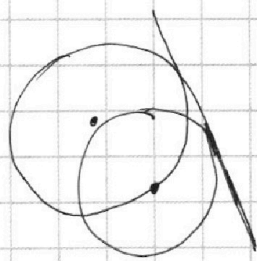
$10ab : m$   
 $a+b : m$

$a : m$  и  $b : m$

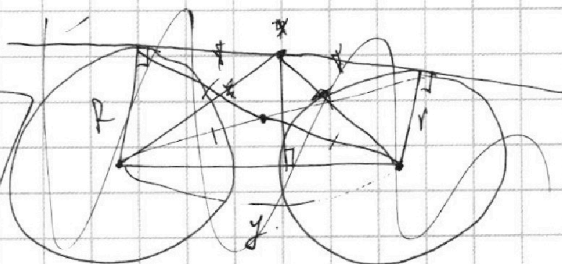
$a^2 - b^2$

если  $(a, m) = x$ , то  $a = x \cdot a'$  и  $x \neq 1$ , то  $b : x$ , это проблема

$(a', m) = 1$   
 $(b', m) = 1$



$48^2 - 540 \cdot 4 =$   
 $= 2304 - 2160 =$   
 $= 144 = 12^2$



$m \leq 10$

$S = x \cdot \frac{a+b}{2}$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 6 \\ \hline 288 \\ \hline 288 + 36^2 \\ = 288 + 1296 = 1584 \\ = 324 \end{array}$$

Пример:  $a = 7, b = 3$

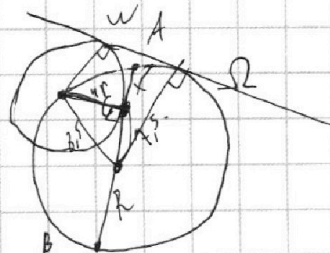
$S =$

$$\frac{10}{49 + 9 - 8 \cdot 21} \leq \frac{10}{58 - 168} \leq \frac{10}{-110}$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 215 \\ - 160 \cdot 85 \\ \hline \leq 168 \end{array}$$

$$\frac{324}{3} = 108$$

№ 4.



$2R - x = 16$   
 $x = 1$   
 $R = 8,5$

$r = \sqrt{8,5^2 - 4,5^2}$

$r = \sqrt{1 \cdot 16}$

$r = 4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 черновик.

$$3x + 2y = z.$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{z}{z}.$$

$$\frac{3}{x} = \frac{z}{z} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{zy - z}{yz}.$$

$$\frac{3}{x} = \frac{-zx}{yz}.$$

$$-x^2 = yz.$$

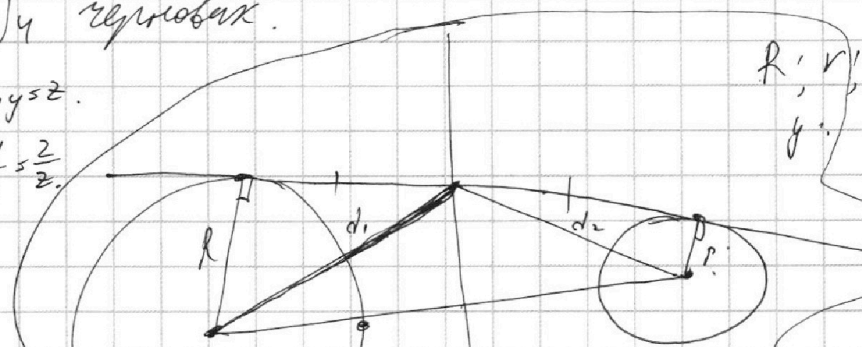
$$2\sqrt{R^2 + d_1^2}$$

$$(d_1^2 - R^2)(d_2^2 - R^2)$$

$$(d_1^2 - R^2) / ($$

$$\frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} \leq$$

$$\sqrt{y^2 - (R+r)^2}$$



$$R^2 - d_1^2 = r^2 - d_2^2$$

$$-R^2 + d_1^2 = r^2 - d_2^2$$

$$R^2 - r^2 = d_1^2 - d_2^2$$

$$d_1^2 - R^2 = d_2^2 - r^2 \quad 1,25 =$$

$$d_1^2 - d_2^2 = R^2 - r^2$$

м.  $\sqrt{1}$  и  $\sqrt{2}$  в км/ч.

$$\frac{S}{\sqrt{1}} = \frac{S}{\sqrt{2}} - 2$$

$$\frac{S}{\sqrt{1}} \cdot \sqrt{2} + 36 = \frac{S}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1}$$

$$\frac{S}{\sqrt{2}} = \frac{S}{\sqrt{2}} - 1,25$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} S + 36 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} S$$

$$36 = S \left( \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1}}{\sqrt{1}\sqrt{2}} \right)$$

$$2 = \frac{S}{\sqrt{2}} - \frac{S}{\sqrt{1}}$$

$$2 = S \cdot \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{\sqrt{1}\sqrt{2}}$$

$$48 = \frac{S}{\sqrt{1}\sqrt{2}}$$

$$(R-r)^2 = y^2$$