



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{15}7^{11}$, bc делится на $2^{17}7^{18}$, ac делится на $2^{23}7^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 17 : 7$. Найдите длину AB , если известно, что радиусы ω и Ω равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-13;26)$, $Q(3;26)$ и $R(16;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$.
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C ; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$, $b = 2^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 2^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$, тогда

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 15 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 17 \\ \alpha_3 + \alpha_1 = 23 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 55 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 27,5$

по м.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, но $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 28$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 = 11 \\ \beta_2 + \beta_3 = 16 \\ \beta_3 - \beta_1 = 39 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 68 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 34$

по степени единицы a, b, c меньше или равно $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, поэтому градусы увеличиваются $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq 10$, значит $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 39$

~~$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = 2^{27,5} \cdot 7^{39}$~~
 ~~$= 2^{27,5} \cdot 7^{39}$, по м.к. $a, b, c \in \mathbb{N}$, но степень должна быть целой~~

~~Итого получим $abc = 2^{28} \cdot 7^{34}$~~

~~Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^1$, $b = 2^5 \cdot 7^1$, $c = 2^1 \cdot 7^1$~~

Итого $abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 7^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = 2^{28} \cdot 7^{39}$

Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^1$, $b = 2^5 \cdot 7^1$, $c = 2^{12} \cdot 7^{28}$

Ответ: $abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

$\frac{a}{b}$ - не св. дроби \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{НОД}(a, b) = 1$$

при $a \geq 2, b \geq 2$

т.к. $\text{НОД}(a, b) = 1$, то

$$\text{НОД}(ab, a+b)$$

$$\text{НОД}(a, a+b) = 1$$

$$\text{НОД}(1, a+b) = 1$$

$$\Rightarrow \text{НОД}(ab, a+b) = 1$$

$$\text{НОД}(a+b-9ab, ab) = 1$$

$$\text{НОД}(a+b)^2-9ab, a+b$$

$$\text{НОД}(a+b-9ab) = 1$$

значит $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$ - не св. дроби \Rightarrow значит

мы можем найти такие $a \geq 2$ и $b \geq 2$,
числа $m=1$

$m=1$

Ответ: $m=1$

рассмотрим значение m , мы знаем

$$a = m^2, b = 3m^2, \text{ тогда}$$

$$m = 3$$

$$\frac{5}{4 \cdot 42 + 9}$$

Ответ: $m=3, m=4$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

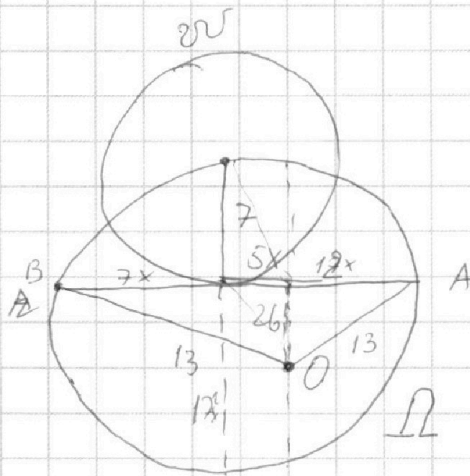
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

ОДЗ:

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \textcircled{1}$$

$D < 0$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

справа

$$9x - 1 < 0$$

$$9x - 1 > 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 > (9x - 1)^2$$

м.к. $1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0, \alpha$

$$2. \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1$$

$$x \geq \frac{1}{9}$$

$$3x^2 + 3x + 1 \geq 81x^2 - 18x + 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ м.к.}$$

↓

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$78x^2 - 21x \leq 0$$

$$x < \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \text{м.к. } \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 9x - 1 \quad \textcircled{2}$$

$$26x^2 - 7x \leq 0$$

$$2. \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq \frac{7}{26} \end{array} \right\}$$

$$x(26x - 7) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq \frac{7}{26} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{7}{26} \right]$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1)^2 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} - 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + 3x^2 + 3x + 1$$

$$-9x + 1 - (1 - 9x)^2 = 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$(1 - 9x) - (1 - 9x)^2 = 2(1 - 9x)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$1. 1 - 9x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \Rightarrow 0 - 0 = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$0 \leq \frac{1}{9} \leq \frac{7}{26} \quad \textcircled{4}, \text{ значение } \frac{1}{9} \text{ подходит.}$$

$$2. x \neq \frac{1}{9} \Rightarrow 1 - (1 - 9x) = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \Rightarrow 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1)$$

$x \geq 0$

$$x \in \left[0; \frac{7}{26} \right]$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

$$69x^2 - 12x - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 36 + 69 \cdot 4 = 276 + 36 = 312 > 0$$

$$x = \frac{\pm \sqrt{312} + 6}{69}, \text{ т.к. } -\sqrt{312} + 6 < 0 \text{ м.к.}$$

$\sqrt{312} > 6$, значит

$$x = \frac{\sqrt{312} + 6}{69}$$

$$x = \frac{2\sqrt{78} + 6}{69}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} \vee \frac{7}{26}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} \cdot 52\sqrt{78} + 156 \vee 483$$

$$52\sqrt{78} \vee 327$$

$$\sqrt{78} \vee \frac{327}{52}$$

$$\text{м.к. } \frac{327}{52} < 7, \text{ а } \sqrt{78} > 7, \text{ м.к.}$$

$$78 > 49, \text{ т.к.}$$

$$\sqrt{78} > \frac{327}{52}, \text{ а значит}$$

$$\frac{2\sqrt{78} + 6}{69} > \frac{7}{26}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

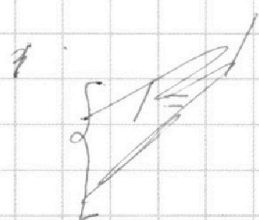
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$r_2 = \frac{|ax+y-8b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\begin{cases} 4 = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases}$$

I случай $b \leq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} 4 = \frac{8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{8b-12}{18b} = 4 \Rightarrow 8b-12=32b \Rightarrow \\ \Rightarrow 24b = -12 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \text{ (X)}$$

II случай $0 \leq b \leq \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} 4 = \frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{18b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{12-8b}{18b} = 4 \Rightarrow 12-8b=32b \Rightarrow \\ \Rightarrow 40b = 12 \Rightarrow b = \frac{12}{40} \Rightarrow b = \frac{3}{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow b = 0,3 \text{ (O)}$$

$$1 = \frac{18 \cdot 0,3}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{18 \cdot 0,3}{1} \text{ (O)}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{12}{5}$$

$$a^2+1 = \frac{144}{25}$$

$$a^2 = \frac{119}{25} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{119}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



ни случай $b \leq 0$

$$\begin{cases} y = \frac{8b-12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \\ 1 = \frac{-8b}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow \frac{8b-12}{8b} = 4 \Rightarrow 8b-12=32b \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24b = -12 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -0,5$$

$$1 = \frac{-8 \cdot (-0,5)}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\sqrt{a^2+1} = 4 \Rightarrow a^2+1=16 \Rightarrow a^2=15 \Rightarrow a = \pm\sqrt{15}$$

Ответ: при $a \in \left\{ -\frac{\sqrt{15}}{25}, -\sqrt{15}, -\frac{\sqrt{15}}{25}, \frac{\sqrt{15}}{25}, \sqrt{15} \right\}$,

найдется такое b , что система имеет ровно 2 решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} y = -ax + 8b \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы выразить
2 неизвестных
нам подходит все точки,
которые лежат
внутри 1 или 2 окружностей

У касательных, это
и есть касу у касательных
границ
теперь с помощью

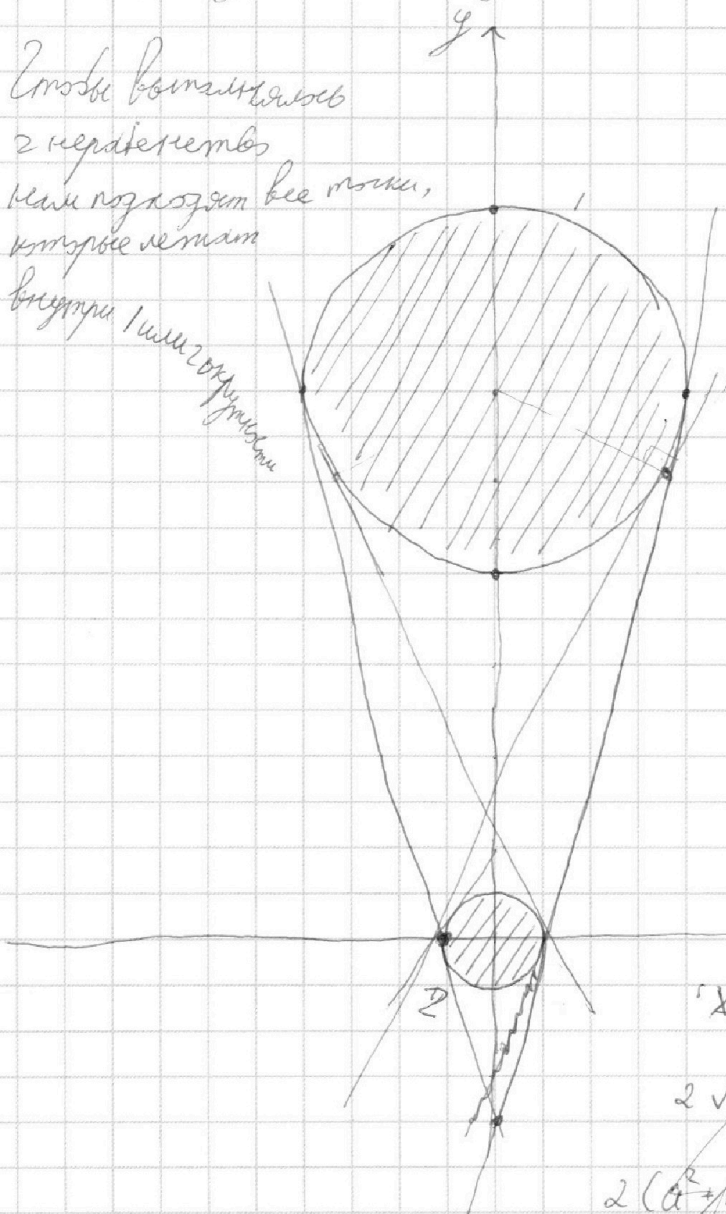
формулы выведем касу
прямой

$$\rho = \frac{|ax + y - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

или

$$\rho = \frac{|12 - 8b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$
 где x, y
 будут
 либо $(0, 12)$,
 либо $(0, 0)$

$$2 = \frac{|3 - 2b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$



$$\rho = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$2\sqrt{a^2 + 1} = |3 - 2b|$$

$$2(a^2 + 1) = 9 - 12b + 4$$

$$a^2 + 1 =$$

$$\rho(Ax + By + C)$$

$$\rho = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

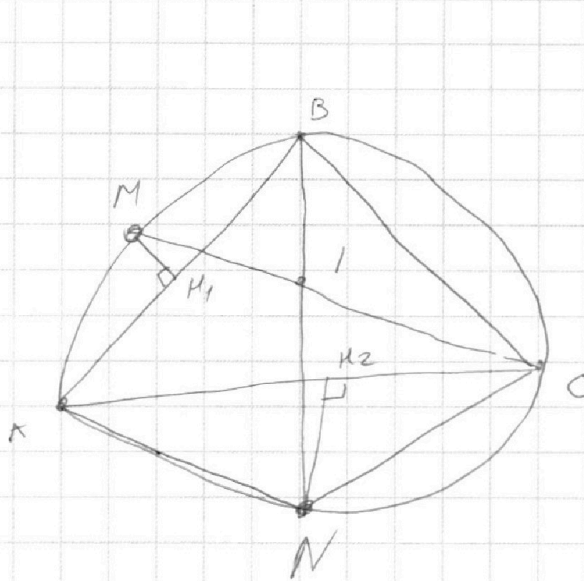
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$NH_2 = 2,5$$

$$MH_1 = 5$$

$$AM = MB \text{ (п.к. } \angle MC - \text{дуг.)}$$

$$AN = NC \text{ (п.к. } \angle BN - \text{дуг.)}$$

$$AN = IN = NC$$

$$AM = MB = MI$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

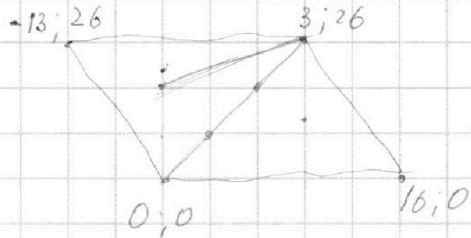
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$2x_2 = 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 14$$

$$A - 2B = 14$$

x_1, y_1
 x_2, y_2

$$\frac{x_1 - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{y_2 - y_1}$$

$$A = 2B + 14$$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$xy_2 - xy_1 - x_1y_2 + x_1y_1 = x_2y - x_1y - y_1x_2 + x_1y_1$$

$$x(y_2 - y_1) + y(x_1 - x_2) + x_2y_1 - x_1y_2 = 0$$

$$Ax + By + C = 0$$

$$26 \cdot 6 = 156$$

$$\begin{array}{r} 69 \\ \times 7 \\ \hline 483 \end{array}$$

$$y = -\frac{2B+14}{B}x + \frac{C}{B}$$

$$(2B+14)x + By + C = 0$$

$$\begin{array}{r} 78 \overline{) 2} \\ \underline{139} \end{array}$$

$$y = 2 \left(-2 + \frac{14}{B} \right) x + \frac{C}{B}$$

$$2 \cdot 2 + 26 = 0$$

$$32$$

$$6 \cdot 4 = 24$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 69 \\ \times 4 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$2\sqrt{28}$$

$$\begin{array}{r} 156 \overline{) 2} \\ \underline{14} \\ 16 \overline{) 78} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3/2 \overline{) 2} \\ \underline{2} \\ 11 \\ \underline{10} \\ 12 \end{array}$$

$$\frac{26}{26 \cdot 8} \leq \frac{7 \cdot 8}{26 \cdot 8}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 118 \overline{) 7} \\ - 7 \\ \hline 48 \\ - 48 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$d_1 + d_2 = 16$$

$$d_2 + d_3 = 17$$

$$d_3 + d_1 = 23$$

$$\begin{array}{r} 483 \\ - 156 \\ \hline 327 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \hline 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 327 \overline{) 13} \\ - 28 \\ \hline 67 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ - 18 \\ \hline 263 \end{array}$$

$$16$$

$$d_1 + d_2$$

$$5 + 12$$

$$2 =$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$d_1 = 11$$

$$d_2 = 5$$

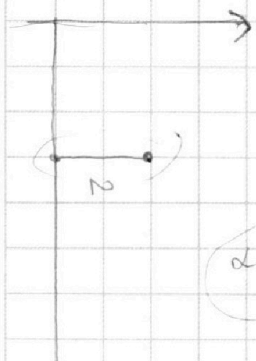
$$d_3 = 12$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ - 16 \\ \hline 7 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$327 \overline{) 52}$$

$$30$$

$$52 \cdot 6 = 312$$



$$\begin{array}{l} \beta_1 \geq 5,5 \\ \beta_1 \leq 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0 + 0 + 52 \\ 0 + 2y + 0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 327 \\ - 312 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$d_3 - d_2$$

$$\beta_3 \leq 28$$

$$8 - 27$$

$$\beta_2$$

$$\beta_3 \geq 19,5$$

$$\beta_1 \geq 5,5$$

$$\beta_2 \geq -10$$

$$\beta_3 \geq 28$$

$$y - 3 = 0$$

$$a = 0$$

$$\beta_1 = 0$$

$$y = 0$$

$$\begin{array}{l} a = 0 \\ by + c = 0 \\ y = -\frac{c}{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ y = 0 \\ x + c = 0 \\ c = 0 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a sphere and a tetrahedron.

AC : CB = 17 : 7

CB = AC
CO = 13

24x

DP, PF

$\frac{7}{7x} = \frac{17x}{PF}$

$PF = 17x^2$

$\frac{DP}{BP} = \frac{AP}{PF}$

DP

Diagrams include:
 - A sphere with a tetrahedron inscribed inside. Vertices are labeled A, B, C, D. The center of the sphere is O. A point P is marked on the sphere's surface.
 - A 2D projection of the tetrahedron with side lengths 13 and 17x.
 - A right-angled triangle with legs 7 and 17x.
 - A diagram showing the intersection of a plane with the sphere, forming a chord AB of length 17x.
 - A diagram showing the projection of the tetrahedron onto a horizontal plane, with a vertical line through the center O and a point P on the surface.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{a}{b}$$

$$a+b$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 7 \\ a_2 + a &= b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} a^2 - 7ab + b^2 & a+b \\ - a^2 + ab & \\ \hline - 6ab + b^2 & ab - 3b \\ - -6ab + 3b^2 & \\ \hline 3b^2 & \end{array}$$

$$a - 3b + \frac{3b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a-3b)(a+b) + 3b^2}{a+b} = \frac{a^2 + ab - 3ab - 3b^2 + 3b^2}{a+b}$$

$$\frac{a^2 - 7ab + b^2}{a+b}$$

$$\frac{a+b}{a+b}$$

$$\begin{aligned} &(a+b)^2 - 9ab \\ &(a+b-3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab}) \end{aligned}$$

$$\frac{b(t+1)}{b^2(t^2-7t+1)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}+1}{a\frac{a}{b}-7a+\frac{b}{a}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

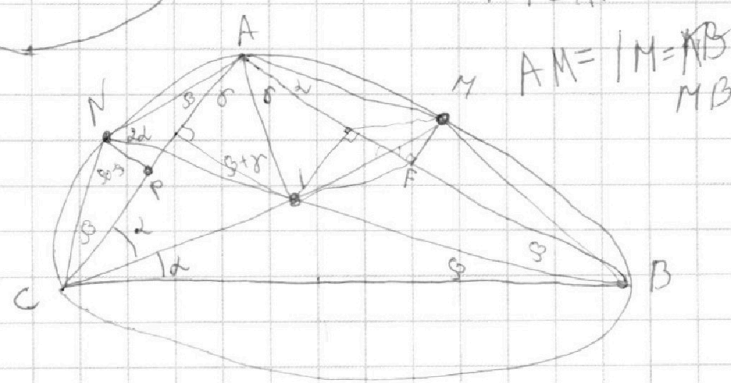
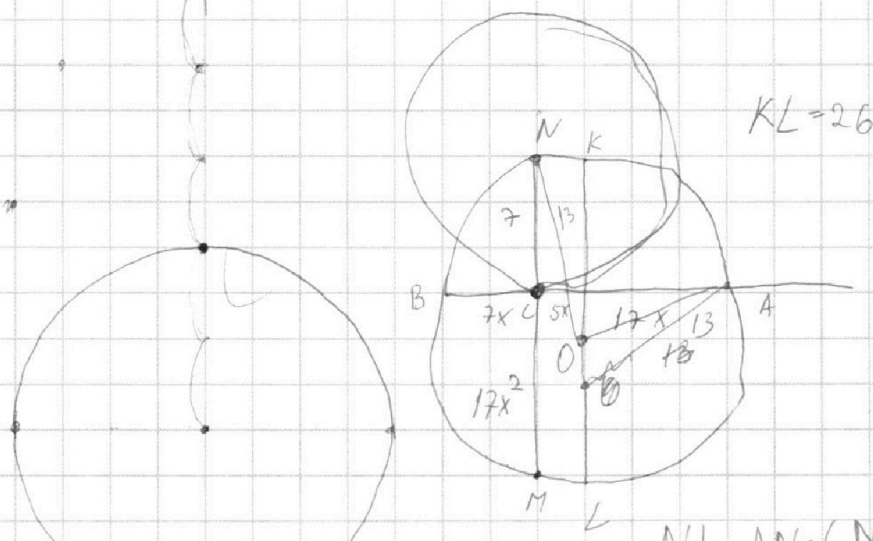
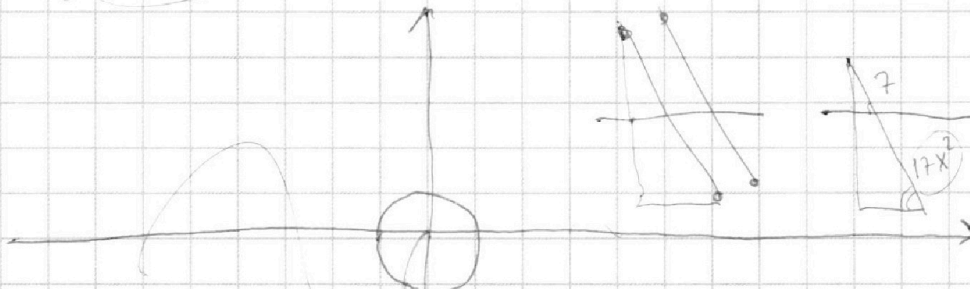


$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

$$y = -ax + 8b$$

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{17x}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{17x^2}$$



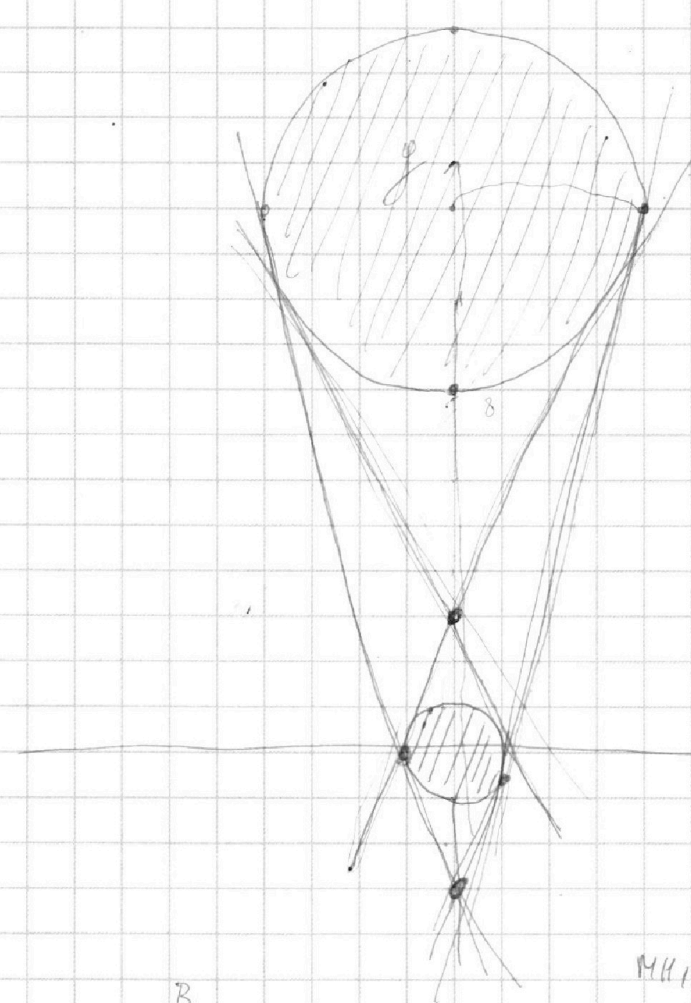
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
 $y = -ax + 8b$

$ax + y - 8b = x^2 + y^2 - 1$

$y = 2x + 8b$

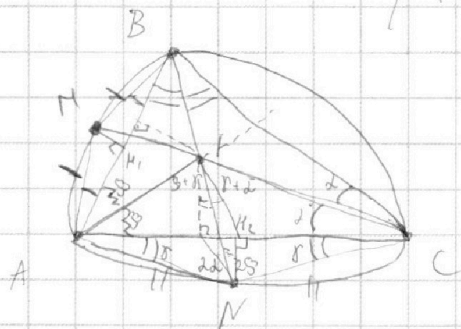
$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 15 \\ d_1 + d_3 = 23 \\ d_2 + d_3 = 17 \end{cases}$$

A1-?

$d_1 + d_2 + d_3 = 27,5$

$MH_1 = 5$

$NH_2 = 2,5$



$IN = AN = NC$

$IM = MB = AM$

$\beta + \gamma$

$90 - \beta$

$2\beta + \gamma - 90$

$\beta + \gamma - 90 + \beta$

$2\beta - 90 + \gamma = 2\beta + \gamma - 90$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Если $b \geq \frac{3}{2}$, то $\begin{cases} 1 = \frac{1-2b-2b^2}{\sqrt{a^2+1}} \\ 4 = \frac{12b-1}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{1}{3} \text{ (X)}$

Ответ: при $a \in \left\{ \frac{\pm 4\sqrt{6}}{5}; \frac{-4\sqrt{7}}{3}; \frac{-4\sqrt{6}}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}; \frac{4\sqrt{7}}{3} \right\}$

Итак и получается значение параметра b , что $\frac{2}{3}$
Итак имеет ровно 2 решения

7

$\frac{5+2}{a+b}$
 $\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$
 $\frac{5}{4-4+3}$
 $a+b$

$\frac{3}{1-14+9}$
 $\frac{1}{12}$
 $\frac{7}{84}$
 $\frac{3}{-9}$
 $a, b \text{ НОД} = 1$

$\text{НОД}(a, b) = 1$

$\frac{2}{3}$
 $\frac{8-28}{47}$
 $\frac{4}{20}$
 $\frac{13}{5}$
 $\frac{9}{31}$
 $\frac{2+3}{4-42-9}$
 $a = p_1 - p_2$
 $b = p$
 $42 = 13$

$(a+b)^2 - 9ab$

$a+b$ ab

$a = p_1 - p_2$
 $b = p$
 $42 = 13$

$\frac{2}{3}$
 $\frac{5}{7}$
 $\frac{3}{4}$
 $\frac{5}{-70+25}$

$\frac{5}{-35} = \frac{1}{-7}$
 $(a+b)^2 - 9ab$

$a^2 - 4ab + b^2 - 9ab + ab$

$\frac{3+5}{8-7 \cdot 15+25}$

$\frac{7 \cdot 15}{15-39}$
 $\frac{-71}{39-105} = -71$

$a(a-4b) + b(b-9a) + ab$

$p_3 = \dots$

$\frac{8}{8-105+25}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Исходно

$$1 = \frac{1-8b}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}} = 9 \Rightarrow \frac{12-8b}{1-8b} = 9 \Rightarrow$$

$$12-8b = 9-72b \Rightarrow 64b = -3 \Rightarrow b = -\frac{3}{64} \quad (\otimes)$$

$$1 = \frac{1+8 \cdot \frac{1}{14}}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow a^2 = \frac{112}{9} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{112}}{3} = \pm \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{11}{3} \Rightarrow a^2+1 = \frac{121}{9}$$

$$a^2+1 = \frac{121}{9} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{120}}{3} = \pm \frac{2\sqrt{30}}{3}$$

a; b

$$a^2+1 = \frac{169}{49} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{168}}{7} = \pm \frac{2\sqrt{42}}{7}$$

$$1 = \frac{8b-8b-1}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow 1 = \frac{-1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$8 = \frac{12-8b-12}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow 8 = \frac{-8b}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$1 = \frac{8b-1}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = 8b-1$$

$$8 = \frac{12-8b}{\sqrt{a^2+1}} \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{12-8b}{8}$$

$$8b-1 = \frac{12-8b}{8} \Rightarrow 64b-8 = 12-8b \Rightarrow 72b = 20 \Rightarrow b = \frac{5}{18}$$

Исходно:
 $b \geq \frac{1}{8}$
 $b \leq \frac{3}{2}$

$$8b \cdot \frac{12-8b}{8b-1} = 9 \Rightarrow 12-8b = 9b-9 \Rightarrow 21b = 21 \Rightarrow b = 1$$

$$8b-1 = 7 \Rightarrow 8b = 8 \Rightarrow b = 1$$

$$8b-1 = \frac{12-8b}{8} \Rightarrow 64b-8 = 12-8b \Rightarrow 72b = 20 \Rightarrow b = \frac{5}{18}$$

$$40b = 16 \Rightarrow b = \frac{2}{5} \quad (\checkmark)$$

$$1 = \frac{16}{5} - 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+1} = \frac{11}{5} \Rightarrow a^2 = \frac{121}{25} - 1 = \frac{96}{25} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{96}}{5} = \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

a

$$bc: 2^{17} 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} 7^{39}$$

$$ab: 2^{15} 7^{11}$$

$$bc: 2^{17} 7^{18}$$

$$ac: 2^{23} 7^{39}$$

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} 7^{68}$$

$$abc = 2^{22.5} 7^{27.5}$$

$$ab = k_1 \cdot 2^{15} 7^{11}$$

$$bc = k_2 \cdot 2^{17} 7^{18}$$

$$ac = k_3 \cdot 2^{23} 7^{39}$$

$$(abc)^2 = k_1 k_2 k_3 \cdot 2$$

$$k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$$

$$\gcd(a, b) = 1$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

$$a+b \mid \text{НОД}(a+b, a^2-7ab+b^2) = m$$

$$\begin{array}{r|l} a^2-7ab+b^2 & a+b \\ a^2+ab & a-8b \\ \hline -8ab+b^2 & \end{array}$$

$$\frac{a^2-7ab+b^2}{a+b}$$

$$\frac{(a-b)^2-8ab}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-8ab}{a+b} = a+b - \frac{8ab}{a+b}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$\frac{a}{b}$~~

~~$7a^2 - 7ab$~~ $a^2 - 7\sqrt{\ln(a,b)} + b^2$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = (9x - 1) + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 7\left(\frac{a}{b}\right) + 1$$

$$t^2 - 7t + 1$$

$$D = 49 - 4 = 45$$

$$\frac{a^2}{a} = a < 0$$

$$a < 0$$

~~$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$~~

b^2

$$1 - 9x + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

$$9x - 1 \leq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$t = \frac{7 \pm 3\sqrt{5} + 7}{2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (9x - 1)^2 + 3x^2 + 3x + 1 + 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$a + b$

~~$8x^2$~~

b^2

$$1, x = \frac{1}{9}$$

$$-9x + 1 - (9x - 1)^2 = 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-(9x - 1) - (9x - 1)^2 = 2(9x - 1)\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-1 - (9x - 1) = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$-9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$