



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}.$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-13;26)$ ,  $Q(3;26)$  и  $R(16;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} ab : 2^{15} \cdot 7^{21} \quad (1) \\ bc : 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (2) \\ ac : 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (3) \end{array} \right.$$

Перемножим (1) и (2):

$$ab^2c : 2^{32} \cdot 7^{29}$$

С другой стороны,  $ac : 2^{23} \cdot 7^{39}$

~~$ab^2c : 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

$7^{39} > 7^{29}$ , значит  $ab^2c$ -то произведение

должно казаться  $7^{10}$ . Поскольку мы

минимизируем значение произведения,

~~тогда~~  $7^{10}$  может браться где угодно.

Пусть, например,  $b$  (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} ab = 2^{15} \cdot 7^{21} \quad (4) \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{18} \quad (5) \\ ac = 2^{23} \cdot 7^{39} \quad (6) \end{array} \right.$$

В данном случае мы получили минимальное

произведение, которое может быть. Од-

нако нужно проверить,  $a, b$  и  $c$  на натуральность.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Переключим (4), (5) и (6)

$$a^2 b^2 c^2 = 2^{55} \cdot 7^{78}$$

$a b c = \sqrt{2} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}$ . Очевидно, что при переключении натуральных чисел иррациональности появиться не могло. Значит где-то не хватило факторы. Пусть, опять же, в (4). (Квадрат где-то. мы минимизируем преобразуем).

$$\begin{cases} ab = 2^{16} \cdot 7^{21} & (7) \\ bc = 2^{17} \cdot 7^{18} & (8) \\ ac = 2^{23} \cdot 7^{39} & (9) \end{cases}$$

$$(7) : (8) : \frac{a}{c} = \frac{7^3}{2}, \Rightarrow a = \frac{7^3}{2} \cdot c$$

$$(9) \quad c^2 \cdot \frac{7^3}{2} = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$c^2 = 2^{24} \cdot 7^{36}$$

$$c = 2^{12} \cdot 7^{18}, \Rightarrow a = 2^{11} \cdot 7^{21}, b = 2^5$$

Все числа натуральные, значит они подходят.

$$a \cdot b \cdot c = 2^{11+5+12} \cdot 7^{18+21} = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$\text{Ответ: } 2^{28} \cdot 7^{39}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2.  $\text{НОД}(a, b) = 1$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m.$$

По алгоритму Евклида  $\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2 - (a+b)^2) = \text{НОД}(a+b, -9ab) = m.$

Рассмотрим ~~в~~ число  $m$ . Если  $a : m$ , то  $b : m$  по условию, и наоборот,  $\Rightarrow a+b : m$  и дроби несократимы.

$ab : m$  только в случае, если  $ab = m$ .

Кроме того  $a+b \neq m$  ( $a+b \neq ab$ , т.к. тогда было бы  $a=b=1$  из условия).

Если  $a=b=1$ , то  $m=1$ , это мало. Если одно из чисел 1, то  $a+b : ab$ . Если же  $a \neq 1$  и  $b \neq 1$ , то  $a+b < ab, \Rightarrow a+b \neq ab$ .

Остается 1 вариант:  $9 : m$ . Тогда наибольшее  $m = 9$ .

Ответ: 9.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

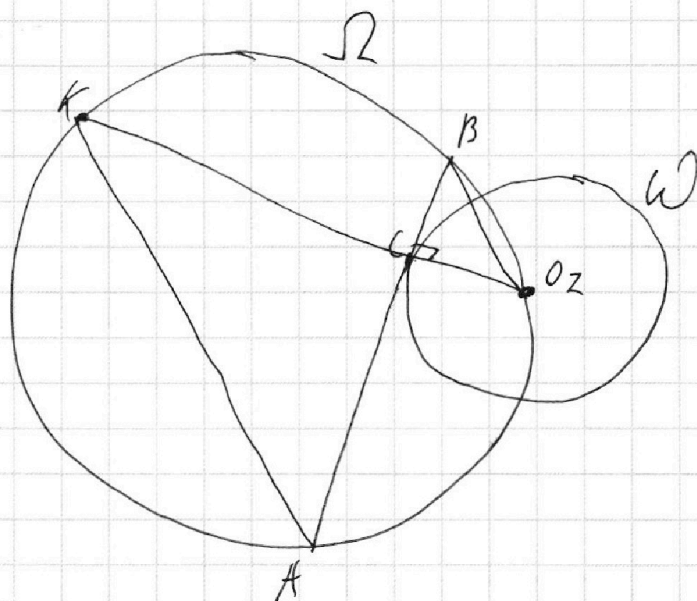
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



3.



$$r_1 = 13$$
$$r_2 = 7$$

$AC = 17x$ ,  $BC = 7x$ . Проведем  $O_2C$  до  
пересечения с  $\Omega$  в т.  $K$ . По св-ву  
пересекающихся хорд  $KC \cdot CO_2 = BC \cdot CA$

$$CK \cdot 7 = 7x \cdot 17x$$

$$CK = 17x^2$$

По т. Пифагора  $BO_2 = \sqrt{O_2C^2 + BC^2} = \sqrt{49 + 49x^2} =$   
 $= 7\sqrt{x^2 + 1}$ ,  $AK = \sqrt{CK^2 + AC^2} = \sqrt{289x^4 + 289x^2} =$   
 $= 17x\sqrt{x^2 + 1}$ .

По лемме, которую я докажу в конце решения,

$$4r_1^2 = AK^2 + BO_2^2$$

$$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 289x^2 + 49x^2 + 49$$

$$289x^4 + 338x^2 - 455 = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$t = x^2, \Rightarrow 289t^2 + 338t - 458 = 0$$

$$D = 642^2 - 4 \cdot 289 \cdot (-458) = 916^2$$

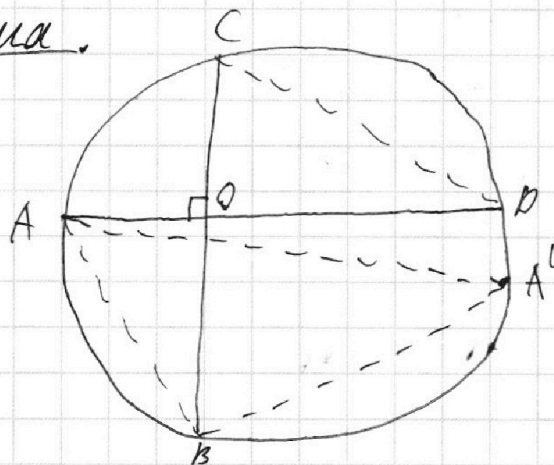
$$t = \frac{916 - 338}{578} = 1$$

$$x = 1 \quad (x > 0)$$

$$AB = 24x = 24$$

Ответ: 24

Лемма.



Если  $\angle AOC = 90^\circ$ ,  
то  $AB^2 + CB^2 = 4R^2$

Док-во: пусть  $AA'$  — диаметр,  
тогда  $AA'^2 = 4R^2$ , и  $\angle ABA' = 90^\circ$  как угол,  
опирающийся на диаметр. Тогда достаточно доказать —  
заметим, что  $A'B = CD$ .  $\angle BAD = 90^\circ - \angle ABO = \angle CBA'$   
 $\angle BAD = \angle BCD$  как вписанные углы.  $\angle BCD =$   
 $= \angle CBA'$ , дуга  $CA'$  общая,  $\Rightarrow \cap CD = \cap A'B, \Rightarrow CB = A'B,$   
т.е.д.

Ответ: 24

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

Пусть  $a = \sqrt{3x^2 - 6x + 2}$ ,  $b = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$

Заметим, что  $1 - 9x = a^2 - b^2$

Когда исходное уравнение можно переписать:

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a = b$$

или

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

II

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 & (1) \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 9x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{9}$$

Подставим  $x_1$  в (2):

$$3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 \geq 0 -$$

верно, поэтому  $x_1 = \frac{1}{9}$  - корень

$$a = 1 - b$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

II

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2 = (1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1})^2 & (3) \\ 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3) \quad 3x^2 - 6x + 2 = 1 + 3x^2 + 3x + 1 -$$

$$- 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

II

$$\begin{cases} x \geq 0 & (5) \\ 81x^2 = 4 \cdot (3x^2 + 3x + 1) & (6) \end{cases}$$

$$(6) \quad 81x^2 = 12x^2 + 12x + 4$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$D = 144 - 104 = 40$$

$$x_2 = \frac{12 - \sqrt{40}}{6 \cdot 2}$$

$$x_3 = \frac{12 + \sqrt{40}}{12}$$

$< 0, \Rightarrow$  не подходит по (5)

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = 1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}, \text{ откуда}$$

$$1 - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \geq 0$$

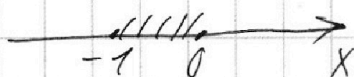
$$\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \leq 1$$

Найдём минимальные значения  $3x^2 + 3x + 1$ .

$$x_0 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{1}{4}, \text{ поэтому } 3x^2 + 3x + 1 > 0$$

$$3x^2 + 3x + 1 \leq 1$$

$$x(x+1) \leq 0$$



$$x \in [-1; 0].$$

Теперь рассмотрим мин. значения  $\sqrt{3x^2 - 6x + 2}$  на

промежутке  $[-1; 0]$ . Мин. значения

$$3x^2 - 6x + 2: \quad x_0 = \frac{6}{6} = 1, \text{ ~~при } x_0 = 1~~$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

III. к. <sup>мин.</sup> ~~макс.~~ значение при  $x_0 = 1$ , <sup>и старший коэффициент  $> 0$</sup>  значение

при  $x = 0$  будет ~~максимум~~

минимальным на промежутке  $[-1; 0]$ .

$$x \neq 0: \sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} > 1, \quad b \geq 0, \quad \Rightarrow a + b > 1$$

и корней не будет.

Ответ:  $\frac{1}{9}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$6. \begin{cases} ax + y - \delta b = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 & (2) \end{cases}$$

График (2) ~~на~~ в системе ~~OxOy~~  $OxOy$ : круг с центром  $(0; 0)$  и радиусом 1 и круг с центром  $(0; 12)$  и радиусом 4. Нам подходят внутренние части кругов и их границы.

График (1) — прямая ~~да~~, каковой которой зависит от параметра  $a$ , проходящая через точку  $(0; \delta b)$ . Параметр  $b$  "убывает" эту точку по оси  $Oy$ .

П.к. нам нужно равно два решения, прямая (1) не может проходить внутренне окружностей. Она также не может касаться одной окружности одновременно в двух точках (это невозможно). Поэтому мы имеем дело с общими касательными окружностей. Всего их 4: две внутренние и две внешние.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Тогда } \frac{O_1 E}{O_2 E} = 4, \Rightarrow O_2 E = \frac{1}{5} O_1 O_2 = \frac{12}{5}$$

Тогда координаты т. E —  $(0; \frac{12}{5})$ . Откуда

$$\delta \cdot b = \frac{12}{5}$$

$$b = \frac{3}{10}. \text{ Подставим в (1):}$$

$$ax + y - \delta \cdot \frac{3}{10} = 0$$

$$ax + y = \frac{12}{5}$$

$$\operatorname{tg} d = \frac{O_1 A}{A E} = \frac{4}{A E}$$

$$A E = \sqrt{O_1 E^2 - O_1 A^2} = \sqrt{49}$$

$$\operatorname{tg} d = \frac{O_2 C}{C E} = \frac{7}{C E}$$

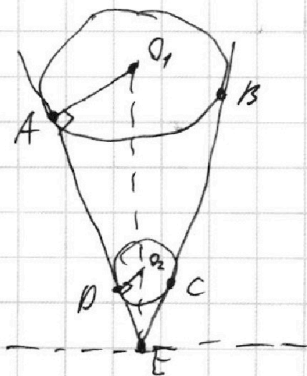
$$C E = \sqrt{E O_2^2 - O_2 C^2} = \sqrt{\frac{144}{25} - 1} = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\operatorname{tg} d = \frac{5}{\sqrt{119}}$$

$$\alpha_1 = \operatorname{tg}(90 - d) = \operatorname{ctg} d = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$\alpha_2 = -\operatorname{tg}(90 - d) = -\frac{\sqrt{119}}{5}$$

Теперь внешние касательные:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

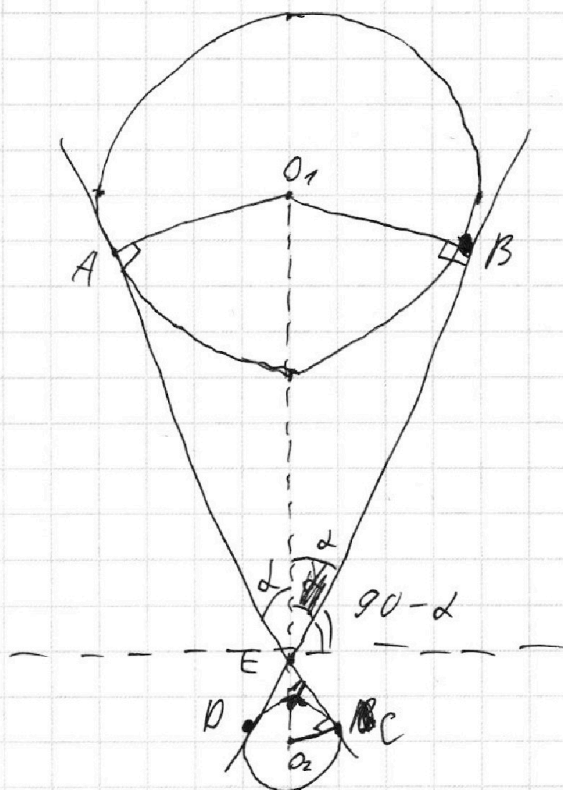


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Внутренние касательные пересекутся  
на оси  $Oy$ , т.к. центры окружностей  
лежат на оси  $Oy$ . Аналогично с внешними.  
Эти <sup>две</sup> точки и будут иметь нулевую  
координату  $(0; r_1)$  и  $(0; r_2)$

Внутренние:



$\triangle O_1 A E = \triangle O_1 B E$   
по 3 сторонам

Координаты т.  $O_2$   $(0; 0)$ , т.  $O_1$   $(0; \frac{12}{5})$ , поэтому

$O_1 O_2 = \frac{12}{5}$ .  $\angle A E O_1 = \angle O_2 E C$  как вертикальные,  
угол между радиусом, проведенным в т. касания

$\angle O_1 A E = \angle E C O_2 = 90^\circ$ ,  $\Rightarrow \triangle A E O_1 \sim \triangle E O_2 C$ ,

$k = \frac{AO_1}{CO_2} = \frac{4}{1} = 4$ . ( $AO_1$  и  $CO_2$  — радиусы).

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Аналогично ~~каждому~~  $\triangle E O_1 A \sim \triangle E O_2 P$ ,  
 $k = \frac{O_1 A}{O_2 P} = 4$ ,  $\frac{E O_2}{E O_1} = \frac{1}{4}$ ,  $\Rightarrow \frac{E O_2}{O_1 O_2} = \frac{1}{3}$ ,  $\Rightarrow$   
 $E O_2 = \frac{O_1 O_2}{3} = 4$ .

$\angle = \angle P E O_2 = \angle C E O_2$  ( $E O_1$  - биссектр.)

$E D = \sqrt{O_2 E^2 - O_2 P^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$

$\operatorname{tg} \angle = \frac{O_2 P}{E D} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$

Аналогично  $\alpha_3 = \operatorname{tg} (90 - \angle) = \operatorname{ctg} \angle = \sqrt{15}$

$\alpha_4 = -\sqrt{15}$ .

Ответ:  $-\sqrt{15}$ ;  $-\frac{\sqrt{119}}{5}$ ;  $\frac{\sqrt{119}}{5}$ ;  $\sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1.  $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 7^{18}$$

$$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 \cdot 2^7 \cdot 7^7 = 2^{21} \cdot 7^{32}$$

$$a = \sqrt{2} \cdot 2^{10} \cdot 7^{16} \quad a^2 + 7ab + b^2$$

$$ab = 2^{16} \cdot 7^{11}$$

$$b = 2^{12} \cdot 7^{23} \quad bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$a = 2^{11} \cdot 7^{16} \quad ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a^2 = 2^{22} \cdot 7^{32} \quad c = 2a \cdot 7^7$$

$$\frac{c}{a} = 2^2 \cdot 7^7$$

$$c = a \cdot 2^2 \cdot 7^7$$

2.  $\text{НОД}(a, b) = 1$

$$\begin{aligned} a^2 - 7ab + b^2 - (a+b)^2 &= \\ = a^2 - 7ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 &= \\ = -9ab \end{aligned}$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 7ab + b^2}$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = m$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) = \text{НОД}(a+b, -9ab) =$$

$$= \text{НОД}(9ab, a+b)$$

$$\frac{a+b}{-9ab} = \frac{-1}{9b} + \frac{-1}{9a}$$

$$\text{НОД}(a+b, a^2 - 7ab + b^2) \neq \text{НОД}(a, b)$$

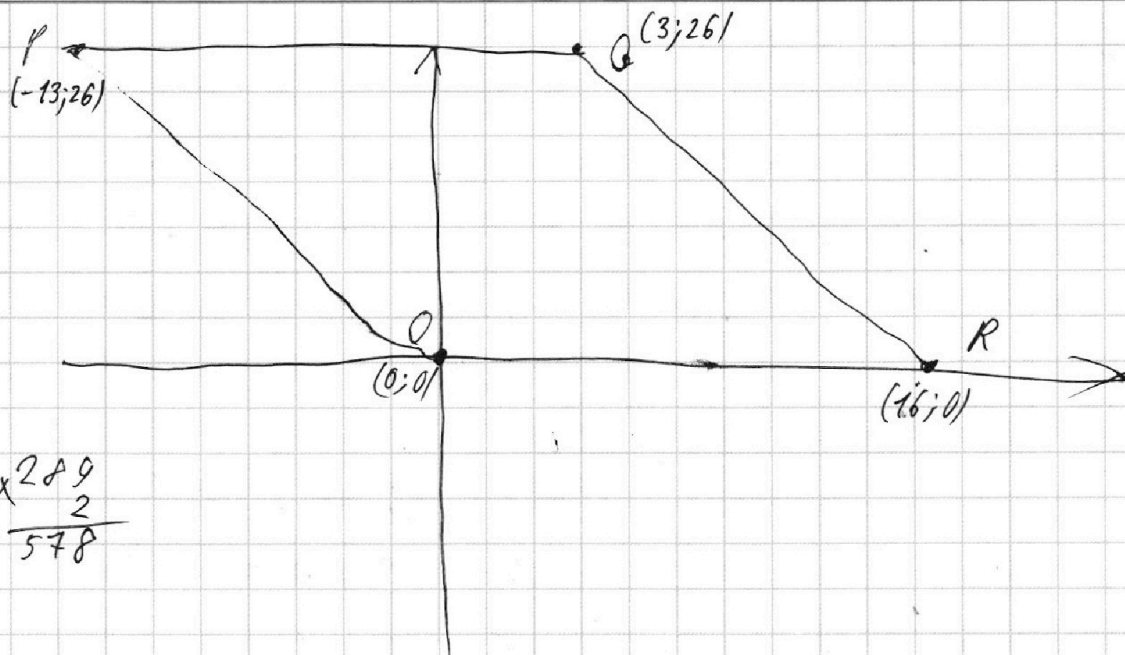
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



процесс.

$$\begin{array}{cc}
 x_1 - 1: & x_1 + 1: \\
 + 2 & - 2
 \end{array}$$

$$2(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{cc}
 y_1 - 1: & y_1 + 1: \\
 + 1 & - 1
 \end{array}$$

$$\max: 2 \cdot (16 + 13) - 26 = 2 \cdot 29 - 26 = 58 - 26 = 32$$

$$\begin{array}{r}
 \times 69 \\
 \times 16 \\
 \hline
 414 \\
 69 \\
 \hline
 1104
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 \times 35 \\
 \hline
 175 \\
 705 \\
 \hline
 1225
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 69 \\
 \times 2 \\
 \hline
 138
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 338 \\
 \times 338 \\
 \hline
 2704 \\
 1014 \\
 \hline
 1014 \\
 114244 \\
 + 529448 \\
 \hline
 643692
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 289 \\
 \times 4 \\
 \hline
 1156
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1156 \\
 \times 458 \\
 \hline
 9248 \\
 5780 \\
 \hline
 4624 \\
 \hline
 529448
 \end{array}$$

$$x^2 = \sqrt{\frac{643692 - 338}{578}}$$

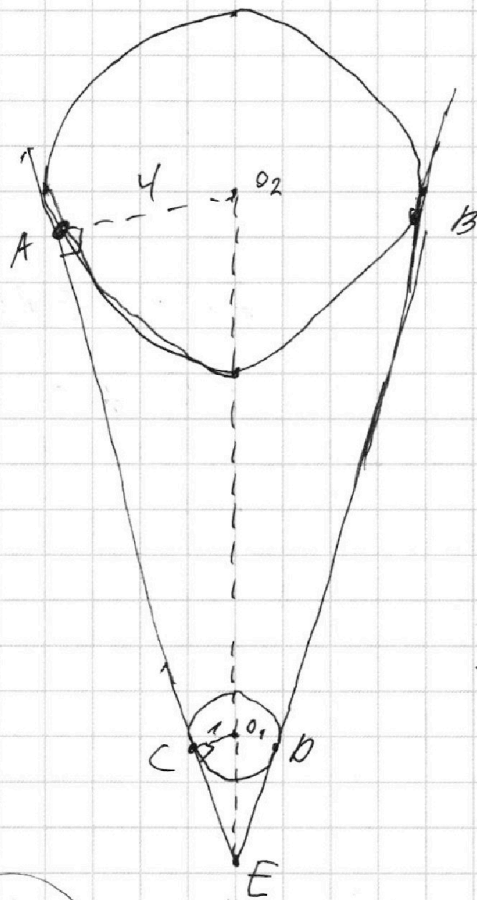
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{EO_1}{EO_2} = \frac{1}{4}$$

$$EO_2 = 4EO_1$$

$$EO_2 - EO_1 = 3EO_1 = O_1O_2 =$$

$$= 12$$

$$EO_1 = 4$$

$$-4$$

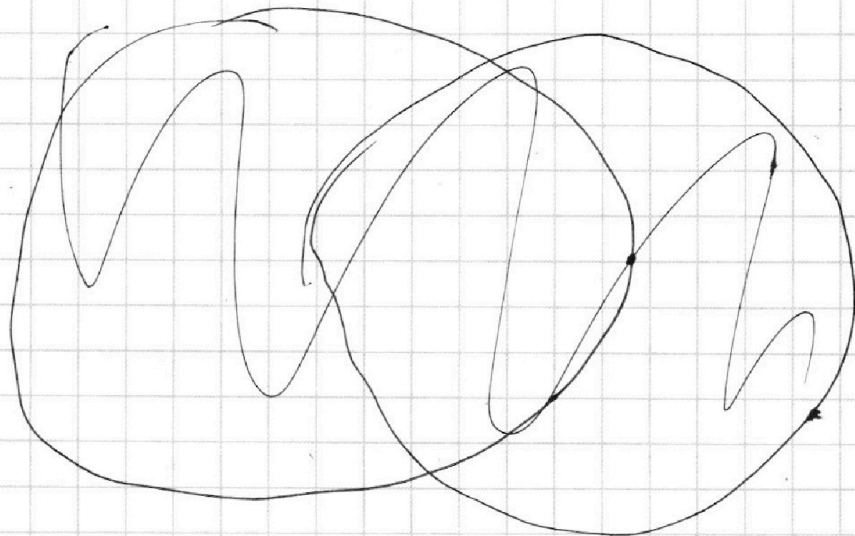
$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 3 \\ \hline 507 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 507 \\ 49 \\ \hline 458 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4; \frac{12}{5} \\ \hline \end{array}$$

$$289t^2 + 238t - 458 = 0$$

3.





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

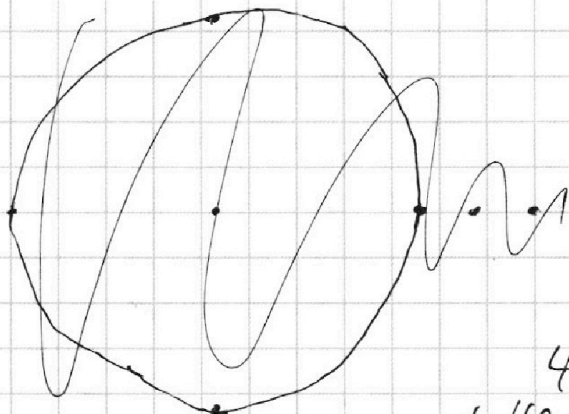
1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r}
 17 \\
 \times 17 \\
 \hline
 119 \\
 + 17 \\
 \hline
 289
 \end{array}$$



$$EC \cdot r_2 = BC \cdot AC$$

$$EC \cdot x = 7x \cdot 17x$$

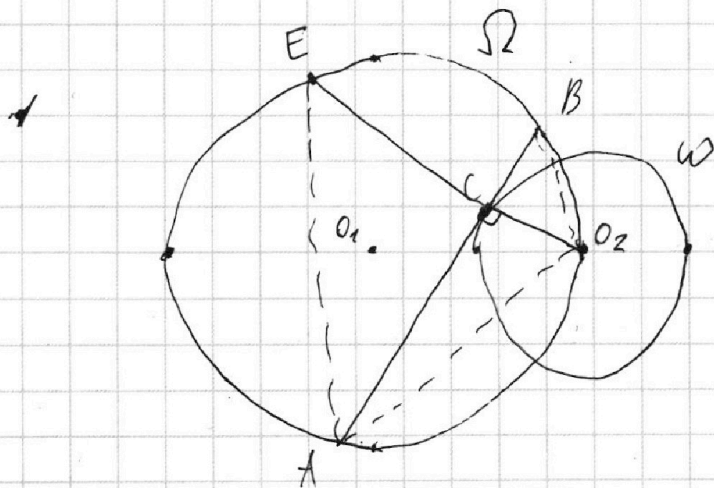
$$EC = 17x^2$$

$$AE^2 = 289x^4 + 289x^2$$

$$4r_1^2 = AE^2 + BO_2^2 = 289x^4 + 289x^2 +$$

$$+ 49x^2 + 49$$

$$4 \cdot 13^2 = 289x^4 + 338x^2 + 49$$



$$\frac{AC}{CB} = \frac{17}{7}$$

$$AC = 17x$$

$$CB = 7x$$

$x = ?$ ,  $AB = ?$

$$O_1 O_2 = r_1 = 13 \quad r_2 = 7$$

$$BO_2^2 - r_2^2 = 49x^2$$

$$AO_2^2 - r_2^2 = 17^2 x^2$$

$$BO_2^2 - 49 = 49x^2$$

$$AO_2^2 - 49 = 289x^2$$

$$BO_2^2 = 49(x^2 + 1)$$

$$AO_2 = \sqrt{289x^2 + 49}$$

$$BO_2 = 7\sqrt{x^2 + 1}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$ax + y = 86$$

$$y = 86 - ax$$

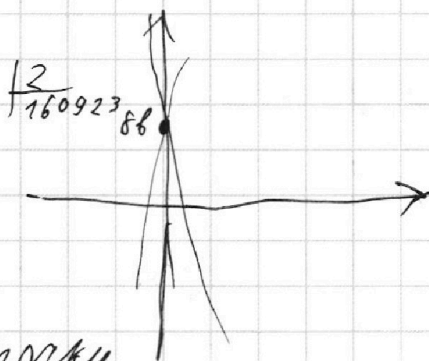
$$y = -ax + 86$$

$$a \neq 0$$

Найдётся в  
2 реш.

$$\begin{array}{r|l} 643692 & 2 \\ 321846 & 2 \\ \hline 160923 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 643692 & 2 \\ \hline 321846 & \\ \hline 2 & \\ \hline 12 & \\ \hline 12 & \\ \hline 18 & \\ \hline 18 & \\ \hline 4 & \\ \hline 9 & \\ \hline 12 & \\ \hline 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$



Формируем точку  
по оси Oy.

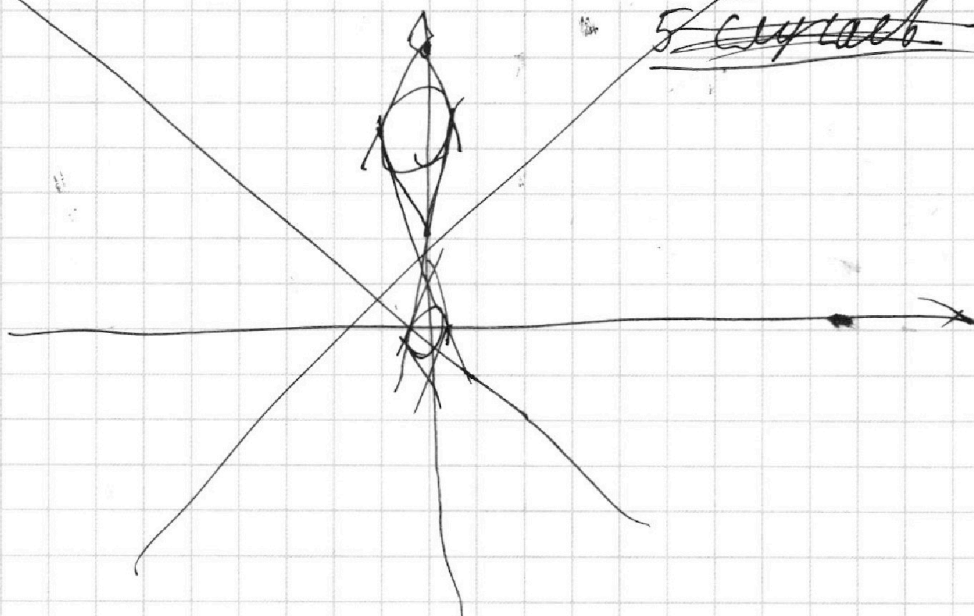
только не в и не на окружности

2 реш. 2 реш.

1 м. с одной и одна с другой

2 м. с какой-то одной

5 случаев



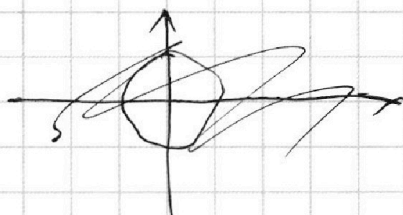
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

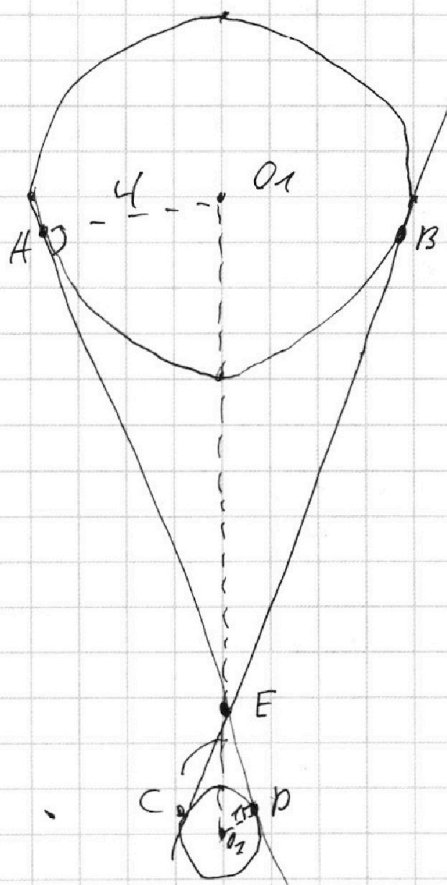
1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



прямая, имеющая 2 общие точки  
не может проходить внутри окружностей, =>  
касается. одну окр. кельза два раза коснется =>  
касается обеих => общая касательная 2-х  
окружностей. (либо внутр., либо внеш.



$$O_1 O_2 = 12$$

$$O_2 E = ?$$

$$\Delta O_1 A E \sim \Delta O_2 B E$$

$$k = 4$$

$$\frac{O_1 E}{O_2 E} = 4$$

$$O_1 E = 4 O_2 E$$

$$O_1 E + O_2 E = 5 O_2 E = 12$$

$$O_2 E = \frac{12}{5}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

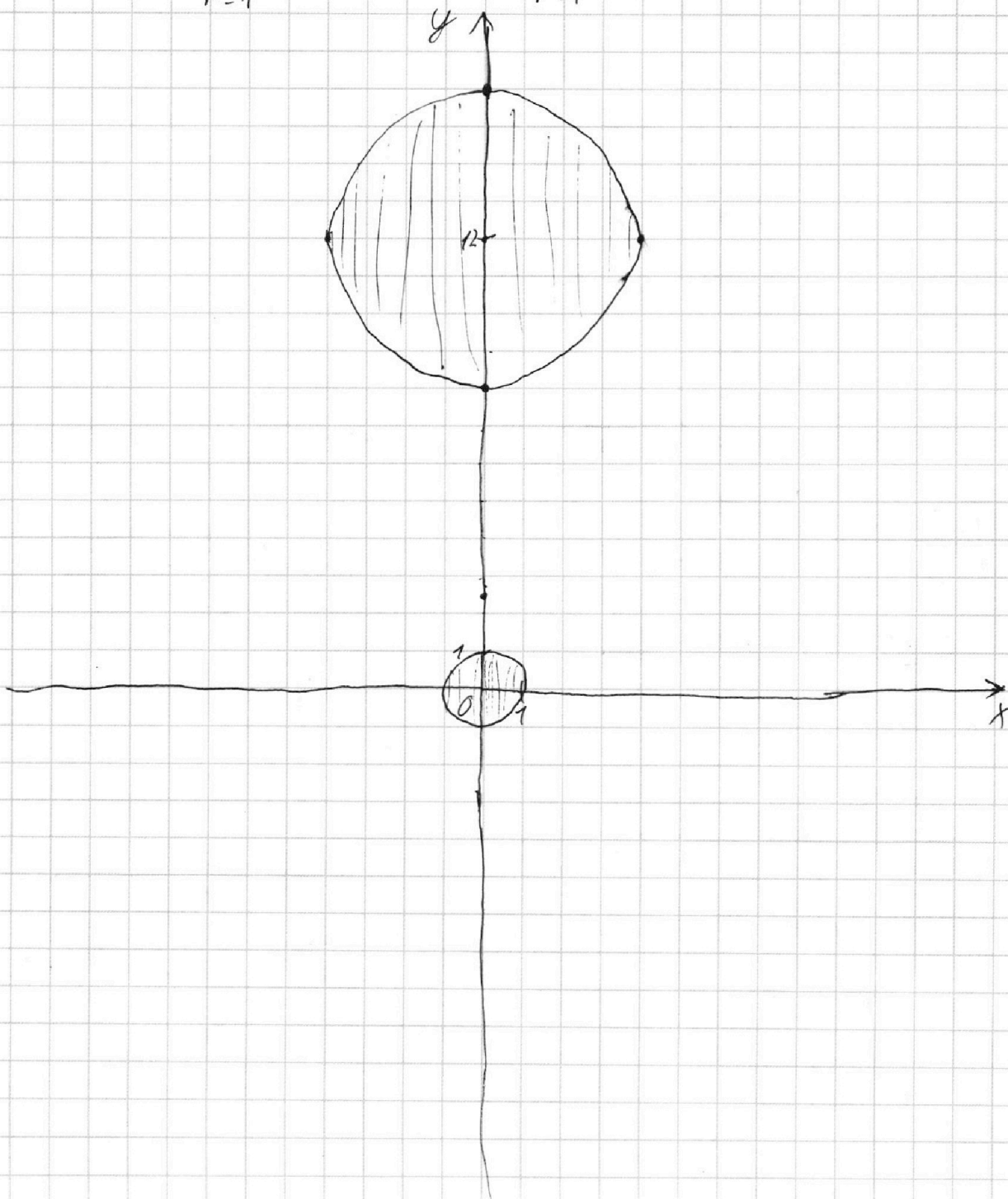
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

6.  $\begin{cases} ax + y - b = 0 & (1) \end{cases}$  2 реш.

$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y-12)^2 - 16) \leq 0 & (2) \end{cases}$

$r=1$   $r=4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$4. \quad \sqrt{3x^2 - 6x + 2} \stackrel{1}{a} \leftarrow \sqrt{3x^2 + 3x + 1} \stackrel{1}{b} = 1 - 9x$$

$$a^2 - b^2 = -9x + 1 = 1 - 9x$$

~~$$\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{b} \Rightarrow a = b$$~~

$$a - b = a^2 - b^2$$

$$a - b = (a - b)(a + b)$$

$$(a - b)(a + b - 1) = 0$$

$$a = b$$

$$a + b = 1$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

$$a = 1 - b$$

$$1 - b \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 \geq 0$$

$$3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$D = 36 - 24 = 12$$

$$-9x + 1 = 0$$

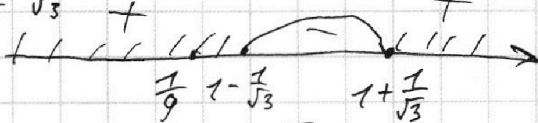
$$9x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} =$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\frac{1}{9} \vee 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \vee \frac{8}{9}$$

$$\sqrt{3} \vee \frac{8}{3}$$

$$3 \vee \frac{68}{9}$$

$$27 \vee 64$$

$$\vee <$$

$$1 \geq \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

~~$$1 \geq 3x^2 + 3x + 1$$~~

$$x^2 + x \leq 0$$

$$x(x+1) \leq 0$$



$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

✗

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~$a, b, c \in \mathbb{N}$~~   
 ~~$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$~~   
 ~~$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$~~   
 ~~$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

~~П.к.  $a, b, c$  надо найти минимальные значения  $a, b, c$ , попробуем найти минимальные  $a, b, c$ .  
Для минимальности~~

~~$ab = 2^{15} \cdot 7^{11}$~~   
 ~~$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$~~   
 ~~$c = 2^3 \cdot 7^7 \cdot d$~~

~~$ab^2c = 2^{32} \cdot 7^{29}$~~

~~$a \in ab^2c = 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

нужно дописать  
минимум  $7^{10}$

~~$ab = 2^{15} \cdot 7^{21}$~~

~~$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$  — не полны. + еще 2~~

~~$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

~~$ab = 2^{16} \cdot 7^{21}$~~

$\frac{a}{c} = \frac{7^3}{2}$

~~$bc = 2^{17} \cdot 7^{18}$~~

$a = \frac{c \cdot 7^3}{2}$

~~$ac = 2^{23} \cdot 7^{39}$~~

$c^2 \cdot \frac{7^5}{2} = 2^{24} \cdot 7^{36}$

$b = 2^5 \quad a = 2^{11} \cdot 7^{21}$

$c = 2^{12} \cdot 7^{18}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1    2    3    4    5    6    7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 9 \\ \hline 676 \\ 49 \\ \hline 627 \end{array}$$

$$D = 114244 + 1156 \cdot 627 =$$

$$= \underline{839056}$$

$$\begin{array}{r} \times 1156 \\ \times 627 \\ \hline 8092 \\ 2312 \\ 6936 \\ \hline 724812 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 724812 \\ + 114244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 906 \\ \times 906 \\ \hline 5436 \\ 8154 \\ \hline 820836 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 916 \\ \times 916 \\ \hline 5496 \\ 916 \\ \hline 8244 \\ \hline 839056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 914 \\ \times 914 \\ \hline 3656 \\ 914 \\ \hline 8226 \\ \hline 835396 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 916 \\ 338 \\ \hline 578 \end{array}$$