



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^9 3^{10} 5^{10}$ ,  $bc$  делится на  $2^{14} 3^{13} 5^{13}$ ,  $ac$  делится на  $2^{19} 3^{18} 5^{30}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 3 : 1$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$ .
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4(5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0;0)$ ,  $P(-14;42)$ ,  $Q(6;42)$  и  $R(20;0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 90,  $SA = BC = 12$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BSC$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 1  
Пусть  $a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$ ,  $k$ ,  $K=1$  т.к. нужно min значение

abc.

$$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$$

$$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

Исходя из условия

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_1 + x_3 \geq 19 \end{array} \right\} \textcircled{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 13 \\ y_1 + y_3 \geq 18 \end{array} \right\} \textcircled{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 + z_2 \geq 10 \\ z_2 + z_3 \geq 13 \\ z_1 + z_3 \geq 30 \end{array} \right\} \textcircled{3}$$

$$1) 2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 42$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 21$$

(лучший вариант):

$$\begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 7 \\ x_3 = 12 \end{cases}$$

$$2) 2(y_1 + y_2 + y_3) \geq 42$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 21$$

(лучший вариант):

$$\begin{cases} y_3 = 11 \\ y_1 = 7 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

$$3) 2(z_1 + z_2 + z_3) \geq 53, \text{ но } z_1 + z_3 \geq 30 \Rightarrow \min(z_1 + z_2 + z_3) \geq 30$$

Проверим  $\min(z_1 + z_2 + z_3) = 30$ :

$$\begin{cases} z_2 = 0 \\ z_1 = 13 \\ z_3 = 17 \end{cases}$$

И

$$a \cdot b \cdot c \geq 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

$$\text{Ответ: } 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{30}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

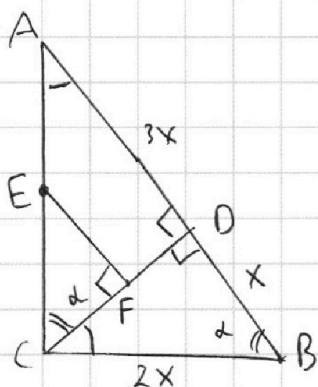
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Дано:  $ABC$  - прямоуг.  $\Delta$

$EF \parallel AD$

$$\frac{AD}{CB} = \frac{3}{1}$$

$C, E, F$   $\in$  окр-ти  $\omega$

Найти:  $\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

Решение:

1. Пусть  $AD = 3x \Rightarrow BD = x$

$$CD^2 = 3x \cdot x$$

$$CD = \underline{x\sqrt{3}} \quad (\text{т.к. } CD - \text{высота } \Delta \text{ пр. } \Delta)$$

$$CB = \sqrt{x^2 + 3x^2} = 2x \quad (\text{из т. Пифагора } \Delta CBD)$$

2.  $\angle ABC = \angle ADC$  т.к.  $\Delta ABC$  - прямоугольный,  $CD$  - высота.

$\angle EFC = \angle ADC = 90^\circ$  т.к.  $EF \parallel AD$ .

3.  $\Delta ADC \sim \Delta EFC$  (по углам)

$$\frac{S_{ADC}}{S_{EFC}} = k^2 = (\cos \alpha)^2, \quad \text{где } \alpha = \angle ACD = \angle DBC$$

$$S_{ADC} = \frac{3x \cdot x\sqrt{3}}{2} = x^2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \quad (\text{из } \Delta CBD)$$

$$S_{EFC} = \frac{x^2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3} \cdot 3}{8}$$

$$4. S_{ABC} = \frac{x\sqrt{3} \cdot 4x}{2} = 2x^2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{S_{ADC}}{S_{EFC}} = \frac{x^2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 8}{x^2\sqrt{3} \cdot 3} = \frac{16}{3}$$

Ответ:  $\frac{16}{3}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 3

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

1) Т.к.  $\arcsin z \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -3\pi \leq x \leq 2\pi$

$$5\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x)\right) = x + \frac{\pi}{2}$$

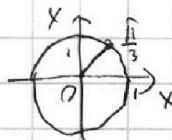
Будем делать преобразования, а потом просто поинтер, где всевозможные корни:

$$\frac{5\pi}{2} - 5x = x + \frac{\pi}{2}$$

$$6x = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

↓



Еще может какой-то корень от  $(0; 2\pi)$ , иначе нет др. корней  
Все корни имеют вид  $k\frac{\pi}{3}$ . Проверим их:

$$\frac{\pi}{3} \rightarrow \oplus$$

$$\frac{2\pi}{3} \rightarrow -5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\pi \rightarrow -\frac{5\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2} - 2\pi n$$

$$\frac{4\pi}{3} \rightarrow -\frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\frac{5\pi}{3} \rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

~~Нет корней~~

~~Нет корней~~

$$1) -\frac{5\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow -\frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \Rightarrow \text{это корень } x = \underline{\underline{-\frac{4\pi}{3}}}$$

$$2) -\frac{5\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow -\frac{5\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \quad \emptyset$$

$$3) \frac{4\pi}{3} \rightarrow -\frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow -\frac{5\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n \Rightarrow \text{это корень } x = \frac{\pi}{3}$$

$$4) \frac{5\pi}{3} \rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} + 2\pi n \quad \emptyset$$

Ответ:  $-\frac{4\pi}{3}$  ;  $\frac{\pi}{3}$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



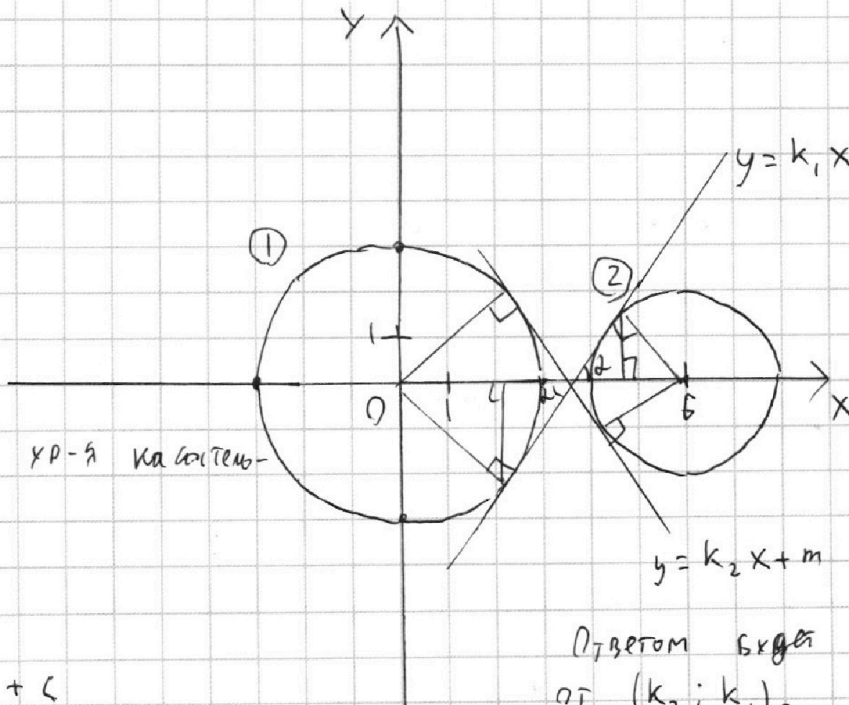
~ 4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ ((x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0) \end{cases} \quad 1) \rightarrow \text{4 решения.}$$

$$2) x^2 + y^2 = 3^2 \quad \text{или} \quad (x-6)^2 + y^2 = 2^2$$

$$1) y = \frac{3b - ax}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3b}{2} - \frac{ax}{2}$$

$\frac{3b}{2} - \frac{ax}{2} \Rightarrow$  Можно задать любую прямую  $y$  этой прямой



Найдём  $x$ -я касательных.

$tg \alpha - ?$

$$y = k_1 x + c$$

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad y' = \frac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$9 - x^2 = k_1^2 x^2 + c^2 + 2k_1 x c$$

$$x^2(k_1^2 + 1) + x(k_1 c - 2) + c^2 - 9 = 0$$

$$D = 0 = 4k_1^2 c^2 - 4(k_1^2 c^2 - 9k_1^2 + c^2 - 9)$$

$$36k_1^2 + 36 = 4c^2$$

$$9k_1^2 + 9 = c^2 \quad \times$$

Ответом будет интервал от  $(k_2; k_1)$ .

\*  $k_2 = -k_1$ , т.к. все симметричны отн. оси  $Ox$ .

$\Downarrow$   
ответ будет вида  $(-k_1; k_1)$

C

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$y = k_1 x + c$$

$$y = \sqrt{4 - (x-6)^2}$$

$$y' = \frac{1}{2} (4 - (x-6)^2)^{-1/2} \cdot 2(x-6)$$

$$4 - (x-6)^2 = k_1^2 x^2 + 2k_1 c x + c^2$$

$$4 - x^2 + 12x - 36 = k_1^2 x^2 + 2k_1 c x + c^2$$

$$x^2 (k_1^2 + 1) + x (2k_1 c - 12) + c^2 + 32 = 0$$

$$D=0 = 4k_1^2 c^2 - 48k_1 c + 144 - 4(c^2 + 32)(k_1^2 + 1) =$$

$$= 4k_1^2 c^2 - 48k_1 c + 144 - 4c^2 k_1^2 - 4 \cdot 32 k_1^2 - 4c^2 - 32 \cdot 4 =$$

$$= 16 - 48k_1 c - 128k_1^2 - 4c^2 = 0$$

Пусть  $k_1 = a$ ;

$$16 - 48ac - 128a^2 - 4c^2 = 0 \quad | :4$$

$$4 - 12ac - 32a^2 - c^2 = 0$$

$$c^2 + (12a)c + 32a^2 - 4 = 0 \quad + (*) \rightarrow 9(a^2 + 1) = c$$

$$81(a^2 + 1)^2 + (12a)(9(a^2 + 1)) + 32a^2 - 4 = 0$$

Пусть  $a^2 = n$ ;

$$81n^2 + 162n^2 + 81 + 108n^3 + 108n + 32n^2 - 4 = 0$$

$$81(n+1)^2 + 162n^2 + 108n^3 + 108n + 27 = 0$$

$$4 - 12k_1 c - 128k_1^2 - 4c^2 = 0 \quad \text{и} \quad c^2 = 9k_1^2 + 9$$

Ответ будет  $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

Через произвольную:

$$(4 - (x-6)^2)(x-6) = x(9-x^2) \Leftrightarrow (-x^2 + 12x - 32)(x-6) = x(9-x)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1    2    3    4    5    6    7  
                 



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$-x^3 + 12x^2 - 32x + 6x^2 - 22x + 32 \cdot b = 9x - x^2$$

$$x^3 + 19x^2 - 103x + 32 \cdot b = 0$$

Поскольку находим  $x_0$ ;  $y_0$ , представляем в  $YR$ -е

$y_0 = kx_0 + c$ , Находим  $k$  и пишем ответ  $(-k; k)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 5

$$\left. \begin{aligned} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 &= \log_x^2 243 - 8 & 1) \\ \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 &= \log_{25y^2} (3^4) - 8 & 2) \end{aligned} \right\}$$

ОДЗ:  $x > 0$      $y > 0$   
 $x \neq 1$      $y \neq \frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} \log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5 \log_x 3}{2} &= 8 \\ \log_3^4 5y + 2 \log_{5y} 3 - \frac{11}{2} \log_{5y} 3 &= 8 \end{aligned}$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 5y = -3,5 (\log_x 3 + \log_{5y} 3)$$

$$(\log_3 x - \log_3 5y) (\log_3 x + \log_3 5y) (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) = -3,5 \left( \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 5y} \right)$$

⇓

$$1) \log_3 x = -\log_3 5y \quad \text{или} \quad (\log_3 x - \log_3 5y) (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) = \frac{-3,5}{\log_3 x \cdot \log_3 5y}$$

$$x = \frac{1}{5y}$$

$$\boxed{xy = \frac{1}{5}}$$

$$\log_3 \frac{x}{5y} \cdot (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) = \frac{-3,5}{\log_3^2 x - \log_3 5y}$$

$$* \log_a b \cdot \log_a c = \log_a b \cdot \log_b c = \frac{\log_a b \cdot \log_a c}{\log_b a}$$

$$\frac{(\log_3 x - \log_3 5y) (\log_3^2 x + \log_3^2 5y)}{\log_3 x \cdot \log_3 5y} = \frac{-3,5}{\log_3 x - \log_3 5y}$$

Пусть  $\log_3 x = a$ ,  $\log_3 5y = b$

$$(a - b) (a^2 + b^2) = \frac{-3,5}{ab} \Leftrightarrow ab \cdot (a - b) (a^2 + b^2) = -3,5$$

Здесь не может быть 0.

$ab$   
 $a - b$      $a^2 + b^2$   
 0 умножить  
 3 равно

Ответ:  $\frac{1}{5}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

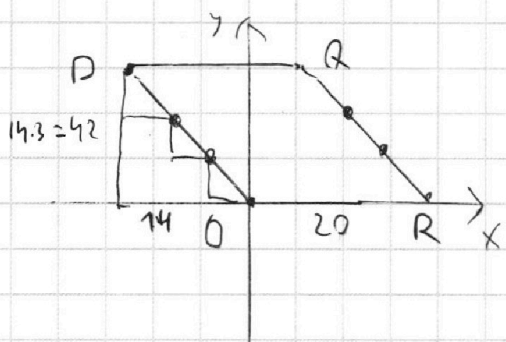
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~ 5



~~1) Углом / или по начальной точке / на 3 / ВПРАВО.~~

(1)  $3(x_2 - x_1) = 33 - (y_2 - y_1)$

~~Или  $x_2 - x_1 = a; y_2 - y_1 = b$~~

~~$3a = 33 - b$~~

~~$b = 3(11 - a)$~~

~~1)  $a = 0: b = 33$~~

~~2)  $a = 1: b = 30$~~

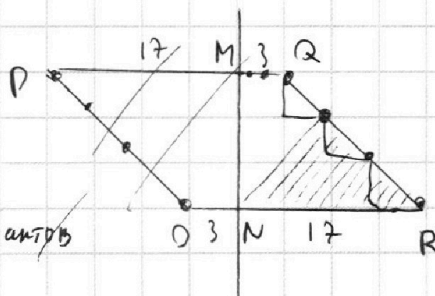
~~...~~

~~ii)  $a = 11; b = 0$~~

~~1)  $x_1 = x_2, y_2 = 33 - y_1$~~

~~2)  $x_2 = x_1 - 1, y_2 = 30 - y_1$~~

Всего 12 вариантов



$2 + 4 + 16 = 22$

(2) ИОБ ( $14; 42 = 14$ ) на  $PO$  4 цел. точки.

Рассмотрим  $MNQR$ :

на  $NR$  лежит 17, на  $QR$  4; на  $MQ$  2  $\Rightarrow$  всего 22

Аналогично в симметричном  $PMNO$  точек 22.

Итого 44 на ИОБ-ти + 2 на  $MN$







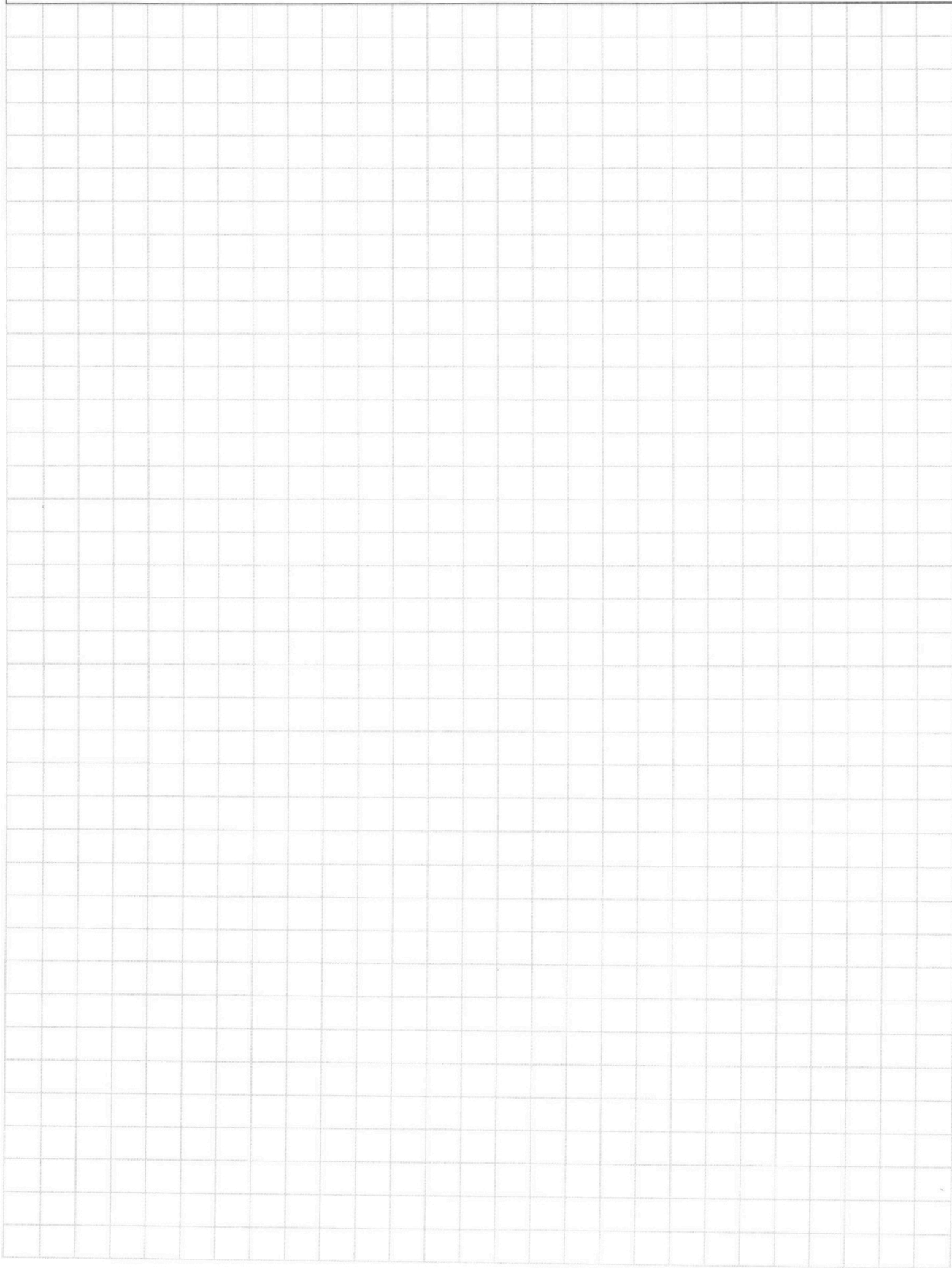
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3 x - \log_3 sy) (\log_3^2 x + \log_3^2 sy) = \frac{-3,5}{\log_3 x - \log_3 sy} \quad |$$

$$\log_3^2 x - \log_3^2 sy + \log_3 x sy - \log_3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МОФИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y = k_1 x + c$$

$$(k_1 x + c)^2 + x^2 = 9$$

$$(k_1 x + c)^2 = 9 - x^2$$

$$8 + 14 \cdot 4 - 22b + 14b$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$y = k_1 x + c$$

$$\sqrt{9 - x^2} = k_1 x + c$$

$$9 - x^2 = k_1^2 x^2 + c^2 + 2k_1 x c$$

$$x^2 \cdot (k_1^2 + 1) + 2k_1 c \cdot x + c^2 - 9 = 0$$

$$D = 4k_1^2 c^2 - 4(c^2 - 9)(k_1^2 + 1) = 4k_1^2 c^2 - 4(k_1^2 c^2 - 4k_1 c + c^2 - 9)$$

$$4k_1^2 c^2 - 4k_1^2 c^2 + 32k_1 c - 4c^2 + 36 = 36(k_1 + 1) - 4c^2 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 + 1 = \frac{c^2}{9}$$

$$36k_1 + 36 - 4c^2 = 0$$

$$9k_1 + 9 - c^2 = 0$$

$$k_1 = \frac{c^2 - 9}{9}$$

$$16 - 48xy - 122x^2 - 4y^2 = 0$$

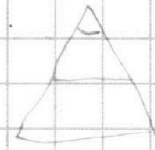
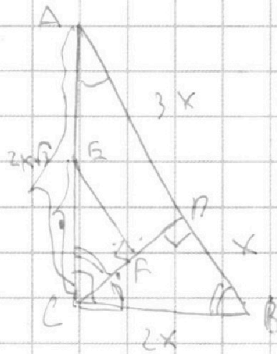
$$144 - 128 =$$

$$16$$

$$81 \cdot 4 - 12 \cdot 16 + 32 - 4 =$$

$$= 324 - 216 + 32 - 4$$

$$81 \cdot 25 - 24 \cdot 9 \cdot 5 + 32 \cdot 4 - 4 = 0$$



$$\frac{CF}{CE} = \frac{x\sqrt{3}}{2x\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CP}{CA} \Rightarrow 10 \Rightarrow$$

$$\frac{CF}{CP} = \frac{CE}{AC} = x$$

$\frac{1}{2} \cdot 10$   
 $2x + 2y = 2x + 1 + 2y$

$y = \sqrt{9 - x^2}$

$y^2 = \frac{1}{2}(9 - x^2) \cdot 2x$   
 $\frac{1}{2}(9 - x^2) \cdot 2x$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 18 \\ \hline 12 \\ \times 36 \\ \hline 18 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 7 \\ \hline 147 \end{array}$$

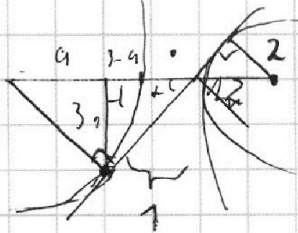
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x_0^2 + y_0^2 = 4$$

$$y - 12x + 32 = 0$$

$$12x = 32 + y$$

$$12x = 41$$

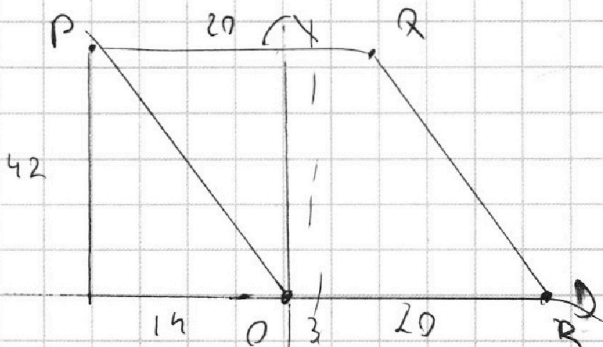
$$x = \frac{41}{12}$$

$\frac{1}{2}$

$\frac{y_0}{x_0}$

$$k_y(30-41) = 2k_y +$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 4$$



$$3(x_2 - 3) = (3(x_1 - 3))$$

$$\begin{matrix} 33 \\ 42 \end{matrix}$$

$11 \rightarrow$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$(x-b)^2 + y^2 = 2^2$$

$$9 - 12x + 32 = 0$$

$$12x = 41$$

$$x = \frac{41}{12} = \frac{36+5}{12}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 4$$

$$y = kx + c$$

$$y = k_1 x + c$$

$$3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$$

$$3(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 33$$

$$3a + b = 33$$

$$3a + b = 33$$

$$b = 33 - 3a$$

$$b = 3(11 - a)$$

$$b = 33$$

$$\begin{matrix} a=0 \\ b=33 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a=1 \\ b=30 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a=2 \\ b=27 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a=3 \\ b=24 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a=4 \\ b=21 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a=5 \\ b=18 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a=6 \\ b=15 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a=7 \\ b=12 \end{matrix}$$

$$9a^2 + 9 = b$$

$$4 - 12ac - 36a^2 - c^2 = 0$$

$$36a^2 + 12ac + c^2 - 4 = 0$$

$$9a^2 + 162a^2 + 81 + 108a^3 + 108a + 36a^2 - 4$$

275

216-27=189

11

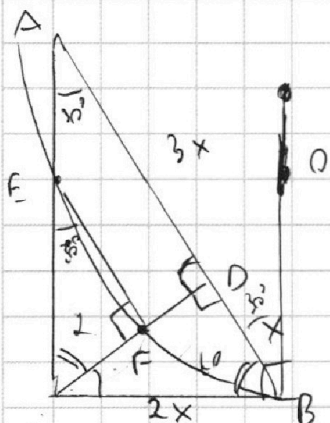
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = \frac{x\sqrt{3} \cdot 4x}{2} = \frac{2x^2\sqrt{3}}{2} = 2x^2$$

$$S_{ADC} = \frac{x\sqrt{3} \cdot 3x}{2} = \frac{x^2\sqrt{3} \cdot 3}{2}$$

$$S_{DEF} = \frac{CF \cdot FE}{2} = k \cdot x^2\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{CF}{FC}$$

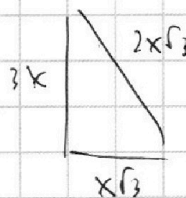
$$\cos \beta = \frac{x}{CB}$$

$$\frac{x}{CB} = \frac{CF}{FE} = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{x}{CB} = \frac{x\sqrt{3}}{2x\sqrt{3}} \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{2}$$

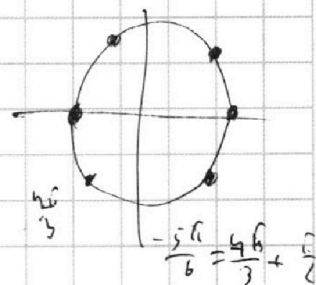
$$\frac{x}{CB} = \frac{1}{2} \quad (CB = 2x \Rightarrow) \quad \Delta C$$

o ADa:



$$9x^2 + 3x^2 =$$

$$12x^2 = 2 \cdot 2x\sqrt{3}$$



$$\arcsin a = \arccos \cos a = \frac{\pi}{2}$$

$$5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{5\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow -5\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$$

$$x = 5 \arcsin(\cos x) - \frac{\pi}{2}$$

$$-3\pi \leq x \leq 2\pi \quad \frac{5\pi}{6} = 5$$

$$x = 5 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) - \frac{\pi}{2} = 2\pi - \arccos(\cos x) = \frac{2\pi - 1}{1}$$

$$x = 5 \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos x) \right) - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} - 5x - \frac{\pi}{2} = 2\pi - x + 10$$

$$x = 2\pi - 5x + 10$$

$$2x = 2\pi + 10$$

$$x = \pi + 5$$

$$6x = 2\pi + 10n$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2}$$

$$-3\pi \quad -2\pi - \pi \Rightarrow \pi, \pi$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{3}$$

$$5 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4} = \frac{5\pi}{6}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 12x + 37) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1) \\ 1) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad x^2 + y^2 &= 4 & \text{или} & \quad x^2 - 12x + 36 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 &= 3^2 & & \quad (x-6)^2 + y^2 = 2^2 \\ & & & \quad \underline{(x-6)^2 + y^2 = 2^2} \end{aligned}$$

2)  $ax + 2y = 3b$

$$2y = 3b - ax$$

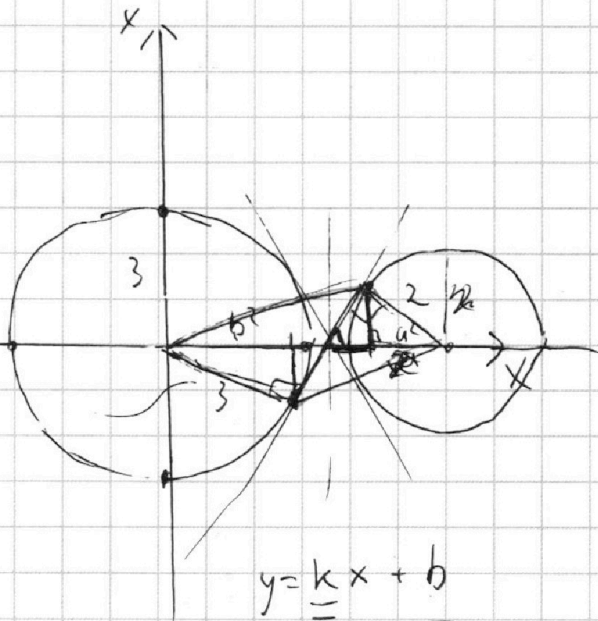
$$y = \frac{3b - ax}{2}$$

↳ периметр высоты

$$y = \frac{3b}{2} - \frac{ax}{2}$$

$$y = c - ax$$

$a \cdot x = 2$



$$ax = c - y$$

$$x = \frac{c - y}{a}$$

$$\frac{(c - y)^2}{a^2} + y^2 = 4$$

$$c^2 - 2cy + y^2 - c^2$$

$$y^2 - y^2 - 12y + 36 = 5$$

$$12y + 36 = 5$$

$$12y = -31$$

$$b = -\frac{31}{12}$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$2x + 2y = 0$$

$$x = -y$$

$$4 - a = a^2 \cdot x$$

$$x = \frac{4 - a}{a^2}$$

$$b = \frac{\sqrt{4-a} \cdot \sqrt{a^2}}{a \cdot a - \sqrt{4-a}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$abc = 2^{11} \cdot 3^{11} \cdot 5^{22}$$

$$x + y \geq 10$$

$$y + z \geq 13$$

$$x + z \geq 30$$

$$\min(x+y+z)$$

$$270 \leq 40$$

$$x \cdot 3 = \frac{z}{5}$$

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \\ z = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_2 + x_3 \geq 14 \\ x_1 + x_3 \geq 19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_2 + y_3 \geq 13 \\ y_3 + y_1 \geq 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 \geq 10 \\ z_2 + z_3 \geq 13 \\ z_1 + z_3 \geq 10 \end{cases}$$

$$\min(x+y+z)$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 42$$

$$2(y_1 + y_2 + y_3) \geq 41$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 21$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \geq 20.5$$

$$x_i = 1$$

$$x_i = 2$$

$$x_i = 14$$

$$z$$

$$\frac{z}{5} + 11$$

$$z - 5 = 11z - 25$$

$$z - 25 = 11z - 25$$

$$1 + 2 = \frac{z}{5} + \frac{z}{5} = \frac{z}{2.5} + \frac{z}{2.5}$$

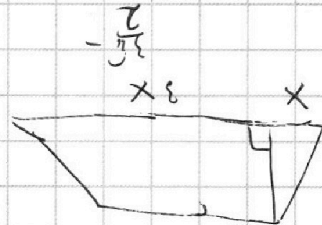
$$31 + \frac{9}{2.5} = \frac{z}{2.5}$$

$$\frac{z}{2.5} = \frac{z}{2.5}$$

$$= \frac{z}{2.5}$$

$$\frac{z}{2.5} - \frac{z}{2.5} = \frac{z}{2.5}$$

$$\frac{z}{2.5} + \frac{z}{2.5} = \frac{z}{1.25}$$



$$2x_1 + 2x_2 = \frac{z}{2.5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3z}{10} = \frac{z}{3.33}$$

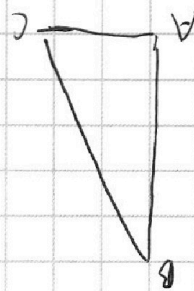
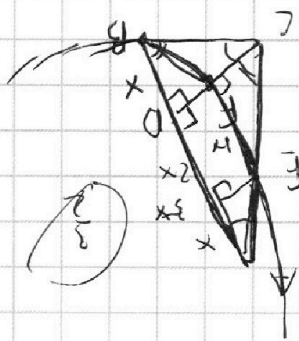
$$\frac{z}{2.5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{z}{3.33}$$

$$CF \cdot h = 4 \cdot \frac{z}{2}$$

$$S_{ABC} = (3x + x) \cdot h = 2x \cdot h$$

$$S_{DEF} = EF \cdot h$$

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

a; b; c

$$14 + 9 + 14 = 42$$

$$ab : 2^9 \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$$

$$a = 2^{x_1} \cdot 3^{y_1} \cdot 5^{z_1}$$

$$10 + 13 + 18 = 41$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{13} \cdot 5^{13}$$

$$b = 2^{x_2} \cdot 3^{y_2} \cdot 5^{z_2}$$

$$= 23 + 12 = 41$$

$$ac : 2^{19} \cdot 3^{13} \cdot 5^{30}$$

$$c = 2^{x_3} \cdot 3^{y_3} \cdot 5^{z_3}$$

$$10 + 13 + 30 = 53$$

$$ab = 2^{x_1+x_2} \cdot 3^{y_1+y_2} \cdot 5^{z_1+z_2} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 = 9$$

$$x_1 + x_3 = 19$$

$$y_1 + y_2 = 10$$

$$y_1 + y_3 = 18$$

$$z_1 + z_2 = 10$$

$$z_1 + z_3 = 30$$

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 42$$

$$x_2 + x_3 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 21$$

$$y_2 + y_3 = 13$$

$$z_1 + z_2 \geq 30$$

$$\begin{cases} x_3 = 12 \\ x_1 = 7 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$z_2 + z_3 = 13$$

$$z_1 + z_2 \geq 10$$

$$z_2 + z_3 \geq 13$$

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = 41$$

$$2(z_1 + z_2 + z_3) = 33$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 21$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 30$$

$$\begin{cases} y_3 = 11 \\ y_1 = 7 \\ y_2 = 6 \end{cases}$$

$$z_3 = 20$$

$$z_2 = 13$$

$$z_1 = 0$$

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 13 \\ z_3 = 1 \end{cases}$$

$$abc = 2^{(x_1+x_2+x_3)} \cdot 3^{(y_1+y_2+y_3)} \cdot 5^{(z_1+z_2+z_3)} =$$

$$2(21 + 21 + 30) = 53$$

$$60 + 2 \cdot 23 = 53$$

$$= 2^{21} \cdot 3^{21} \cdot 5^{21}$$

$$2(z_1 + z_2 + z_3) \geq 53$$

$$z_3 = 13$$

$$z_2 = 10$$

$$z_1 + z_2 + z_3 \geq 21$$

$$30$$

\*

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~5

243

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 - \frac{5}{2} \log_x 3 = \log_3^4 sy + 2 \log_{sy} 3 - \frac{11}{2} \log_{sy} 3$$

$$\log_3^4 x + 3,5 \log_x 3 = \log_3^4 sy + 3,5 \log_{sy} 3$$

$$\log_3^4 x - \log_3^4 sy = 3,5 (\log_x 3 + \log_{sy} 3)$$

$$(\log_3^2 x - \log_3^2 sy) / (\log_3^2 x + \log_3^2 sy) = -3,5 \cdot \left( \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_3 sy} \right)$$

Пусть  $\log_3 x = a$ ;  $\log_3 sy = b$ :

$$\log_3^3$$

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = -3,5 \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = -3,5 + \frac{(a+b)}{ab}$$

$$a = -b$$

$$(a-b)(a^2+b^2) = -3,5$$

$$a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 = -3,5$$

$$\log_3 x = -\log_3 sy$$

$$x = sy \quad x = \frac{1}{sy} = 0$$

$$(\log_3 x - \log_3 sy) (\log_3^2 x + \log_3^2 sy) = -3,5$$

$$xy = \frac{1}{5}$$

$$x > sy \Rightarrow \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$x < sy$$

$$\log_a b \cdot \log_b a + \log_a c + \log_c a$$

$$\log_3^3 x - \log_3 sy \cdot \log_3^2 x + \log_3^3 sy - \log_3^2 sy \cdot \log_3 x \quad \log_a \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{\log_c b}$$

$4 - 12 \cdot K_1 \cdot \sqrt{4K_1^2 - 4} - 120K_1^2 - 30K_1^2 - 36 = 164K_1^2 + 70K_1 \cdot \sqrt{K_1 - 1}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_3 x - \log_3 5y) (\log_3^2 x + \log_3^2 5y) = -3,5$$

$$(\log_3 x - \log_3 5y)^2 - (2 \log_3 x \cdot \log_3 5y)$$

$$\log_3 \frac{x}{5y} \cdot \log_3^2 x 5y - \log_3 \frac{x}{5y} \cdot 2 \cdot \log_3 x \cdot \log_3 5y = -3,5$$

$$3a + b = 33$$

$$b = 3(11 - a)$$

$$3,5 \log_3 x^3$$

$$y \leq \frac{14}{3} x$$

$$5 \leq \frac{14}{3} \cdot 2 = \frac{28}{3} \Rightarrow 5 \leq \frac{14}{3}$$

$$\log_a b \cdot \log_a c$$

$$-3,5 \log_3 5y^3$$

$$\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} b$$

$$\log_{\frac{1}{a}} a$$

$$\log_{ab} \cdot \log_{\frac{1}{ab}} c$$

$$2^x \cdot 2^y$$

$$\begin{array}{r} 486 \\ + 43 \\ \hline 529 \end{array}$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$\frac{1}{\log}$$

$$2^x = a$$

$$2^y = b$$

$$\frac{\log_a b \cdot \log_b c}{\log_b a}$$

$$\log_a^2 b \cdot \log_b c$$

$$\log_a b \cdot \log_a c = \log_a b \cdot \frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a^2 b \cdot \log_b c$$

$$(a-b)(a^2+b^2) = -\frac{3,5}{ab}$$

причб

$$a+b = m$$

$$ab = n$$

$$y = -\frac{1}{14}$$

а

$$y = \frac{14}{3} x$$

$$\sqrt{m^2+4n} (m^2-2n) = -\frac{3,5}{n}$$

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4n$$

$$a-b = \sqrt{m^2+4n}$$

$$y = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

$$(m^2-4n)(m^2-4n) = \frac{3,5^2}{n^2}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \times 2 \\ \hline 486 \end{array}$$

}=

$$x=2$$

$$y=5$$