МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4 (0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3} \left(11^{-13}\right) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

№1

Произведение чисел ab, bc и ac равно:

$(ab \cdot bc \cdot ac) = a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$ и оно точно делится на произведение того, на что делятся числа ab, bc и ac.

$(abc)^2 \vdots\ 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \cdot 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \cdot 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$

Тогда $\min(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52}$, но в квадратах степени ~~всех~~ натуральных чисел степени простых множителей обязательно четные, значит в $(abc)^2$ не может входить 3 в 59 степени, но т.к. оно должно на него поделиться 3 в нем как минимум в 60 степени, значит $\min(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{60} \cdot 5^{52}$, а $\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

~~Достигается, например, при $a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$, $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^6$, $c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$~~

Но $ac \vdots 5^{28}$, значит в abc 5 тоже входит минимум в 28 степени

т.е. $\min(abc) = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$, достигается при

$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot$

$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

Тогда по теореме Пифагора в $\triangle ACD$:

$$(2x)^2 + (\sqrt{10}x - \sqrt{14}t)^2 = (\sqrt{14}x - 7t)^2$$

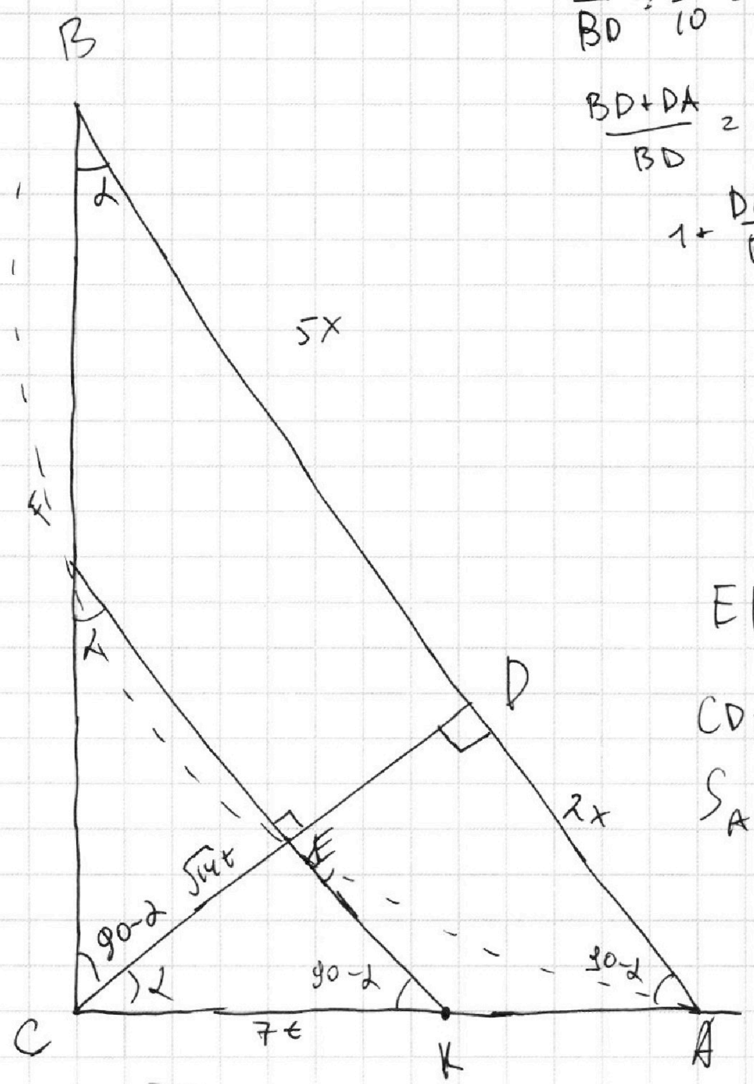
t выражается через x, ~~а~~ потом площадь и всё находится

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\frac{AB}{BD} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

$\frac{BD+DA}{BD} = \frac{7}{5}$

$1 + \frac{DA}{BD} = \frac{7}{5}$

$\frac{DA}{BD} = \frac{2}{5}$

$DA = 2x$

$BD = 5x$

$EF \parallel AB \Rightarrow CD \perp EF$

$CD = \sqrt{BD \cdot AD} = \sqrt{10}\,x$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD =$
$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \sqrt{10}\,x =$
$= \sqrt{10}\,x^2$

Продлим FE до пересечения с AC, ~~на~~ полученная точка – K

По теореме о касательной и секущей:

~~AK~~ $AK^2 = KE \cdot KF$ поделим эти равенства:

$CE^2 = KE \cdot EF$ (из прямоугольного $\triangle CFK$)

$\frac{AK^2}{CE^2} = \frac{KF}{EF} = \frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$ (т.к. $\triangle ABC \sim \triangle CFK$ ($FK \parallel AB$))

$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{10x^2 + 4x^2} = \sqrt{14}\cdot x$, $\frac{CK}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{\sqrt{14}}$

$CK = 7t$

$CE = \sqrt{14}\,t$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3

$\arccos(y)$ принимает значения от 0 до π, следовательно $10\arccos(\sin x)$ принимает значения от 0 до 10π. Значит и правая часть должна быть от 0 до 10π:

$0 \le 8\pi - 2x \le 10\pi$; $-8\pi \le -2x \le \pi$; $4{,}5\pi \ge x \ge -\frac{\pi}{2}$.

Зная что $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ преобразуем ур-ие:

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) = 8\pi - 2x$; $5\pi - 10\arcsin(\sin x) = 8\pi - 2x$

$10\arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$

1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тогда $\arcsin(\sin x) = x$;

$10x = 2x - 4\pi$

$8x = -4\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}$ ✓

2) $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, тогда $\arcsin(\sin x) = \pi - x$

$10(\pi - x) = 2x - 4\pi$

$10\pi - 10x = 2x - 4\pi$

$12x = 14\pi$

$x = \frac{7\pi}{6}$ ✓

3) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; тогда $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$

$10(x - 2\pi) = 2x - 4\pi$

$8x = 16\pi$

$x = 2\pi$ ✓

4) $x \in \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right)$; тогда $\arcsin(\sin x) = 3\pi - x$

$10(3\pi - x) = 2x - 4\pi$

$12x = 34\pi$

$x = \frac{17\pi}{6}$ ✓

5) $x \in \left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$, тогда $\arcsin(\sin x) = x - 4\pi$

$10(x - 4\pi) = 2x - 4\pi$

$x = \frac{9\pi}{2}$ ✓

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi, \frac{17\pi}{6}, \frac{9\pi}{2}$.

Продолжение №4 (2)

Первое ур-ие задает прямую, которая может иметь с окружностью максимум 2 точки пересечения. Значит прямая должна пересечь обе окружности. Преобразуем 1 ур-ие:

$6ay = b - 5x$

при $a=0$ ур-ие задает ~~горизонтальную~~ вертикальную прямую которая ~~не~~ может пересечь ~~есть~~ ~~в~~ обе окружности (при $a=0$, например). При $a \neq 0$:

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$. Для всех таких a, при которых ~~[illegible]~~ не существует b, при которых прямая ~~а~~ является ~~[illegible]~~ одной из касательных $*1$, $*2$ или прямой между окружностей, не имеющих общих точек, ~~по~~найдется b, что прямая пересечет обе окружности. Найдем такие c, что прямая $y = cx + d$ ~~[illegible]~~ являлся касательной к обоим окружностям

$x^2 + (cx+d)^2 = 25$ должно иметь 1 решение

$x^2 + c^2x^2 + 2cxd + d^2 = 25$

$(c^2+1)x^2 + 2cdx + d^2 - 25 = 0$

$\frac{D}{4} = c^2d^2 - (c^2+1)(d^2-25) = 0$

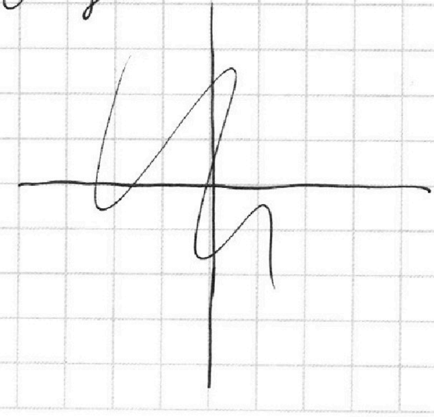
$x^2 + (cx+d+9)^2 = 4$ должно иметь 1 решение

$x^2 + c^2x^2 + d^2 + 81 + 2cxd + 18cx + 18d = 4$

$(c^2+1)x^2 + (2cd + 18c)x + d^2 + 18d + 77 = 0$

$\frac{D}{4} = (cd+9c)^2 - (c^2+1)(d^2+18d+77) = 0$

Найдем такие c геометрически:



См. сл. лист

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4 (1)

$$\begin{cases} 5x+6ay-b=0 \\ (x^2+y^2-25)(x^2+y^2+18y+77)=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x+6ay-b=0 \ (1) \\ x^2+y^2=25 \ (2) \\ x^2+y^2+18y+77=0 \ (3) \end{array}\right.$$

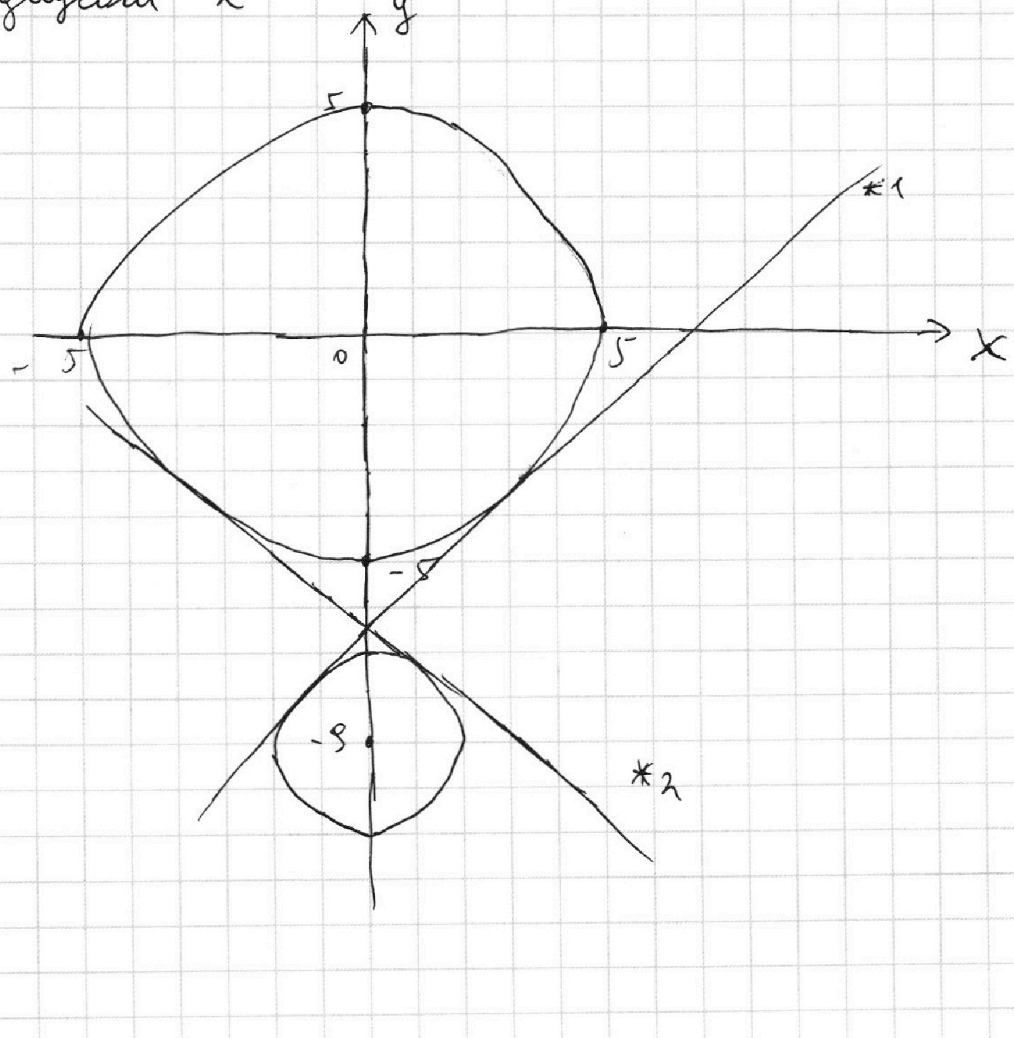
(3): $x^2+y^2+18y+77=0$

$x^2+y^2+18y+81=4$

$x^2+(y+9)^2=\cancel{2}\,4$

(2) - окружность с центром в точке (0;0) и радиусом 5

(3) - окружность с центром в точке (0;-9) и радиусом 2

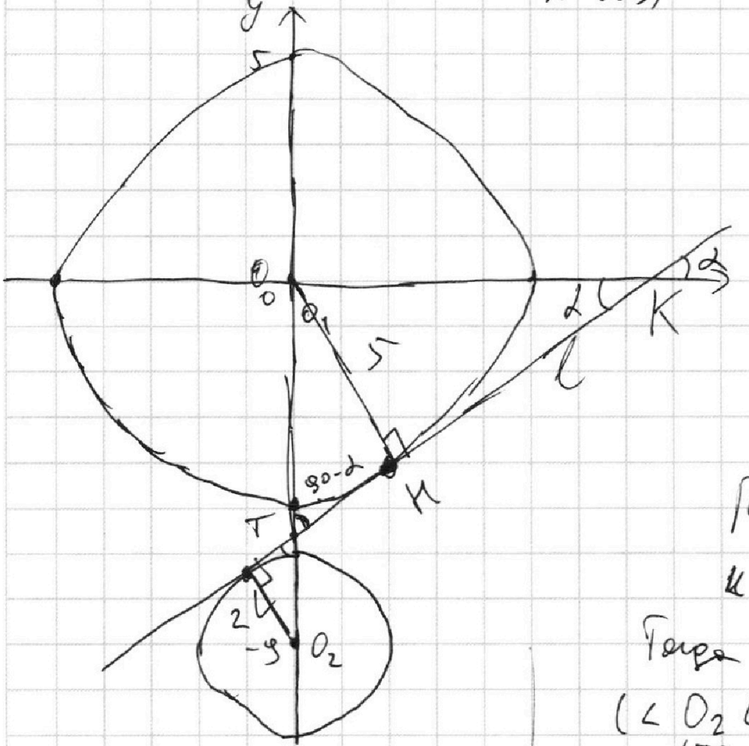


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 4(3)



l - общая касат.

L и H - точки касания

центр 1 окружности O_1, 2 окружности O_2

$O_2L \perp l$, $O_1H \perp l$

$\Downarrow$

$O_2L \parallel O_1H$

Пусть точка пересечения l с осью x = T

Тогда $\triangle O_2LT \sim \triangle O_1TH$

($\angle O_2LT = 90^\circ$, $\angle THO_1 = 90^\circ$, $\angle LTO_2 = \angle O_1TH$ (вертикальные)

$O_1O_2 = 9$, Пусть $O_1T = x$, тогда $O_2T = 9 - x$. ~~Ав~~ ~~тогда~~ $O_2T = 2$ (радиус)

$O_1H = 5$ (радиус)

По подобию:

$\frac{5}{2} = \frac{x}{9-x}$; $-5x + 45 = 2x$

$x = \frac{45}{7}$

$tg\,\alpha = c$, тогда $\angle O_1KT = \alpha$ (верт.), $\angle O_1TH = 90 - \alpha$

$tg\,\alpha = ctg(90 - \alpha)$, значит ищем $ctg(O_1TH)$

~~Из~~ по т. Пифагора в O_1TH:

$TH^2 = O_1T^2 - OH^2 = \frac{45^2}{49} - 25 = \frac{45^2 - 25\cdot 49}{49} = \frac{25\cdot 81 - 25\cdot 49}{49} = \frac{25\cdot 32}{49}$

$TH = \frac{20\sqrt{2}}{7}$, $ctg\ O_1TH = \frac{20\sqrt{2}}{7} : 5 = \frac{4\sqrt{2}}{7}$

~~Аналогично найдем угол наклона прямой~~ ~~$*_2$~~ Очевидно, в силу симметрии ~~от. от. тон~~ картинки относительно оси y, прямая $*_2$ имеет угол наклона $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

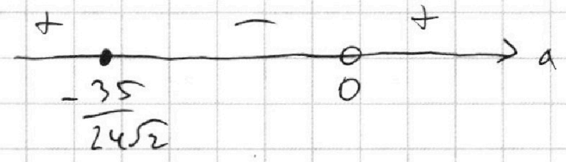
№4(4)

Значит нам подходят все ~~[illegible]~~ a,
кроме $-\frac{4\sqrt{2}}{7} \le -\frac{5}{6a} \le \frac{4\sqrt{2}}{7}$; $-4\sqrt{2} \le -\frac{35}{6a} \le 4\sqrt{2}$

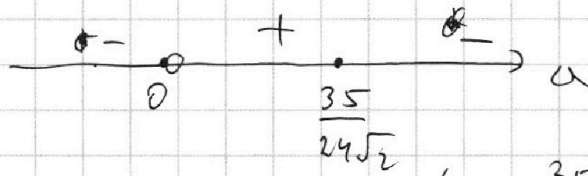
$-24\sqrt{2} \le -\frac{35}{a} \le 24\sqrt{2}$

$$\begin{cases} -\frac{35}{a} \le 24\sqrt{2} \\ -\frac{35}{a} \ge -24\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{35}{a} \ge -24\sqrt{2} \\ \frac{35}{a} \le 24\sqrt{2} \end{cases}; \quad \frac{35+24\sqrt{2}a}{a} \ge 0 \ (4), \quad \frac{35-24\sqrt{2}a}{a} \le 0 \ (5)$$

(4):



(5):



~~Общее решение $[0; \frac{35}{24\sqrt{2}}]$, $a \ne 0$ помним~~
~~Итого нам подходит все кроме этого т.е.~~
~~Ответ: $(-\infty; 0) \cup (\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty)$~~

Общее решение: $(-\infty; -\frac{35}{24\sqrt{2}}] \cup [\frac{35}{24\sqrt{2}}; +\infty)$

Подходит все кроме этого ~~[illegible]~~.

Ответ: ~~$(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; 0) \cup (0; \frac{35}{24\sqrt{2}})$~~.
$\left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5(2)

Значит возможно только $xt=1$, т.е. $xy=2$

Нетрудно видеть, что при $xt=1$ ~~...~~, $t=\frac{1}{x}$

(2) превращается ~~...~~ $\log_{11}^4\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{16}{3}\log_{\frac{1}{x}}(11)-5$,

$$\log_{11}^4\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{16}{3}\log_x 11-5$$

при этом (1) $\to$ $\log_{11}^4(x)=\frac{16}{3}\log_x 11-5$

т.е. $\log_{11}^4(x)=\log_{11}^4\left(\frac{1}{x}\right)$, откуда

$\left[\begin{array}{l}\log_{11}x=\log_{11}\left(\frac{1}{x}\right)\to \text{имеет только решения } x=\pm1, \text{ которые не удовл.}\\ \log_{11}x=-\log_{11}\left(\frac{1}{x}\right)\to\log_{11}x=\log_{11}x \text{ верно}\end{array}\right.$

~~...~~ при любых $x>0$ ~~...~~.

Значит xt действительно может быть равно 1 и ничему больше

Ответ: 2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5(1)

Первое равенство: $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \frac{1}{3}\log_x\left(\frac{1}{121}\right)^{11^{-2}} - 5$

$\log_{11}^4 x = 6\log_x 11 - \frac{2}{3}\log_x 11 - 5$

$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3}\log_x 11 - 5$ (1)

Второе равенство $(0{,}5y = t)$: $\log_{11}^4 t + \log_t 11 = \log_{t^3}(11^{-13}) - 5$

$\log_{11}^4 t = -\frac{13}{3}\log_t 11 - \log_t 11 - 5$

$\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3}\log_t 11 - 5$ (2)

Из (1): левая часть >0
($=0$ при $x=1$, но при $x=1$ $\log_x 11$ не определен)

Тогда правая тоже должна быть больше нуля

тогда $\log_x 11$ обязательно >0

Из (2): левая часть >0 ($=0$ при $t=1$, но при $t=1$ $\log_t 11$ не определен). Тогда правая часть тоже >0, тогда $-\frac{16}{3}\log_t 11 > 0$

$\log_t 11 < 0$

Сделаем замены

$a = \log_{11} x > 0$

$b = \log_{11} t < 0$

и вычтем из (1) (2), получим:

$a^4 - b^4 = \frac{16}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

$(a^2+b^2)(a^2-b^2) = \frac{16}{3}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = \frac{16(a+b)}{3ab}$

1) $a+b=0$; $a=-b$; $\log_{11}x + \log_{11}t = 0$ $\log_{11}(xt)=0$, $xt=1$

2) $a+b \neq 0$: $(a-b)(a^2+b^2) = \frac{16}{3ab}$ правая часть <0 т.к. a и b разных знаков

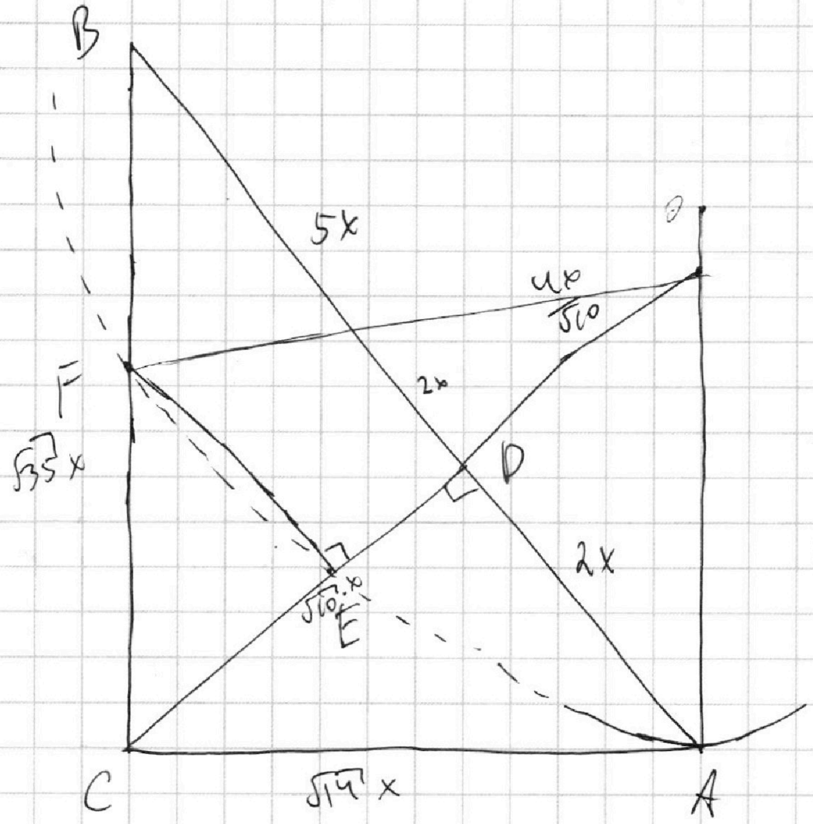
При этом $a-b>0$, т.к. $a>0$, $b<0$, a^2+b^2 тоже >0, значит такое равенство невозможно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N 82



$10x^2$

$4x^2$

$\sqrt{10x}\cdot t = 4x^2$

$\sqrt{10}t = 4x$

$t = \frac{4x}{\sqrt{10}}$

$0{,}5y = t$

$-\frac{2}{3}+6=\frac{\cancel{10}18}{3}-$ $\log_{11}^4 t + \log_t 11 = \frac{1}{3}\log_t(11^{-13}) - 5$

$\cancel{\log}$ $\log_{11}^4 t + \log_t 11 = -\frac{13}{3}\log_t 11 - 5$

$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3}\log_x 11 - 5$ $\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3}\log_t 11 - 5$

$\log_{11}^4 x + \log_{11}^4 t = -10$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \frac{1}{3}\log\frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4 x = -\frac{2}{3}\log_x 11 + 6\log_x 11 - 5$

$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3}\log_x 11 - 5$

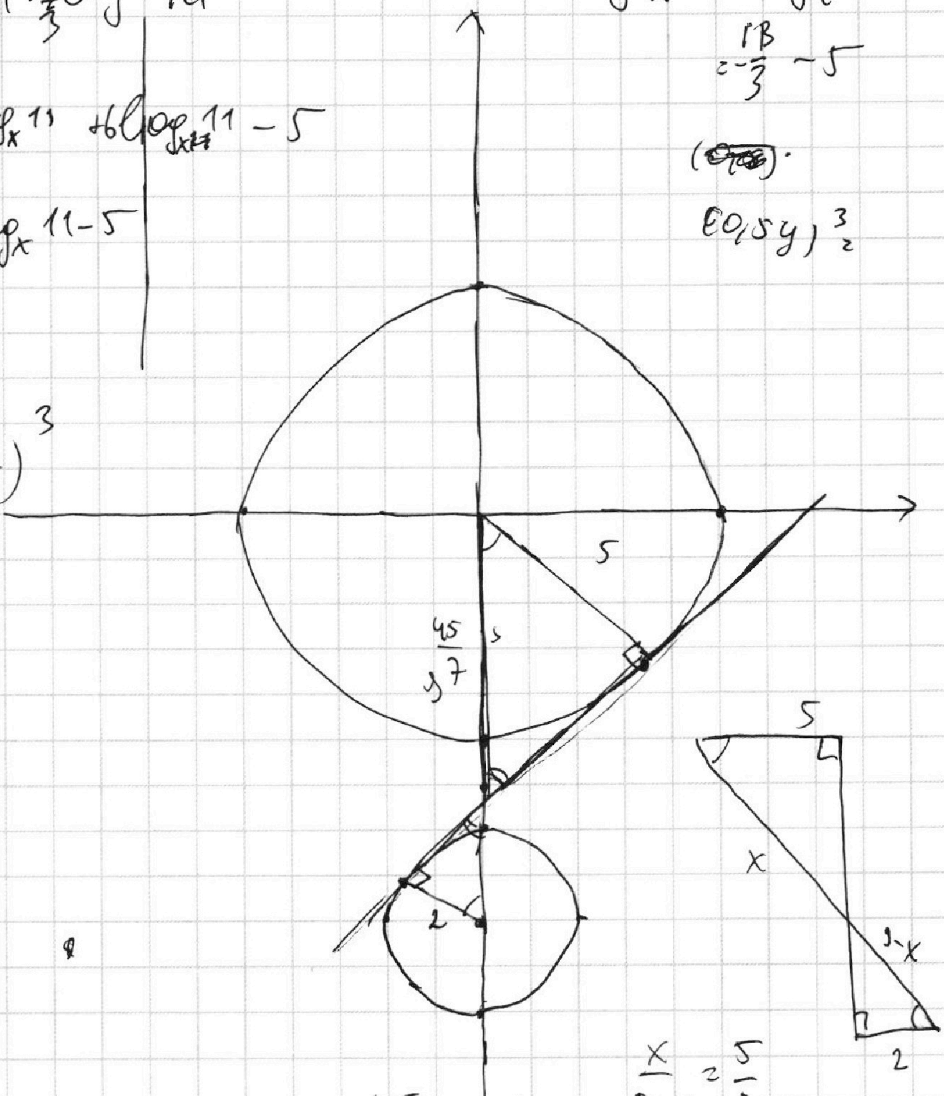
$\log_{11}^4 t + \log_t 11 =$

$= \frac{16}{3} - 5$

$(0{,}5y)^{\frac{3}{2}}$

$0{,}125 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$(0{,}5y)^3$



$\frac{45^2}{7^2}$

$y = x - \frac{45}{7}$

$x^2 + \left(x - \frac{45}{7}\right)^2 =$

$\frac{x}{9-x} = \frac{5}{2}$

$2x = -5x + 45$

$7x = 45$

$x = \frac{45}{7}$

$45 \cdot 45 = 5 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 9 = 25 \cdot 81$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_{11}^4 x - \log_{11}^4 t = \frac{16}{3}\left(\log_x 11 + \log_t 11\right) = \frac{16}{3}\left(\frac{\log_{11} x + \log_{11} t}{\log_{11} x \cdot \log_{11} t}\right)$

$a^4 - b^4 = \frac{16}{3}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

$(a^2-b^2)(a^2+b^2) = \frac{16}{3}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2) = \frac{16}{3}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$

$(a-b)(a^2+b^2) = \frac{16}{3ab}$

$\log_{11} x + \log_{11} t = 0$

$\log_{11}(xt) = 0$

$xt = 1$

$x\frac{y}{2} = 1$

$y = 2$

$\log_{11}^5 x = \frac{16}{3} - 5\log_{11} x$

$3\log_{11}^5 x + 15\log_{11} x - \cancel{\frac{16}{3}}\ 16 = 0$

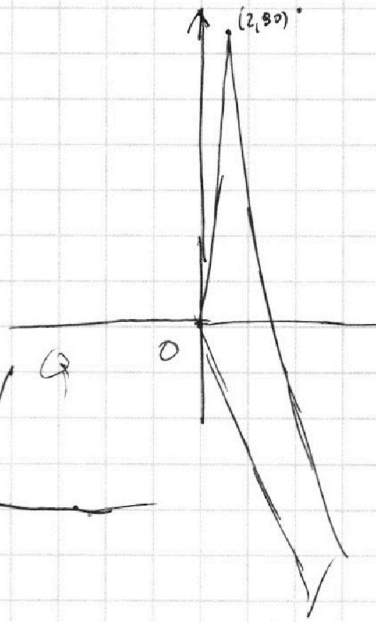
$3t^5 + 15t - 16 = 0$

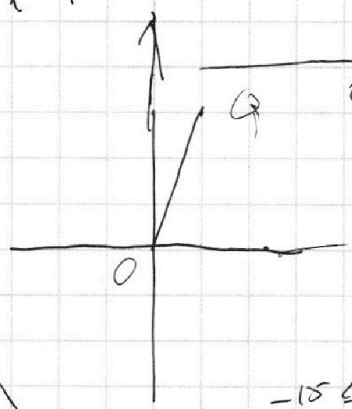
$15t^4 + 15$ $\quad x^2 + 7x + 6$ $\quad -\frac{6}{1}\ -\frac{1}{1}$

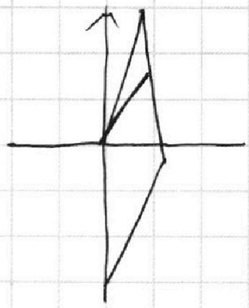
$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

$3t^5 + 15t - 16 = 0$

$\frac{2}{3}$



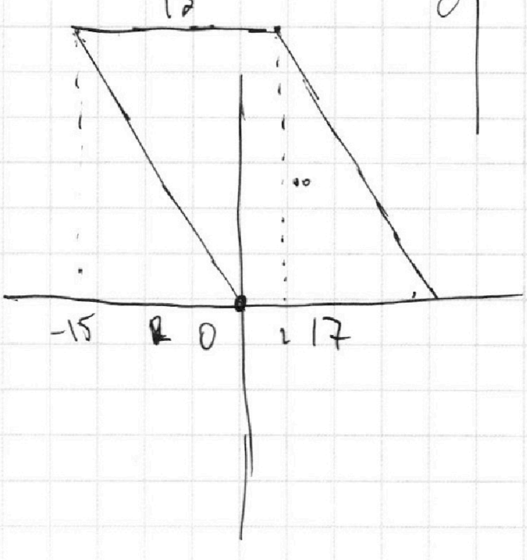




$-15 \le x_2 \le 17$

$-15 \le x_1 \le 17$

$0 \le y_1, y_2 \le 30$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

1) $\log_{11}^4 x = \frac{16}{3}\log_x 11 - 5$ $\quad$ $\cancel{y}\,t$ -? $\quad$ $t=0{,}5y$ $\quad$ $\log_x 11>0$

2) $\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3}\log_t 11 - 5$ $\quad$ $x<1$ $\quad$ $\cancel{xy=1}$ $xt=1$ $\quad$ $\log_t 11<0$

$t<1$ $\quad$ $a>0$ $\quad$ $x=\frac{1}{t}$

$x>1$ $\quad$ $b<0$

$a^4-b^4=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ $\quad$ $\cancel{x=}\ t=\frac{1}{t}$ $\quad$ $a=-b$

$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)=\frac{16(a+b)}{ab}$ $\quad$ $\log_{11} x = -\log_{11} t$

$(a-b)(a^2+b^2)=\frac{16}{ab}$ $\quad$ $xt=1$

$ab(a-b)(a^2+b^2)=16$ $\quad$ $a-b=t$ $\quad$ $x=\frac{1}{t}$

$ab=z$

$tz(t^2+2z)=16$

$z=2$

$t=1$

$tz=2$ $\quad$ $z=\frac{2}{t}$

$t^2+2z=8$ $\quad$ $\frac{4}{t^2}+\frac{4}{t}=8$ $\quad$ $\frac{2}{t}=v$

$z=\frac{2}{t}$

$v^2+2v=8$

$t^2+\frac{4}{t}=8$ $\quad$ $v^2+2v-8=0$

$v=-4$

$t^3-8t+4=0$ $\quad$ $v=2$

$tz=8$ $\quad$ $z=\frac{8}{t}$

$t^2+2z=2$

$\log_{11}^4 x = \log_{11}^4 \frac{1}{x}$

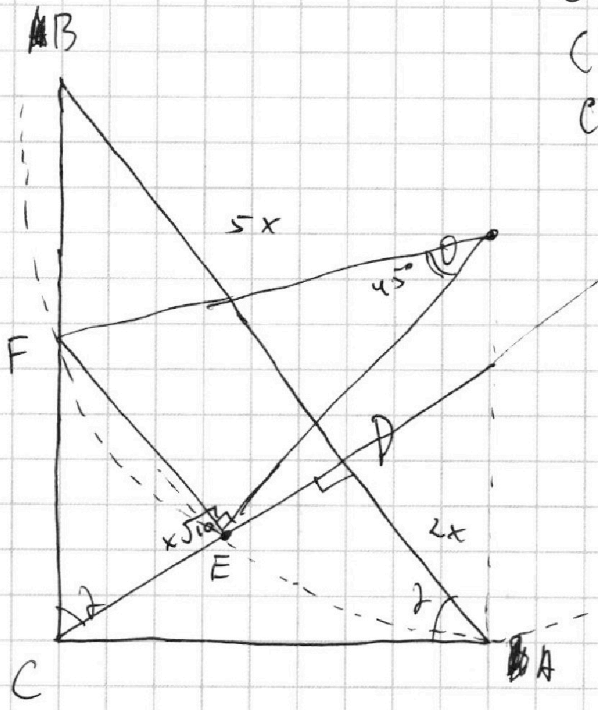
$\log_{11} x = -\log_{11}\frac{1}{x}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$CD^2 = BD \cdot DA$

$CD^2 = 10x^2$

$CD = x\sqrt{10}$

11^{-2}

$\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \frac{1}{3}\log_x \frac{1}{121} - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5$

$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3\log_{11} x} - 5$

$t^4 - \frac{6}{t} = -\frac{2}{3t} - 5$

$3t^5 - 18 = -2 - 15t$

$3t^5 + 15t - 16 = 0$

$x^2 + y^2 = 25$

$x^2 + y^2 + 18y + 77 = 0$

$x^2 + y^2 + 18y + 81 = 4$

$x^2 + (y+9)^2$

$x = \frac{b}{5}$

$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}$

$bc: 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$

$ac: 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$

$(abc)^2: 2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{62}$

$\cancel{a = 2^{18}}$

$\cancel{b = 3^{30}}$

$\cancel{c = 5^{26}}$

$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot$

$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{15}$

$abc\ 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

$a = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^{15}$

$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot$

$c = 2^{12} \cdot 3^{17} \cdot 5^{13}$

$\log_{11}^4 x = \frac{1}{3}\log(11^{-2}) - 5$

$\log_{11}^4 x = -\frac{2}{3}\log_x 11 - 5 + 6\log_x 11$

$5x + 6ay - b = 0$

$6ay = -5x + b$

$y = -\frac{5}{6}ax + \frac{b}{6a}$

$-\frac{5}{6}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$3.\ 0 \leq 8\pi - 2x \leq 10\pi$

$-8\pi \leq -2x \leq \pi$

$8\pi \geq 2x \geq \pi$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 4,5\pi$

$\arcsin(\sin 2\pi)$

$\arcsin(0) = 0$

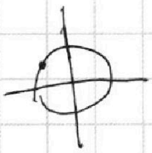
$\arcsin(\sin\frac{9\pi}{4}) =$

$= \frac{\pi}{4}$

$-\frac{1}{2}$

$-10\frac{\pi}{6} = \frac{27\pi}{6} - 4\pi$

$\frac{10\pi}{6} - \frac{24\pi}{6}$

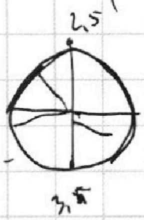


$\frac{13\pi}{4}$

$10\frac{\pi}{6} = 2x - 4\pi$

$10\frac{\pi}{6}$

$-\frac{1}{2}$



$-\frac{5\pi}{3} = \frac{17\pi}{12} - 4\pi = \frac{17\pi}{12} - \frac{48\pi}{12} = -\frac{31\pi}{12}$

1) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

$10\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin x)\right) =$

$= 5\pi - 10\arcsin(\sin x) = 9\pi - 2x$

$10\arcsin(\sin x) = 2x - 4\pi$

1) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$: $(\log_{11}^2 x - \log_{11}^2 t)(\log_{11}^2 x + \log_{11}^2 t)$

$10x = 2x - 4\pi$

$8x = -4\pi$

$x = -\frac{\pi}{2}$

2) $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$:

$10\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2x - 4\pi$

$5\pi - 10x = 2x - 4\pi$

$12x = 9\pi$

$x = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$

3) $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$

$\log_{11}^4 x - \log_{11}^4 t =$

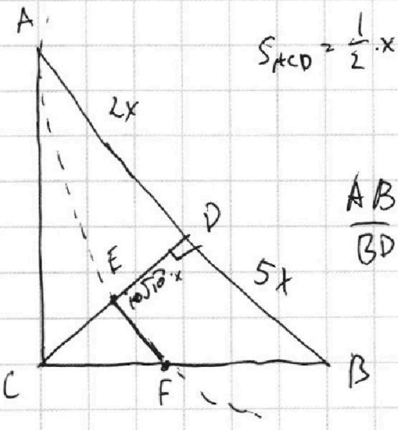
$= \frac{16}{3}(\log_x 11 + \log_t 11)$

$\frac{10\pi}{6} = \frac{34\pi}{6} - 4\pi$

$10x - 40\pi = 2x - 4\pi$

$8x = 36\pi$

$x = \frac{9\pi}{2}$



$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{10} \cdot 2x = x^2\sqrt{10}$

$= 5\pi$

$\frac{AB}{BD} = \frac{7}{5}$

$CD = x\sqrt{10}$

$t = 0,5y$

$\frac{1}{t} = x;\ x = t$

$\log_{11}^4 x = \frac{16}{3}\log_x 11 - 5$

$\log_{11}^4 t = -\frac{16}{3}\log_t 11 - 5$

$t = x = 1$