



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

^{2 1}
Перемножим ab, bc и ac и получим, что:

$$(abc)^2 : 2^{36} \cdot 3^{50} \cdot 5^{52}$$

Значит (abc) точно кратно $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$

Но $ac : 5^{28}$, значит $abc : 5^{28}$ тоже (т.к. b -кажур)
Следовательно $(abc) : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

При $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$

$$b = 2^2 \cdot 3^5$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

и при этом $ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14} : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{14}$
 $bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14} : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$
 $ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 2^{28}$

Значит $abc = 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ наш значение

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

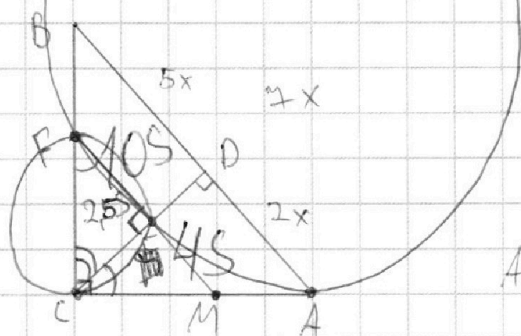
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab: 2^8 3^{13} 5^{11}$, $bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}$, $ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$
 Перемножим ab, bc и ac и получим, что

$$(abc)^2 = 2^{36} \cdot 3^{58} \cdot 5^{52}$$

Значит (abc) точно делится на ~~18~~ $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$



$$\frac{4}{2.5} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{52}{5 \cdot 2}$$

$$2600 + 200 + 4 = 2704$$

AC - общ. касательная

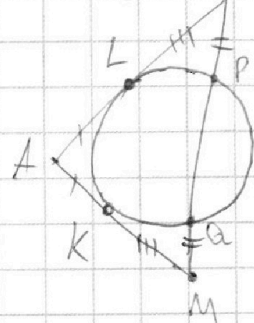
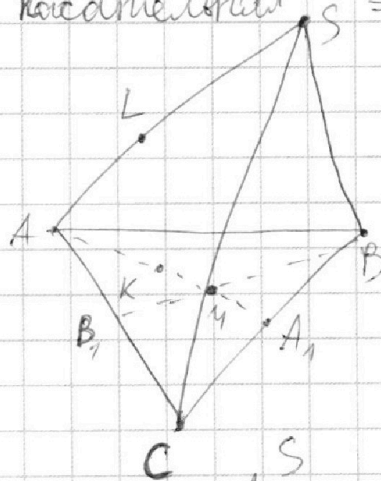
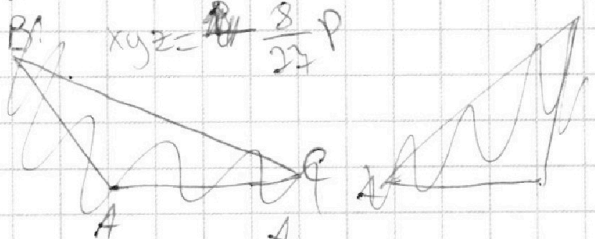
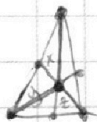
$$\frac{4}{6} - \frac{5}{3} n \leq \frac{0}{2}$$

$$\frac{4}{6} - \frac{5}{3} n \leq \frac{0}{2}$$

$$\frac{5}{3} n \geq \frac{4-24}{6} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3}$$

$$5n \geq -20 \quad n \geq -4$$

$$xyz = \frac{8}{27} p$$

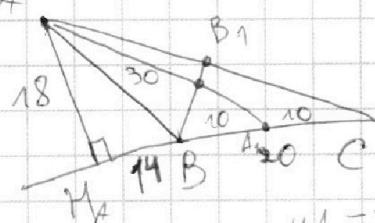
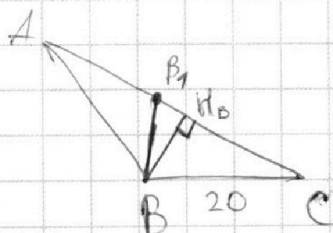


$$SP = MA$$

$$MK = LS$$

$$AS = AM$$

$$AA_1 = 30 \quad 20$$



$$H_{A_1} = 24 \Rightarrow H_B = 14 \Rightarrow H_C = 34$$

$$AC^2 = 18^2 + 34^2 = 4(9^2 + 17^2) = 4(370)$$

$$AC = 2\sqrt{370}$$

$$AB^2 = 4(9^2 + 17^2) = 4(730)$$

$$AB = 2\sqrt{730}$$

$$50 - \frac{180}{370} = \frac{50 \cdot 370 - 180 \cdot 10}{370}$$

$$180 = S = \frac{1}{2} \sqrt{370} \cdot h$$

$$h = \frac{180}{\sqrt{370}} = \frac{18\sqrt{370}}{37}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

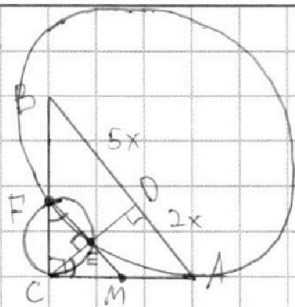
МФТИ

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~ 2



Решение:

Так как CD - высота, то $CD \perp AB$
И т.к. $AB \parallel EF$, то $EF \perp CD \Rightarrow \angle FEC = 90^\circ$
Т.к. $\triangle ABC$ - прямоугольный
 $\angle CFE = 90^\circ - \angle FCE = 90^\circ - (90^\circ - \angle DCA) = \angle DCA$

Рассмотрим окр, описанную около $\triangle CFE$
Прямая AC - касается этой окружности в т. C , так как $\angle CFE = \angle DCA$.
Значит AC - общая касательная этой окр и заданной в условии. А FE - их общая хорда \Rightarrow она же радикальная ось этих окружностей.

Значит FE пересекает AC в середине (т.к. степень точки M - середины AC равна относительно этих окр, т.к. касательные из нее равны, а рад. ось - ГМТ, степени которых равны отн двух окр.)

Значит EF - средняя линия $\triangle ABC$ (т.к. $EF \parallel AB$ и проходит через середину AC).

Следовательно $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle CEF}} = 4$.

Пусть $AB = 7x \Rightarrow BD = 5x \Rightarrow AD = 2x$

Тогда $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{5}{2} \Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{2}{5} S_{\triangle BCD}$

Значит $\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{2}{5} \frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{2}{5} \cdot 4 = \frac{8}{5}$

Ответ: $\frac{8}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

23

$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

Пусть $\arccos(\sin x) = \alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$

$$\cos \alpha = \sin x \text{ (по определению)}$$

$$\cos \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$-2 \sin\left(\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

$$1) \sin\left(\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad 2) \sin\left(\frac{\alpha + x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\alpha + x - \frac{\pi}{2}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k \text{ (подставляем в уравнение)}$$

$$10x - 5\pi + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

$$5\pi - 10x + 20\pi k = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi - 20\pi n$$

$$8x = -4\pi + 20\pi k$$

$$x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n$$

$$x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$$

Но $\alpha \in [0; \pi]$, $2x = 9\pi - 10\alpha$ (из второго ур-я). $-10\alpha \in [-10\pi; 0]$

$$-10\alpha + 9\pi \in [-\pi; 9\pi] \Rightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$$

$$1) -\frac{\pi}{2} \leq \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n \leq \frac{9\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{7}{6} - \frac{5}{3}n \leq \frac{9}{2} \quad | \cdot 6$$

$$\Rightarrow -3 \leq 7 - 10n \leq 27 \Rightarrow n \leq 1 \text{ и } n \geq -2 \Rightarrow n = -2; -1; 0; 1$$

т.к. $n \in \mathbb{Z}$

$$2) -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}k - \frac{1}{2} \leq \frac{9}{2} \quad | \cdot 2$$

т.к. $k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow -1 \leq 5k - 1 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq 5k \leq 10 \Rightarrow 0 \leq k \leq 2 \Rightarrow k = 0; 1; 2$$

ОТВЕТ: $x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n$ при $n = -2; -1; 0; 1$
 $x = \frac{5}{2}\pi k - \frac{\pi}{2}$ при $k = 0; 1; 2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

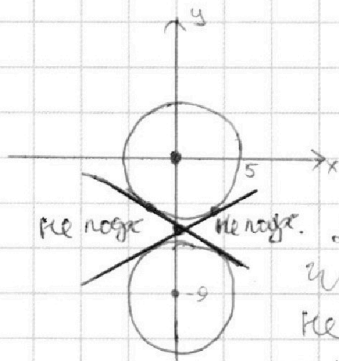


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 25) / (x^2 + y^2 + 18y + 71) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \text{ - окр с центром } (0,0) \text{ и } r = 5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 14 \text{ - окр с центром } (0,-9) \text{ и } r = \sqrt{14} < 4 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ (\Rightarrow \text{окр не перес}) \end{matrix}$$

при $a=0$: $5x=b \Rightarrow$ можно подобрать такое b , чтобы (2) имело 4 решения $\Rightarrow a=0$ подходит. При $a \neq 0$: $y = \frac{-5}{6a}x + \frac{b}{6a}$



К пологой прямой ориентирован, а уровень ее "поднятия" можно менять, изменяя b .

Проведем 2 общ. взаимн. касат. к окр. Для того чтобы сформировать прямую так, чтобы она пересекала каждую окр. в 2-х т. необходимо, чтобы ее коэф. наклона был между 2-х коэф. наклона касательных.

Пусть $\&$ касат $y = kx + L$: $\begin{cases} x^2 + (kx + L)^2 = 25 \text{ - 1 реш.} \\ x^2 + (kx + L + 9)^2 = 14 \text{ - 1 реш.} \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2/(1+k^2) + x \cdot 2kL + L^2 - 25 = 0 & D_1 = 4k^2L^2 - 4(L^2 - 25)/(k^2 + 1) = 0 \\ x^2/(1+k^2) + x \cdot 2k(L+9) + L^2 + 2L + 71 = 0 & D_2 = 4k^2(L+9)^2 - 4(k^2+1)((L+9)^2 - 14) = 0 \end{cases}$$

$$D_1 = 4k^2L^2 - 4k^2L^2 - 4L^2 + 100k^2 + 100 = 0$$

$$D_2 = 4k^2(L+9)^2 - 4k^2(L+9)^2 - 4(L+9)^2 + 56 + 56k^2 = 0$$

$$100k^2 - 4L^2 + 100 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{L^2}{25} - 1$$

$$56k^2 - 4(L+9)^2 + 56 = 0$$

$$\frac{56}{25}L^2 - 4L^2 - 72L - 324 + 56 = 0 \Rightarrow \frac{-44}{25}L^2 - 72L - 268$$

$$D = L = -4,5$$

Находим k_1 и $k_2 \Rightarrow k_1 \leq \frac{-5}{6a} \leq k_2$ $k^2 = 82$
(корни системы)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l|l} \text{(1)} \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11}^3 11^2 - 5 & \text{ОЗ:} \\ & x > 0, x \neq 1 \\ \text{(2)} \log_{11}^4(0,5y) + \log_{11} x = \log_{11}^3(0,5y)^3 11^2 - 5 & y > 0, y \neq 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{(1)} \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x &= \frac{2}{3} \log_{11}^3 11^2 - 5 \\ \log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_{11} x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \log_{11}^4(0,5y) + \log_{11} x &= \frac{-13}{3} \log_{11}^3 11^2 - 5 \\ \log_{11}^4(0,5y) + \frac{16}{3} \log_{11} x + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Пусть $\log_{11} x = a$, $\log_{11}(0,5y) = b$, тогда получим

$$\text{(1)} a^4 - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{a} + 5 = 0 \quad | \cdot 3a \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$\text{(2)} b^4 + \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{b} + 5 = 0 \quad | \cdot 3b \neq 0, \text{ т.к. } 0,5y \neq 1$$

$$\text{(1)} 3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$\text{(2)} 3b^5 + 15b + 16 = 0$$

применяем:

$$\text{(1)}' = a^4 + 15 \text{ всегда } > 0$$

$$\text{производная: } \text{(2)}' = b^4 + 15b \text{ всегда } > 0$$

Значит оба уравнения имеют по 1 корню (не больше 1, так как такие x и y есть, то равно по 1), так как функции монотонны

$$\text{(1)} + \text{(2)} : 3(a^5 + b^5) + 15(a + b) = 0 \quad \text{Заметим, что } a = -b \text{ явл. решением и т.к. решение одно, то это оно и есть (если } a \text{ подходит - корень (1), то } b = -a \text{ - корень (2)).}$$

$$\text{Значит } \log_{11} x = -\log_{11}(0,5y) \Rightarrow \log_{11}(0,5xy) = 0$$

$$\Rightarrow 0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2. \quad (\text{Поскольку } a \neq 0 \text{ и } b \neq 0, \text{ то } x \neq 1 \text{ и } y \neq 2 \text{ и } xy = 2 \text{ получилось не при } x=1 \text{ и } y=2)$$

$$\text{Ответ: } xy = 2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

≈ 6
 $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48 \Rightarrow y_2 - y_1 : 6 \Rightarrow y_2 = y_1 + 6k$
 $0 \leq y_1, y_2 \leq 90$

Все точки внутри квадрата принадлежат прямой с наклоном $-6x$

OP: $-6x$; RQ: $-6x + 102$

Пусть $A \in a$ $a: y = -6x + l_1 \Rightarrow y_1 = -6x_1 + l_1$

$B \in b$ $b: y = -6x + l_2 \Rightarrow y_2 = -6x_2 + l_2$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 6x_2 - 6x_1 - 6x_2 + l_2 + 6x_1 - l_1 = 48$$

$$\Rightarrow l_2 - l_1 = 48 \Rightarrow \begin{cases} a: y = -6x + l_1 \\ b: y = -6x + l_1 + 48 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

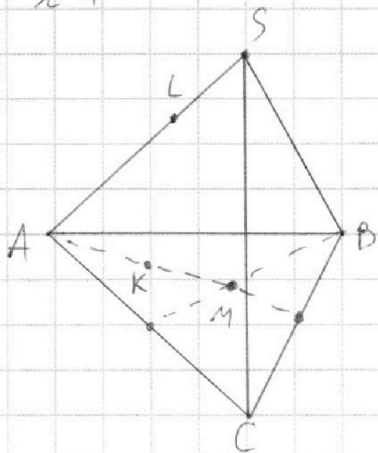
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

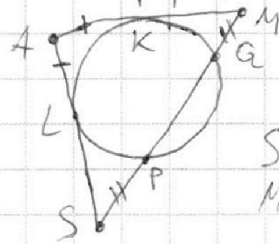


17



Решение:

Рассмотрим пересек Ω и (AMS)
Т.к Ω - сфера, то это будет окр

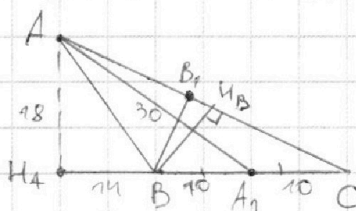


$AK = AL$ (касаят из септ S .)

$SL^2 = SP \cdot SQ$ (спроузе окуп)
 $MK^2 = MQ \cdot MP$ (секунд и касаят)

Т.к $MQ = SP$, то $SQ = MP \Rightarrow SL = MK \Rightarrow AS = AM$ (т.к $AK = AL$) = 20

$AA_1 = 1,5 AM = 30$, (т.к с.в.у т.перс медиан)



$h_a = \frac{2S}{BC} = 18 \Rightarrow A_1H_1 = 24$ (т. Эйлер) \Rightarrow

\Rightarrow с.в.мной $\Rightarrow H_1B = 14, H_1C = 34$

$\Rightarrow AB = 2\sqrt{130}, AC = 2\sqrt{330}$ (т. Эйлер)

$h_b = \frac{2S}{AC} = \frac{180}{\sqrt{330}} = \frac{18\sqrt{330}}{33}$, $h_c = \frac{2S}{AB} = \frac{180}{\sqrt{130}} = \frac{18\sqrt{130}}{13}$

$AB_1 = \sqrt{330}$; $AH_B = \sqrt{520 - \frac{180 \cdot 10}{33}} = \sqrt{\frac{520^2 - 3240}{33}} = \sqrt{\frac{270400 - 3240}{33}} =$

=



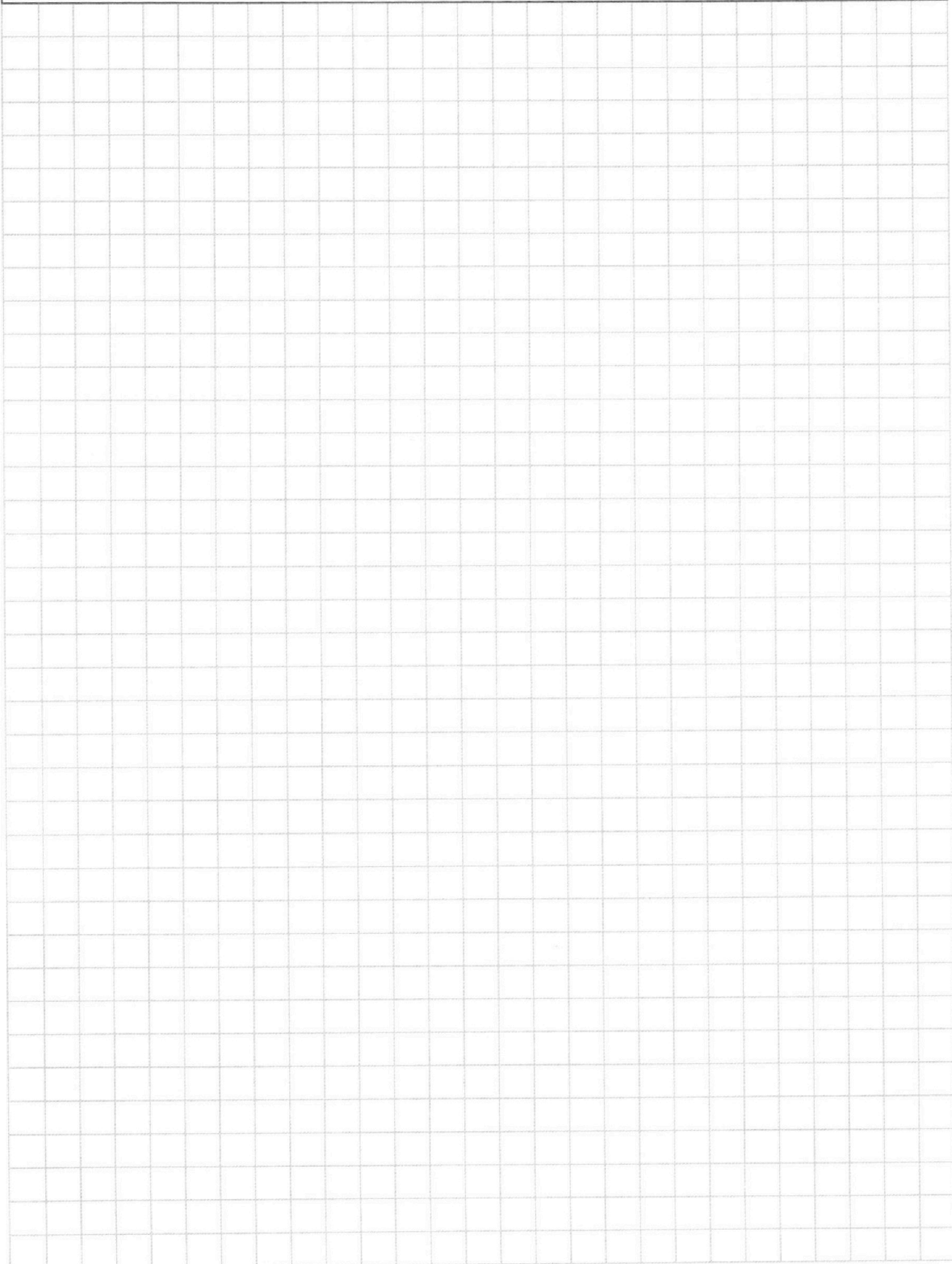
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

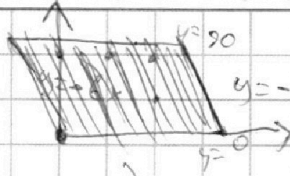


- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

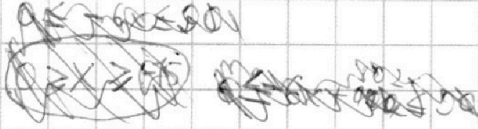
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 90$$



$$-15 \leq x_1, x_2 \leq 15$$

336-та



$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$\begin{aligned} &:6 \quad y_2 - y_1 : 6 \\ & \quad y_2 - y_1 = 6K \end{aligned}$$

все точки \in какой-то прямой
с наклоном $-6x$ и сбили от
 0 до 102

$$y = -6x + L \quad 0 \leq L \leq 102$$

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 6x_2 - 6x_1 - 6x_2 + L_2 + 6x_1 + L_1 = 48$$

$$x_2 - x_1 + k = 8$$

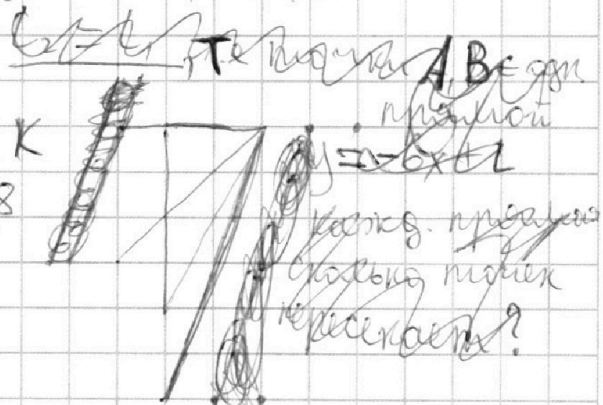
$$K \in [0, 15]$$

16 вариантов на K

$$L_2 = L_1 + 48$$

$$A \in y = -6x + L$$

$$B \in y = -6x + L + 48$$



$$k = 15 \quad L = 15$$

$$L = 4, 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1) \log_{11}^4 x - 6 \log_x^{11} 11 = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5 \quad | \quad \text{OP3: } x > 0, x \neq 1$$

$$3) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y}^{11} 11 = \log_{(0,5y)}^3 (11^{-13}) - 5 \quad | \quad y > 0, y \neq 2$$

$$1) \log_{11}^4 x - \frac{16}{\log_x^{11} 11} = \log_x^3 \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{16}{3} \log_x^{11} 11 + 5 = 0 \quad \log_{11}^4 x = 0$$

$$a^4 - \frac{16}{3a} + 5 = 0 \quad | \cdot 3a \neq 0 \quad \text{1 2 3 4 5 6 7}$$

$$f(a) = 3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$f'(a) = 15a^4 + 15$ всегда $\geq 15 \Rightarrow f(a)$ монотонна \Rightarrow 1 корень
полюс подробно корень

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y}^{11} 11 = \frac{-13}{3} \log_{0,5y}^{11} 11 - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{16}{3} \log_{0,5y}^{11} 11 + 5 = 0 \quad \log_{11}^4 (0,5y) = b$$

$$b^4 + \frac{16}{3b} + 5 = 0 \quad | \cdot 3b \Rightarrow 3b^5 + 16 + 15b$$

$$f'(b) = 15b^4 + 15 \geq 15$$

$$3b^5 + 15b + 16 = 0$$

$$3a^5 + 15a - 16 = 0$$

$$a = -b$$

$$3b^5 + 3a^5 + 15b + 15a = 0 \quad | :3$$

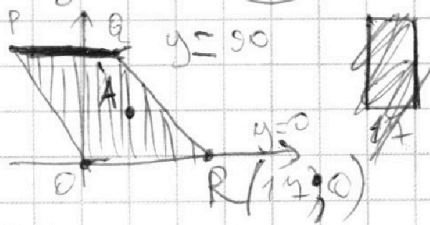
$$b^5 + a^5 + 5(b+a) = 0$$

$$b^5 + a^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = \log_{11}^4 x + \log_{11}^4 (0,5y) = 0$$

$$= a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - a^3b^2 + a^2b^3 - ab^4 + b^5 = \log_{11}^4 (0,5xy) = 0$$

$$0,5xy = 1 \Rightarrow xy = 2$$

26
O(0;0), P(-15;90) Q(2;90) R(12;0)



каж-во нар
 $A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \quad x_1, x_2, y_1, y_2$
узнае

$$6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$$

$$0 \leq y_1, y_2 \leq 90$$

$$\text{OP: } \frac{x}{-15} = \frac{y}{90} \quad | \cdot 90$$

$$\text{RQ: } \frac{x-2}{15} = \frac{y-90}{-90} \quad | \cdot (-90)$$

$$y = -6x$$

$$-6x + 12 = y - 90 \quad y = -6x + 102$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2 1

$$ab : 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11}$$

$$bc : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13}$$

$$ac : 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\downarrow$$

$$a^2 b^2 c^2 : (2^{36} \cdot 3^{59} \cdot 5^{52})$$

$$\downarrow$$

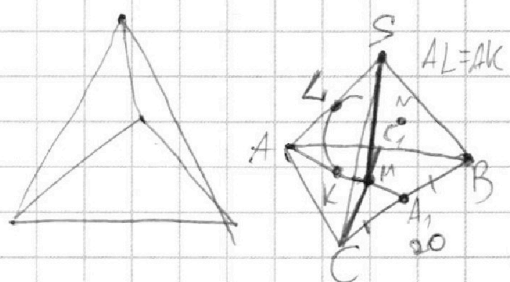
$$abc : 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \Rightarrow abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26} \text{ но } ac : 5^{28} \Rightarrow abc \text{ больше}$$

Ближе нужен пример $abc = 2^{12} \cdot 3^{30} \cdot 5^{26}$ $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$

$$-102 \in [-10\pi, 0] \quad b = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$9\pi - 102 \in [-\pi, 9\pi] \quad c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$2x = 9\pi - 102 \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$$



3
 $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$

$\alpha \in [0, \pi]$
 $\cos \alpha = \sin x$
 $\cos \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$
 $-2 \sin\left(\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha + x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 0$

$$\frac{\alpha - x + \frac{\pi}{2}}{2} = \pi n \quad \frac{\alpha + x - \frac{\pi}{2}}{2} = \pi n - 1$$

1) $\alpha = x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ 2) $\alpha = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi n$

$$10x - 5\pi + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

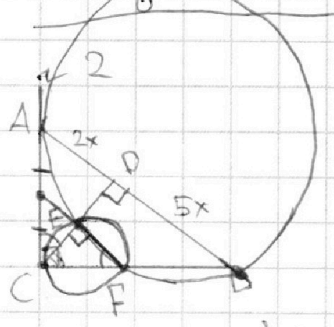
$$5\pi - 10x + 20\pi n = 9\pi - 2x$$

$$12x = 14\pi - 20\pi n$$

$$8x = 20\pi n - 4\pi$$

$$x = \frac{7}{6}\pi - \frac{5}{3}\pi n$$

$$x = \frac{5}{2}\pi n - \frac{\pi}{2}$$

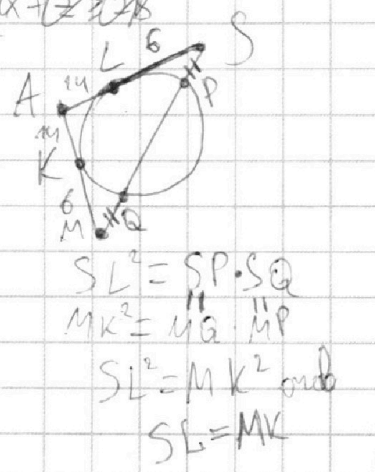


$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = ?$ $\frac{AB}{BD} = \frac{4}{5}$

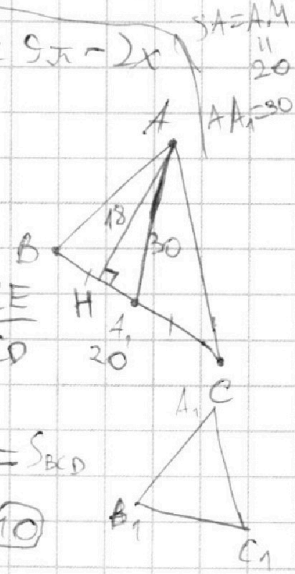
$\frac{CE}{CD} = \frac{1}{2}$

$\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CEF}} = 1 = \frac{5}{2} \cdot 4 = 10$

$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD}$



$S_{ABC} = 180$ $S_{AB} = BC = 90$



1) $x =$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

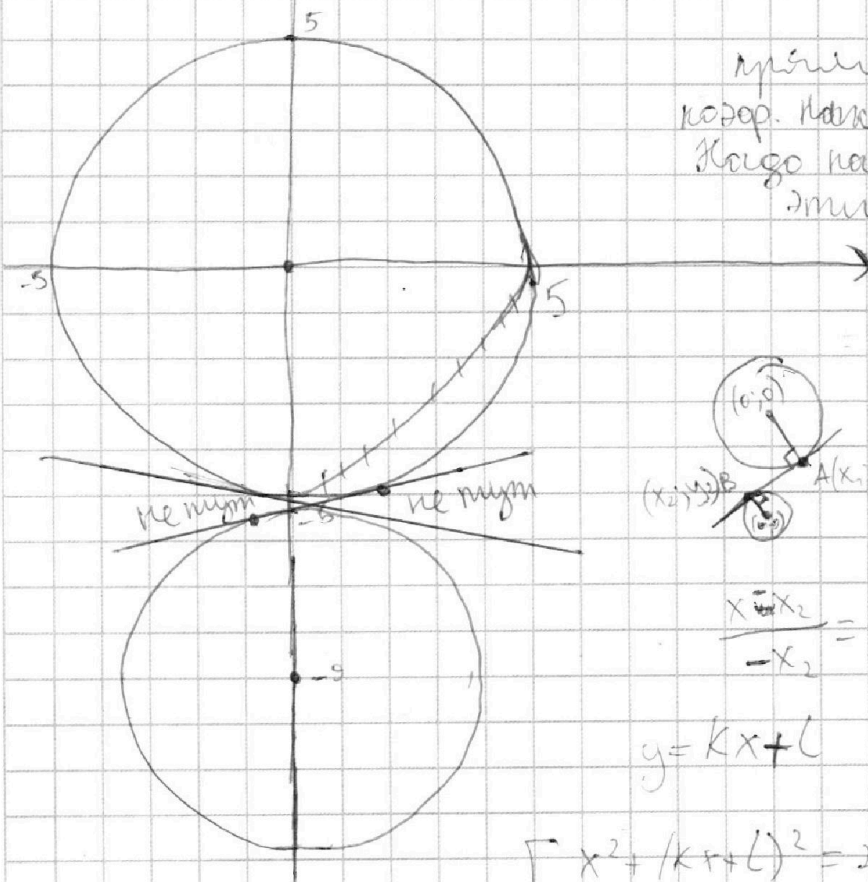


$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 72) = 0 \end{cases} \quad \text{чрез } \text{для каждого } a \exists b: \text{чрез}$$

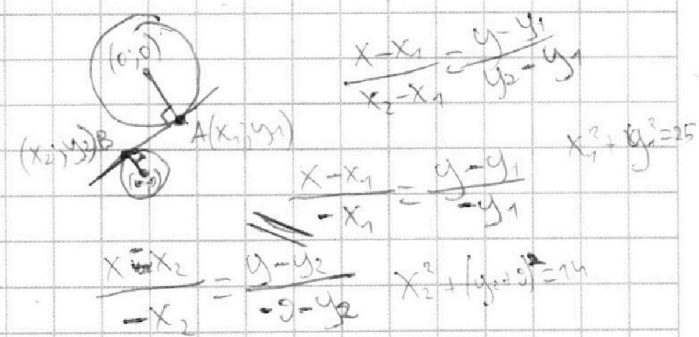
$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \quad - \text{центр } (0; 0) \quad r = 5 \\ x^2 + (y+9)^2 = 14 \quad - \text{центр } (0; -9) \quad r = \sqrt{14} < 4 \end{cases}$$

при $a \neq 0$ $6ay = b - 5x$ (при $a = 0$: получаем $5x = b$ ~~тогда не получится~~)

$$y = \frac{b - 5x}{6a} = \frac{-5}{6a}x + \frac{b}{6a} \quad - \text{прямая}$$



прямая должна иметь
касательную между касан.
Каждо найдем касательную
этих касательных!!!



$$y = kx + l \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \quad 1 \text{ п.} \\ x^2 + (y+9)^2 = 14 \quad 1 \text{ п.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + (kx+l)^2 = 25 \quad 1 \text{ п.} \\ x^2 + (kx+9+l)^2 = 14 \quad 1 \text{ п.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+k^2)x^2 + 2kxL + L^2 - 25 = 0 & D_1 = 4k^2L^2 - 4(L^2 - 25)(k^2 + 1) = 0 \\ x^2(1+k^2) + 2kx(L+9) + L^2 + 2L + 77 = 0 & k^2 = \frac{L^2}{25} + 1 \end{cases}$$