МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A\,(x_1;y_1)$ и $B\,(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
X						

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Предположим, что мы нашли искомые значения a, b и c, при которых abc – наименьшее, тогда, БОО, пусть $a = 2^{x_a} \cdot 7^{y_a}$; $b = 2^{x_b} 7^{y_b}$; $c = 2^{x_c} \cdot 7^{y_c}$, где x_a, y_a, x_b, y_b, x_c и y_c целые неотриц. числа, т.к. a, b и c натуральные. Тогда по условию: $ab = 2^{x_a+x_b} 7^{y_a+y_b}$; $ac = 2^{x_a+x_c} \cdot 7^{y_a+y_c}$; $cb = 2^{x_c+x_b} \cdot 7^{y_b+y_c}$, тогда

$x_a + x_b = 14$

$x_b + x_c = 17$

$x_c + x_a = 20$, т.к. 2 и 7 взаимопросты и других множителей у наших чисел нет, т.к. мы можем разделить на доп. множители и abc уменьшится, а по предположению оно наименьшее.

Тогда: $2(x_a + x_b + x_c) = 51 \Rightarrow x_a + x_b + x_c = 25{,}5$, но т.к. все числа натуральны, то все простые множители в их разложение входят в целых неотриц. степенях, то минимальная возм. сумма показателей степеней равна 26. Аналогично:

$y_a + y_b = 10$

$y_b + y_c = 17$

$y_c + y_a = 37$

Т.к. $y_a + y_b + y_c < 37$ – противоречие (т.к. все они неотриц.), значит $y_a + y_b + y_c \geq 37$

$2(y_a + y_b + y_c) = 64 \Rightarrow y_a + y_b + y_c = 32$. Таким образом мы определили минимальные возм. суммы показателей степеней двойки и 7 (других ~~прост~~ множителей у чисел a, b и c нет). Очев., что $abc = 2^{x_a+x_b+x_c} \cdot 7^{y_a+y_b+y_c} \geq \cancel{2^5}\ 2^{26} \cdot 7^{37}$

Это значение abc достигается при $a = 2^9 \cdot 7^{10}$

$b = 2^6 \cdot 7^{\cancel{1}0}$

$c = 2^{11} \cdot 7^{27}$

Ответ: $abc \geq 2^{26} \cdot 7^{37}$, след-но минимально возможное значение $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2} = \frac{\cancel{a+b}\ a+b}{2(a \cancel{+} -b)^2-(a+b)^2}$$

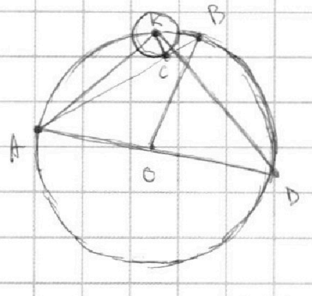
Очев, что при $m=1$ – верно,

Ответ: $m=1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
		X				

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть K – центр ω, O – центр Ω. Продлим AO до пересечения с Ω, отметим т. D. Очев, $\angle AKD = 90^\circ$, как вписанный, опирающийся на диаметр. и $\angle KCB = 90^\circ$, как угол между касательной и радиусом, проведенным в т. касания. Очев., что $\square AKBD$ – вписанный $\Rightarrow \angle KBA = \angle KBC = \angle KDA$, тогда $\triangle CKB \sim \triangle KAD$ по 2 углам: $\angle KBC = \angle KDA$ и $\angle KCB = \angle AKD = 90^\circ$. Тогда: $\frac{KC}{CB} = \frac{AK}{KD} = \frac{1}{x}$, где $CB = x$, и $AC = 7x$. По теореме Пифагора для $\triangle AKC$: $AK^2 = AC^2 + KC^2 = 49x^2 + 1$, т.к. $\angle ACK$ прямой. $\frac{AK}{KD} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{AK^2}{KD^2} = \frac{1^2}{x^2} \Rightarrow KD^2 = x^2 \cdot AK^2 \Rightarrow$ в $\triangle AKD$ по т. Пифагора: $AK^2 + KD^2 = AK^2(1+x^2) = AD^2 = (2R)^2 = 10^2 = 100$. Тогда: $100 = (x^2+1)(49x^2+1)$ Найдем значение X:

$100 = 49x^4 + 50x^2 + 1 \Rightarrow 49x^4 + 50x^2 - 99 = 0$ Решим как квадратное, относительно x^2: $D = \cancel{2500}\ 50 \cdot 50 + 4 \cdot 49 \cdot 99 = 21904$

$x^2_{1,2} = \frac{\cancel{25}\ -50 \pm \sqrt{21904}}{49 \cdot 2}$, т.к. x^2 неотрицателен, то $x^2 = \frac{-50 + \sqrt{21904}}{2 \cdot 49} = \frac{-50 + 148}{49 \cdot 2} = 1$, откуда $\cancel{8}$ $x = 1 \Rightarrow 8x = AB = AC + CB = 7x + x = 8$.

Ответ: $8 = AB$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
			X			

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\sqrt{2x^2-5x+3} = \sqrt{2(x-1)(x-1{,}5)}$

$\sqrt{2x^2-5x+3} - \sqrt{2x^2+2x+1} = 2-7x$

$\cancel{2x^2-7}\left(2x^2-5x+3+2x^2+2x+1\right) - 2\cdot\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} = 4-28x+49x^2$

$\cancel{2x}\ 4\left(2x^2-5x+3\right)\left(2x^2+2x+1\right) = \left(-45x^2+25x\right)^2$

$16x^2-24x^3-8x^2+4x+12 = \cancel{4}45$

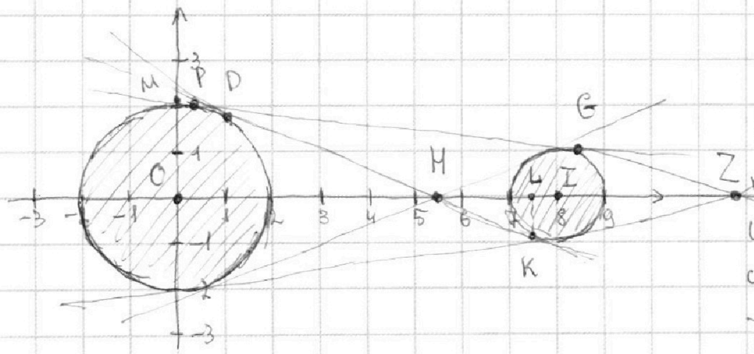
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На графике построим решение второго уравнения системы: $((x+8)^2+y^2-1)$ – на графике это окр-ть радиусом 1, с ц. в т. $(8;0)$, (x^2+y^2-4) – на графике это окружность с центром в начале коорд $(0;0)$ и радиусом 2. Решением будет являться любая точка не снаружи окружностей (из графика очев, что они не пересекаются и в этом случае один из множителей будет не отрицательным, а другой – не положительным, след-но их произведение будет не положительным.



$ax-y+10b=0$ – прямая.

Очев., что прямая с окружностью имеет ~~от~~ одну, 0 или бесконечно много общих точек, тогда очев, что наша прямая – касательная к обоим окружностям. Очевидно, что если D и K – т. касания внутр. касат., то $\triangle ODH \sim \triangle IKH$, (O и I – центры окр-тей. H – т. в которой касательная пересекает $\cancel{x}\ y=0$.), т.к. $\angle ODH=\angle HKI=90^\circ$ и $\angle IHK = \angle ODH$, как вертикальные и коэф. подобия – отношение радиусов => равен 2: $\frac{OD}{KI}=\frac{OH}{IH}=2 \Rightarrow OH=\frac{2}{3}OI=\frac{2}{3}\cdot 8$, тогда

По т. пифагора (т.к. $IH=\frac{1}{3}OI=\frac{1}{3}\cdot 8$) для $\triangle HIK$: $HK=\sqrt{HI^2-IK^2}=\sqrt{\frac{64}{9}-1}=\cancel{\sqrt{6}}\ \sqrt{\frac{55}{9}}$. в $\triangle HKI$ $\sin\angle IHK=\frac{1}{\frac{1}{3}\cdot 8}=\frac{3}{8}$, тогда y точки K равен: $-HK\cdot\sin\angle IHK=-\sqrt{\frac{55}{9}}\cdot\frac{3}{8}=-\sqrt{\frac{55}{64}}$, а X т. K равен $OH+HL$, где L – проекция т. K на ось X, и по т. Пифагора: $\cancel{OH}+HL=OH+\sqrt{HK^2-KL^2}=\sqrt{\frac{55}{9}-\frac{55}{64}}=$
$=\sqrt{\frac{55(64-9)}{64\cdot 9}}=\frac{55}{24}$. $OL=HO+HL=\frac{16}{3}+\frac{55}{24}=\frac{183}{24}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

При $x = \frac{2}{3}\cdot 8$; $y=0$ – подставим в ур-е прямой 2 значения

$y = ax + 10b \rightarrow (1)\ 0 = \frac{16}{3}a + 10b$ Вычтем из (2) (1)

$(2)\ -\sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{183}{24}a + 10b$

$(2)-(1) \Rightarrow -\sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{55}{24}a \Rightarrow a = \frac{-3\sqrt{55}}{55}$ Очев, из-за симметрии относительно OX $a = \frac{3\sqrt{55}}{55}$.

Аналогично для внешних касательных: пусть Z – т.перес. OX, P и G – т. касания, тогда $\triangle ZIG \sim \triangle ZOP$, т.к. $\angle OZP$ – общ., $\angle OPZ = \angle IGZ = 90^\circ \Rightarrow \frac{IG}{OP} = \frac{ZI}{ZO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ZI}{ZI+8} = \frac{1}{2} \Rightarrow ZI = 8$. В $\triangle ZIG$ по т. Пифагора $GZ = \sqrt{IZ - IG} = \sqrt{63} \Rightarrow$ Тогда $tg\angle GZI = \frac{IG}{GZ} = \frac{1}{\sqrt{63}}$. Пусть прямая ZGP пересекает Oy в т. M, тогда x точки M равен 0, а y точки M равен $tg\angle MOZ \cdot ZO$, т.к. $MO \perp OZ \Rightarrow y$ точки M равен $\frac{1}{\sqrt{63}}\cdot 16 = \frac{16}{\sqrt{63}}$.

Подставим коорды точек Z и M в ур-е прямой:

$y = ax + 10b$: $(3)\ 0 = 16a + 10b$ Вычтем из ур-я(4) ур-е(3):

$(4)\ \frac{16}{\sqrt{63}} = 0a + 10b$

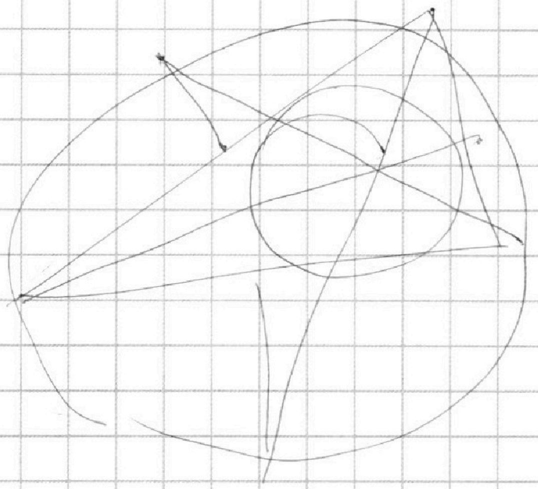
$\frac{16}{\sqrt{63}} = -16a$, откуда $a = -\frac{1}{\sqrt{63}} \Rightarrow$ очев, что из-за симметрии, относительно OX $a = \frac{1}{\sqrt{63}}$ – тоже подходит.

Ответ: $a = \pm\frac{1}{\sqrt{63}}$ и $a = \pm\frac{3\sqrt{55}}{55}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

При $x = \frac{2}{3}\cdot 8$; $y=0$ – подставим в ур-е прямой:

$ax - y + 10b = 0 \Rightarrow a\cdot\frac{16}{3} - 0 + 10b = 0$

$y = ax + 10b \Rightarrow 0 = a\cdot \cancel{8}\frac{16}{3} + 10b$

Очев, что $a=0$ нам не подходит, а т.к.

Подставим полученные значения x и y точки K:

$y = ax + 10b \Rightarrow -\sqrt{\frac{55}{64}} = a\cdot\left(\frac{55}{24}+\frac{16}{3}\right)+10b$ вычтем из верхнего ур-я в нижнее и получим: $0 + \sqrt{\frac{55}{64}} = a\left(\frac{16}{3} - \left(\frac{55}{24}+\frac{16}{3}\right)\right)$ откуда

$\frac{128}{24} - \frac{183}{24} = -\frac{55}{24}$

$a = \sqrt{\frac{55}{64}} = \frac{\sqrt{55}\cdot \cancel{73}\,24}{\sqrt{64}\cdot \cancel{24}\,\cancel{73}\,55} = -\frac{3\sqrt{55}}{\cancel{73}\,55}$. Очев, что из-за симметрии относительно OX $a = +\frac{3\sqrt{55}}{\cancel{73}\,55}$ тоже подходит (вторая внутр касательная. Найдем a для внешних касательных:

Пусть P и G – точки касаний, Z – т. пересеч. с OX, тогда

Очев, что $\triangle ZGI \sim \triangle ZPO$, ~~но~~ т.к. $\angle OPZ = \angle IGZ = 90^0$ и $\angle PZO$ – общий. и $\frac{ZI}{ZO} = \frac{GI}{PO} = \cancel{2}\,\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ZI}{ZI+8} = \frac{1}{2} \Rightarrow ZI = 8$. и

Z – точка с коордами $(16;0)$. ~~Аналогично: $\sin\angle GZI = \frac{GI}{}$~~

По т. Пифагора для $\triangle GIZ$: $GZ^{\cancel{2}} = \sqrt{ZI^2 - IG^2} = \sqrt{64-1} = \sqrt{63}$

Тогда $\operatorname{tg}\angle \cancel{IG}\, IZG = \frac{IG}{GZ} = \frac{1}{\sqrt{63}}$. Пусть прямая PGZ пересекает ось y в т. M, тогда, т.к. $MOZ = 90$, то $MO = \operatorname{tg}\angle MZO \cdot ZO$ $= \operatorname{tg}\angle GZI\cdot ZO = \frac{1}{\sqrt{63}}\cdot 16 = \frac{16}{\sqrt{63}}$ $\Rightarrow$ y точки M, а x точки M равен 0. Подставим в ур-е прямой: $y = ax + 10b \Rightarrow$

(1) $0 = a\cdot 16 + 10b$ Вычтем из (2) ~~у~~ ~~(2)~~ уравнение (1):

(2) $\frac{16}{\sqrt{63}} = 10b$

$\frac{16}{\sqrt{63}} = -16a \Rightarrow a = -\frac{1}{\sqrt{63}}$ и, аналогично из-за симметрии относительно OX значение $a = \frac{1}{\sqrt{63}}$ тоже подходит

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

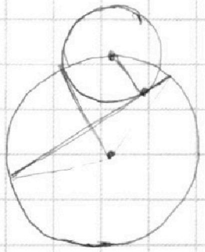
МФТИ

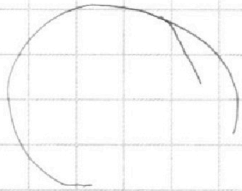
$AK = \sqrt{49x^2+1}$

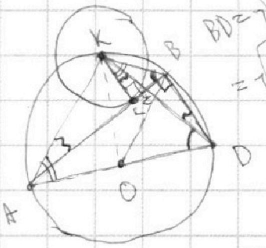
$100-64x^2 = 50(1-\cos\alpha)$

$2x^2+2x+1=0$

$D = 4-4\cdot 2$







$BD = \sqrt{100-64x^2} =$
$= \sqrt{50-2\cos\alpha\cdot 25}$

След-но $KD = x\cdot AK$, $AK=\sqrt{49x^2+1}$ $\frac{KC}{CZ} = \frac{KA}{KZ} =$

$\frac{CB}{KD} = \frac{CK}{AK} = \cancel{\frac{x}{1}}$

$KD^2 = x^2\cdot AK^2 = 49x^4+x^2$

$\frac{CB}{CK} = \frac{KD}{AK} = \frac{x}{1}$

Тогда $AD^2 = AK^2+KD^2 = 49x^4+x^2+49x^2+1 = 100$

$t = x^2$

$49t^2+50t-99=0$

$D = 2500+99\cdot49\cdot4 = \cancel{19404}$

$4\cdot(625+99\cdot49)$

$\times\,49 \cdot 99$: 441, 441, 4851

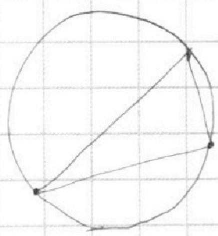
$\times\,4851 \cdot 4$: 19404

$+\,2500$: 21904

$9\cdot11\cdot7\cdot7$

$\times\,132\cdot132$: 264, 396, 17424

$\times\,162\cdot162$: 324, 972, 26244



$+\,4851 + 625 = 5476$

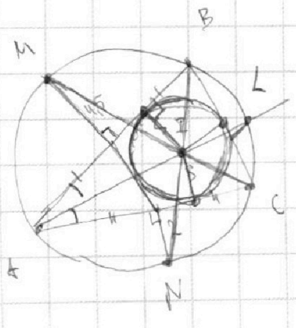
7

$\times\,76\cdot76$: 456, 532, 5776

$2x^2-5x+3=0$

$25-4\cdot3\cdot2=1$

$\frac{5\pm1}{4} = 1;\ 1,5$



$2(x-1)(x-1,5)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

очев, что $a = 2^{x_a}\cdot 7^{y_a}$ $b = 2^{x_b} 7^{y_b}$ $c = 2^{x_c} 7^{y_c}$

$a\cdot b = 2^{x_a+x_b}\cdot 7^{y_a+y_b}$

$b\cdot c = 2^{x_b+x_c}\cdot 7^{y_b+y_c}$

$a\cdot c = 2^{x_a+x_c}\cdot 7^{y_c+y_a}$

$\frac{a+b}{a^2-6ab+9b^2-8b^2} = \frac{a^2+b}{(a-3b)^2-8b^2} = \frac{a+b}{(a-3b-2\sqrt{2}b)(a-3b+2\sqrt{2}b)} =$

$x_a+x_b=14$ $x_a+x_b+x_c$

$x_b+x_c=17$

$x_a+x_c=20$

$4\cdot 8 = 2^2\cdot 2^3 = 32 = 2^5$

$\Rightarrow \frac{a+b}{(a-3b)^2-4b^2-4b^2} = \frac{a+b}{(a-5b)(a-b)-4b^2}$

$4x^4-10x^3+6x^2+4x^3-10x^2+6x+2x^2-5x+3$

$2(x_a+x_b+x_c) = 20+17+14 = 51$

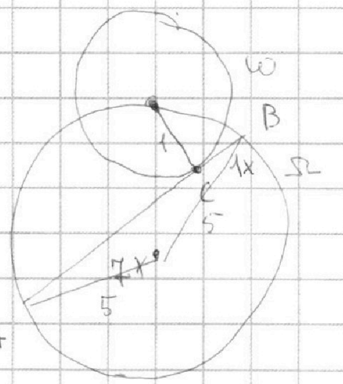
$4x^2+4x+2$

$2x^2-5x+3+2x^2+2x+1 \neq 7x-2 = 2\sqrt{(2x^2-5x+3)(2x^2+2x+1)} =$

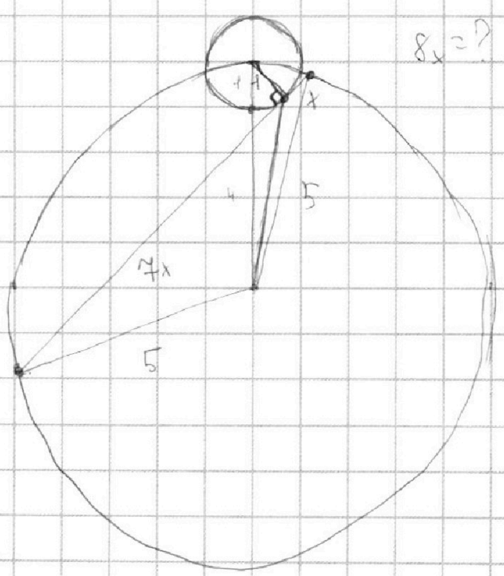
$\cancel{a(a-3b)+b(b-3a)}$

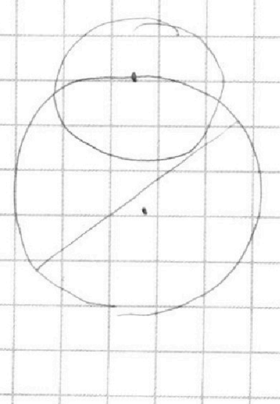
$(4x^2+4x+2)(4x^2+4x+2) = 16x^4+16x^3+8x^2+16x^3+16x^2+8x+8x^2+8x+4 =$

$= 16x^4+$



$8x = ?$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$16x^4+32x^3+32x^2+16x+4 = 8x^4-12x^3-4x^2+2x+6$

$8x^4+44x^3+36x^2+14x-2=0$

2500   49   99

$4x^4+22x^3+18x^2+7x-1=0$

$\times\ 49 \cdot 99$: 441, 441, 4851; $\times 4$: 19404; $+2500$: 21904

~~4+22+18~~

$76\cdot 2 = 152$

$4-22+18-7-1$

152×152: 304, 760, 152, 23104

146×146: 876, 584, 146, 21316

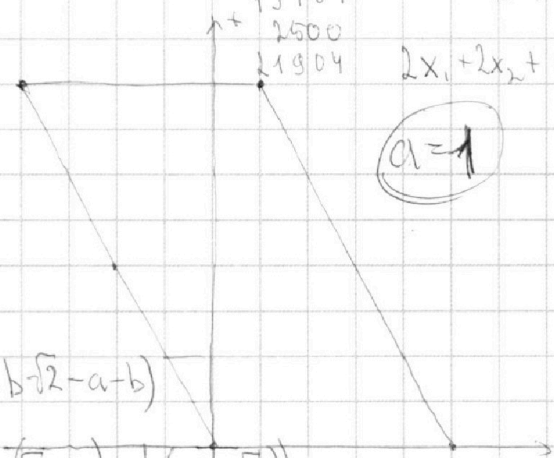
148×148: 1184, 592, 148, 21904

98

$A(x_1;y_1)\ B(x_2;y_2)$

$2x_1+2x_2+y_1+y_2=12$

$a=1$



$(a+b)^2 \ne (a+$

$2(a-b)^2-(a+b)^2$

$(a\sqrt{2}-b\sqrt{2}+a+b)(a\sqrt{2}-b\sqrt{2}-a-b)$

$(a(\sqrt{2}+1)+b(1-\sqrt{2}))(a(\sqrt{2}-1)+b(-1-\sqrt{2}))$

$ax-y+10b=0$

Точка $(x;y)$ лежит внутри(на границе) одной из окр-тей

$cx-y+10b=0$

$y=0$ $y=ax+10b$

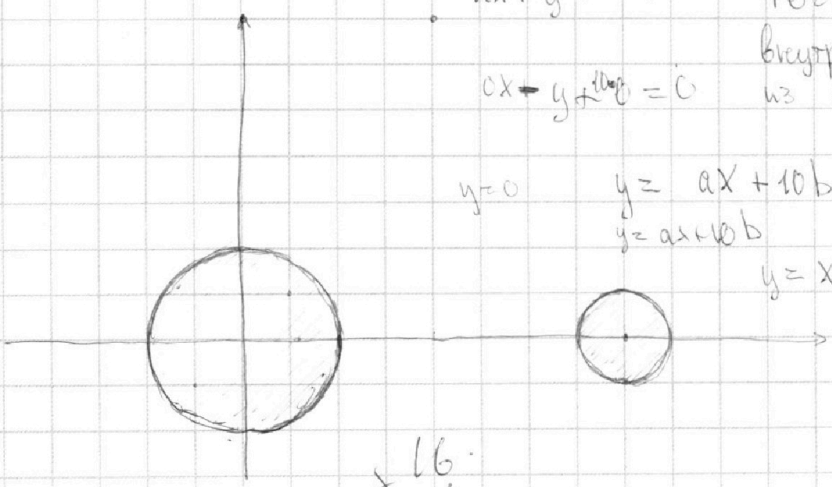
$y=ax+10b$

$y=x$

$\sin\angle KMD =$

$=\dfrac{1}{\frac{1}{3}\cdot 8}=\dfrac{3}{8}$

$\sqrt{1-\frac{9}{64}}=$



16×8: 128, 55, 73