МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_3^4 x + 6 \log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8 \quad \text{и} \quad \log_3^4 (5y) + 2 \log_{5y} 3 = \log_{25y^2} \left(3^{11}\right) - 8.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2 - 3x_1 + y_2 - y_1 = 33$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA = BC = 12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Если значение abc минимально, то числа a, b и c не содержат никаких простых делителей, кроме 2, 3 и 5. В противном случае можно убрать из их разложения остальные простые делители. Тогда abc уменьшится, а кратность выражениям из условия не изменится.

Пусть $a = 2^{x_a} 3^{y_a} 5^{z_a}$, $b = 2^{x_b} 3^{y_b} 5^{z_b}$, $c = 2^{x_c} 3^{y_c} 5^{z_c}$.

Все числа $x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b, x_c, y_c, z_c$ целые неотрицательные

$ab \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$

$bc \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13}$

$ac \vdots 2^{19} 3^{18} 5^{30}$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{42} 3^{41} 5^{53}$

В разложение числа $a^2b^2c^2$ все простые делители входят в чётной степени, поэтому 3 входит хотя-бы в степени 42, а 5 хотя бы в степени 54. Поэтому $abc \vdots 2^{21} 3^{21} 5^{27}$

$$\begin{cases} x_a + x_b + x_c \geq 21 \\ x_a + x_b \geq 9 \\ x_b + x_c \geq 14 \\ x_a + x_c \geq 19 \end{cases}$$

$\min(x_a + x_b + x_c) = 21$ достигается при $x_a = 7$, $x_b = 2$, $x_c = 12$

$$\begin{cases} y_a + y_b + y_c \geq 21 \\ y_a + y_b \geq 10 \\ y_b + y_c \geq 13 \\ y_a + y_c \geq 18 \end{cases}$$

$\min(y_a + y_b + y_c) = 21$ достигается, например при $y_a = 7$, $y_b = 3$, $y_c = 11$

Заметим, что $abc \vdots ac \vdots 5^{30}$, поэтому

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} z_a+z_b+z_c \geqslant 30 \\ z_a+z_b \geqslant 10 \\ z_b+z_c \geqslant 13 \\ z_a+z_c \geqslant 30 \end{cases}$$

$\min(z_a+z_b+z_c)=30$ достигается, например при $z_a=13$, $z_c=17$, $z_b=0$.

Значит $abc \geqslant 2^{21}3^{21}5^{30}$ и это значение достигается, например, при

$a=2^7 3^7 5^{13}$

$b=2^2 3^3$

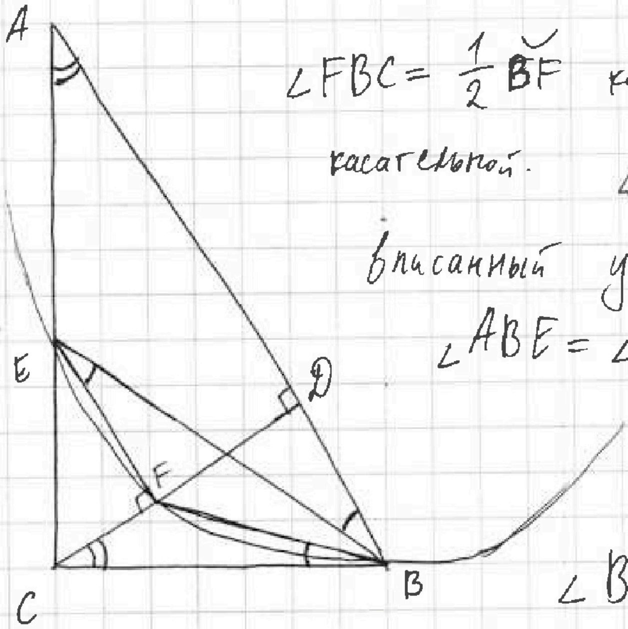
$c=2^{12}3^{11}5^{17}$

Ответ: $2^{21}3^{21}5^{30}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\angle FBC = \frac{1}{2}\breve{BF}$ как угол между хордой и касательной. $\angle FEB = \frac{1}{2}\breve{BF}$ как вписанный угол.

$\angle ABE = \angle BEF$ как накрест лежащие при $AB \parallel EF$ и секущей BE.

$\angle BCD = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAC$

Поэтому $\triangle BAE \sim \triangle BCF$ по двум углам.

$AD : DB = 3:1$. Пусть $AD = 3x$, $BD = x$.

Тогда $BC = \sqrt{BD \cdot BA} = \sqrt{x \cdot 4x} = 2x$

$AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{3x \cdot 4x} = 2x\sqrt{3}$

Пусть $CF = y$. $\triangle CFE \sim \triangle CDA \sim \triangle BCA$ по двум углам. Поэтому

$\frac{CF}{CE} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow CE = 2y$

Из подобия $\triangle BAE \sim \triangle BCF$ получаем

$\frac{AE}{CF} = \frac{BA}{BC}$, $\frac{2x\sqrt{3} - 2y}{y} = \frac{4x}{2x}$

$2x\sqrt{3} - 2y = 2y$

$y = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{3} \cdot 2x = 2x^2\sqrt{3}$$

$$S(CEF) = \frac{1}{2} CF \cdot FE = \frac{1}{2} y \cdot y\sqrt{3} = \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{3x^2\sqrt{3}}{8}.$$

Поэтому $\dfrac{S(ABC)}{S(CEF)} = \dfrac{2x^2\sqrt{3}}{\left(\dfrac{3x^2\sqrt{3}}{8}\right)} = \dfrac{16}{3}$

Ответ: $\dfrac{16}{3}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$

$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$

Построим график функции $f(x) = \arcsin(\cos x)$

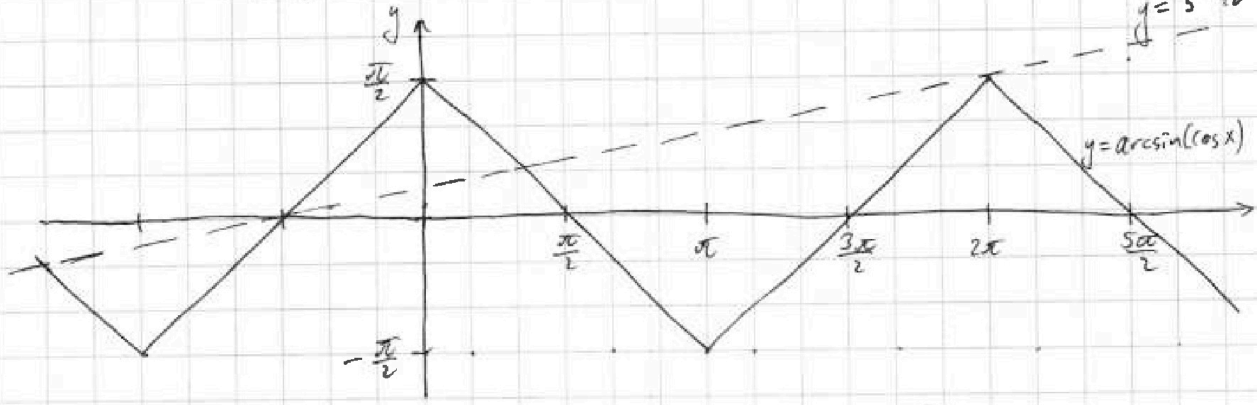
Если $0 \le x \le \pi$, то $\arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - x)) =$

$= \frac{\pi}{2} - x$

Также понятно, что $f(x+2\pi) = f(x)$,

$f(x+\pi) = -f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$

Значит график таков: (сплошная линия)



Построим также график $g(x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$ (пунктир)

Заметим, что при $x = 2\pi$ $g(x) = \frac{\pi}{2} = f(x)$,

при $x > 2\pi$, $g(x) > \frac{\pi}{2} \geq f(x)$, поэтому при $x > 2\pi$

корней нет.

При $x = -3\pi$ $g(x) = -\frac{\pi}{2} = f(x)$, при

$x < -3\pi$, $g(x) < -\frac{\pi}{2} \le f(x)$. Поэтому при $x < -3\pi$

корней нет.

Из графика понятно, что есть еще три корня помимо $x=-3\pi$ и $x=2\pi$ и это точки пересечения прямой $y=\frac{\pi}{10}+\frac{x}{5}$ с прямыми

$y=\frac{\pi}{2}-x$, $y=\frac{\pi}{2}+x$, $y=-\frac{3\pi}{2}-x$.

Найдём их

$\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-x$, $\frac{6x}{5}=\frac{2\pi}{5}$, $x=\frac{\pi}{3}$

$\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{2}+x$, $-\frac{4x}{5}=\frac{2\pi}{5}$, $x=-\frac{\pi}{2}$

$\frac{x}{5}+\frac{\pi}{10}=-\frac{3\pi}{2}-x$, $\frac{6x}{5}=\frac{-8\pi}{5}$, $x=\frac{-4\pi}{3}$

Ответ: $\left\{-3\pi, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 2\pi\right\}$

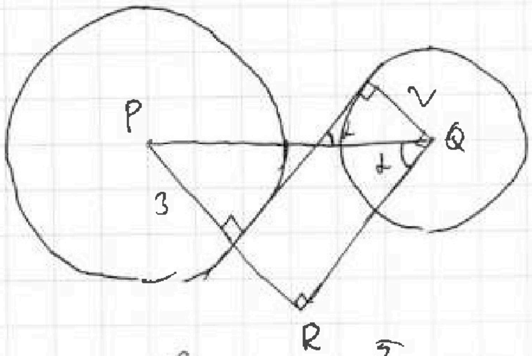
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Система имеет ровно 4 решения тогда и только тогда, когда прямая $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ является секущей к обеим окружностям. Этого не может произойти, если её угловой коэффициент не меньше, чем у l, или не больше, чем у k. В то же время если он меньше, чем у l и больше, чем у k, то всегда можно осуществить необходимый параллельный перенос, чтобы она стала секущей. То есть найдётся число b. Найдём угловые коэффициенты



$k_l = \operatorname{tg}\alpha$

$\sin\alpha = \frac{PR}{PQ} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{\sqrt{6^2-5^2}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$

Тогда $k_l = \frac{5}{\sqrt{11}}$, $k_k = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

$$-\frac{5}{\sqrt{11}} < -\frac{a}{2} < \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$-\frac{10}{\sqrt{11}} < a < \frac{10}{\sqrt{11}}$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

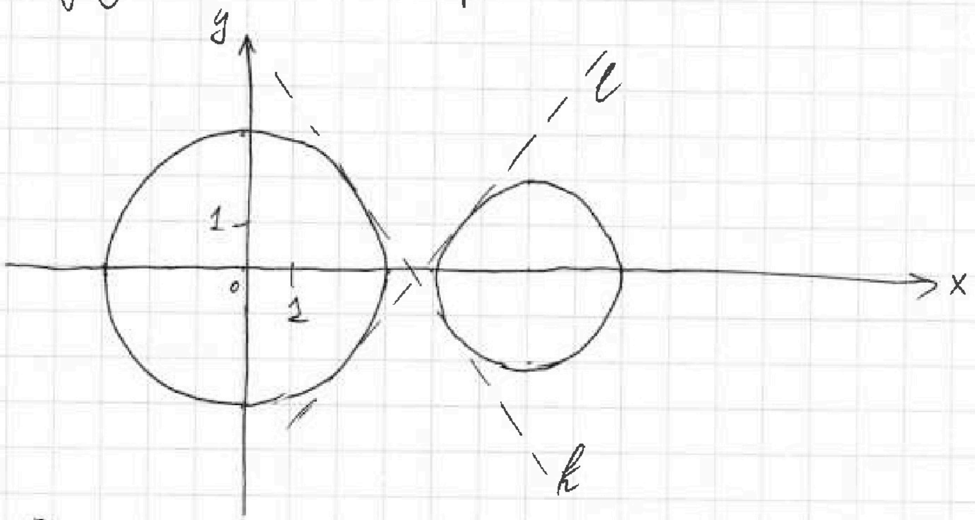
МФТИ

$$\begin{cases} ax+2y-3b=0 \\ (x^2+y^2-9)(x^2+y^2-12x+32)=0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение

$$\left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2-12x+36=4 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ (x-6)^2+y^2=4. \end{array}\right.$$

Его график — две окружности. Первая с центром $(0;0)$ и радиусом 3. Вторая с центром $(6;0)$ и радиусом 2. Построим сплошной линией



Рассмотрим второе уравнение $y=-\frac{a}{2}x+\frac{3b}{2}$

Параметр a задаёт коэффициэнт наклона прямой, а параметр b — её положение (т.е. при изменении b осуществляется параллельный перенос)

Проведём внутренние касательные l и k к окружностям (пунктир)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2\log_3 x} - 8$$

$\log_3 x = a, \quad a\neq 0.$

$$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8.$$

$$a^4 + 8 = -\frac{7}{2a}$$

$$a^5 + 8a = -\frac{7}{2}.$$

$$\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$$

ОДЗ: $\begin{cases} y>0 \\ y\neq \frac{1}{5} \end{cases}$

$$\log_3^4(5y) + \frac{2}{\log_3(5y)} = \frac{11}{2\log_3(5y)} - 8$$

$\log_3(5y) = b, \quad b\neq 0.$

$$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8$$

$$b^5 + 8b = \frac{7}{2}.$$

Заметим, что $a+b = \log_3 x + \log_3(5y) = \log_3(5xy)$

$$xy = \frac{3^{a+b}}{5}$$

Значит, чтобы найти все возможные xy необходимо найти все возможные $a+b$, при которых

$$\begin{cases} a^5 + 8a = -\frac{7}{2} \\ b^5 + 8b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Заметим, что функция $f(t) = t^5 + 8t$ возрастающая, а значит все свои значения она принимает не более одного раза.
В то же время $f(-t) = -t^5 - 8t = -f(t)$
Поэтому если $a = t_0$ - корень уравнения $a^5 + 8a = -\frac{7}{2}$, то $b = -t_0$ - корень уравнения $b^5 + 8b = \frac{7}{2}$, притом эти корни единственные
Значит единственное возможное значение $a+b$ это 0.
Надо отметить, что корни указанных уравнений существуют, поскольку $E(f) = \mathbb{R}$ ввиду того, что f непрерывна и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Значит $xy = \frac{3^0}{5} = \frac{1}{5}$

Ответ: $\frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Разместим точку A в центре $(0;0)$ и рассмотрим, какие точки $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами удовлетворяют $3x_2+y_2=33$. Понятно, что это точки вида $(n;33-3n)$. Тогда если $A(x_1;y_1)$, то B имеет вид $B(x_1+n;33-3n+y_1)$, $n\in\mathbb{Z}$.

Заметим, что если сдвигать A параллельно прямой $y=-3x$, то семейство точек B, подходящих ей, не изменится:

$A(x_1+d;y_1-3d)$ $B(x_1+n+d;33-3(n+d)+y_1)$

- имеет тот же вид.

Параллелограм $OPQR$ ограничен прямыми $y=0$, $y=42$, $y=-3x$, $y=60-3x$.

Внутри него мы можем выделить 21 множество целочисленных точек: пусть

$M_i=\{(x;y)\,|\,y=-3(x-i),\ x,y\in\mathbb{Z},\ (x;y)$ внутри $OPQR\}$, где $i=0,1,\dots,20$.

Понятно, что в каждом множестве содержится ровно 15 точек.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

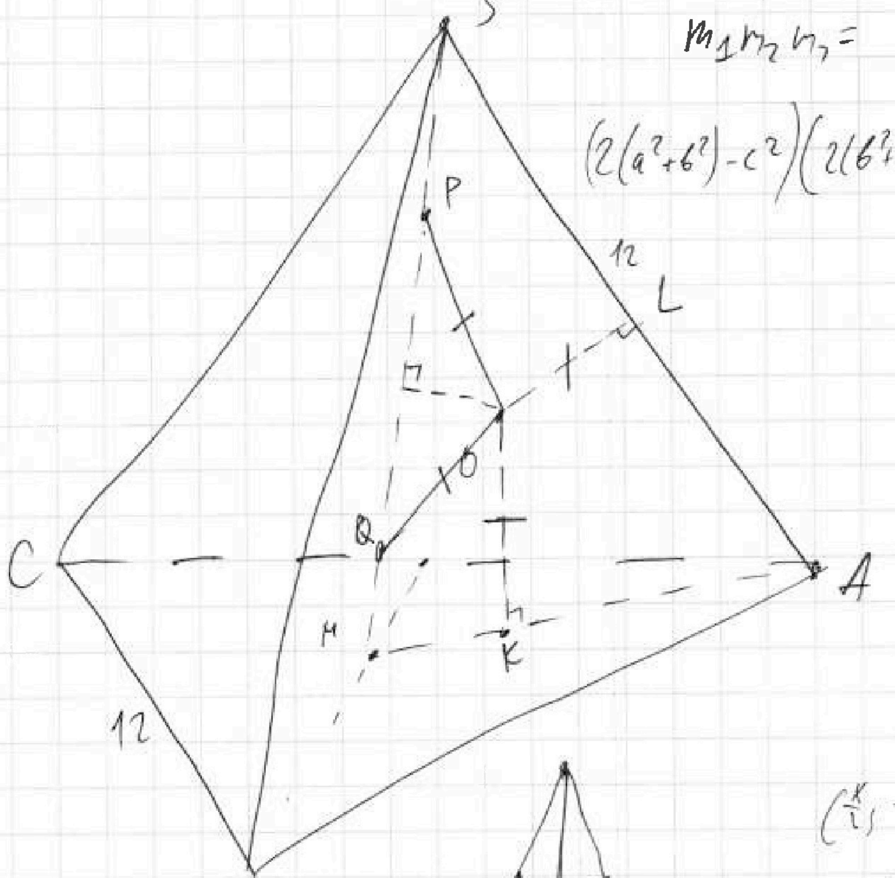
При этом если точка A находится в множестве M_i, то мн-во точек B внутри параллелограмма и отвечающих условию есть множество M_{i+11}.

Если $i > 9$, то для точки A нет пары.

Тогда всего пар точек $10 \cdot 15 \cdot 15 = \cancel{2475}$ 2250

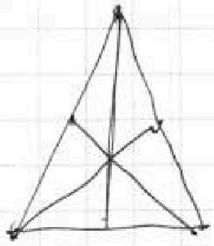
Ответ: ~~2475~~ 2250

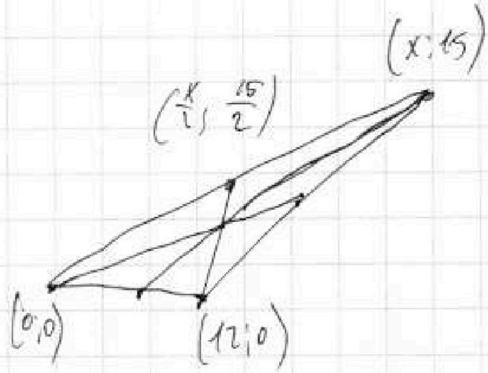
Примечание. Способов выбрать M_i — 10.
Каждому способу выбрать M_i соответствует 15 способов выбрать в нём точку A, и каждому из них соответствует 15 способов выбрать точку B из множества M_{i+11}.

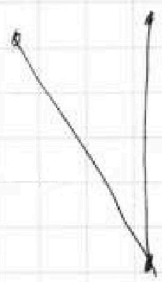


$m_1 m_2 m_3 =$

$(2(a^2+b^2)-c^2)(2(b^2+c^2)-a^2)(2(a^2+c^2)-b^2)$







На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

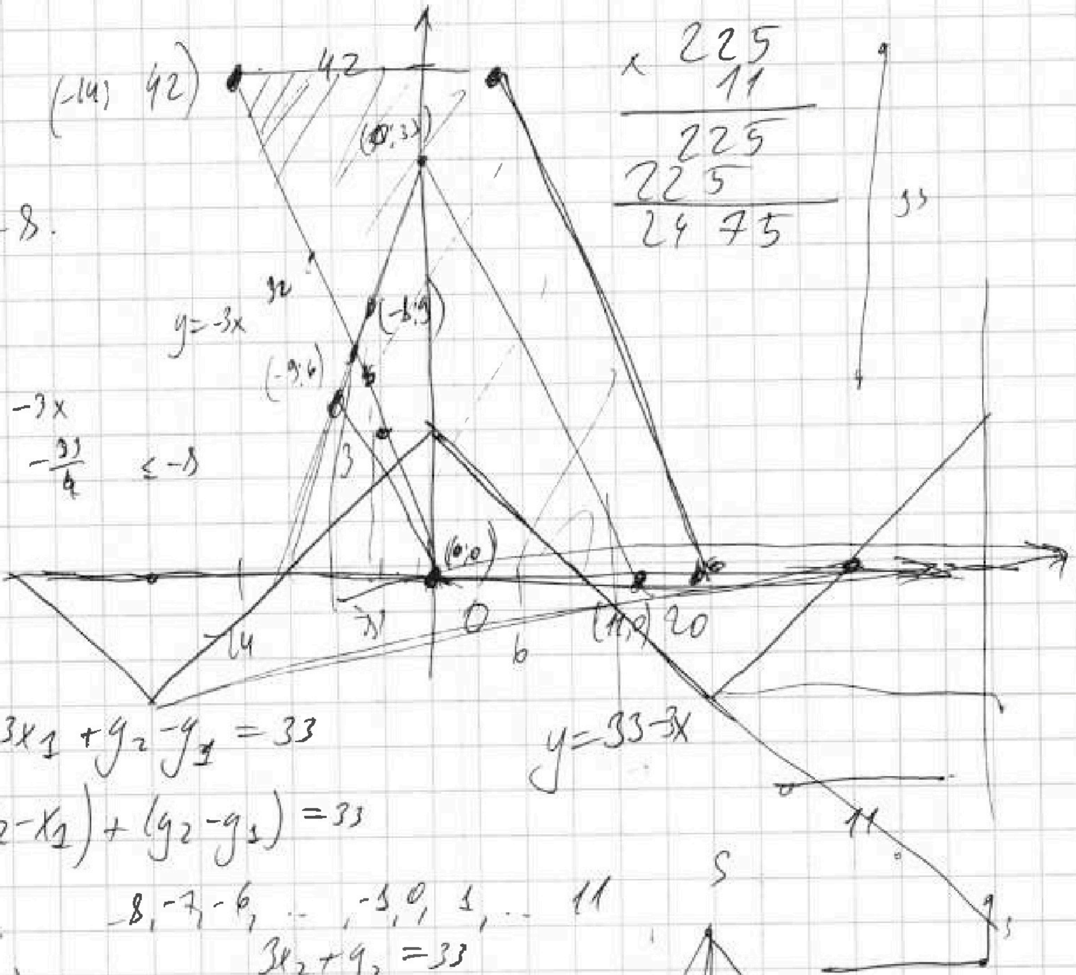
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} \times\ 225 \\ 11 \\ \hline 225 \\ 225\ \ \\ \hline 2475 \end{array}$$

−8.

$y=-3x$

$33+x=-3x$

$x=-\frac{33}{4}\le -8$

$3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$

$3(x_2-x_1)+(y_2-y_1)=33$

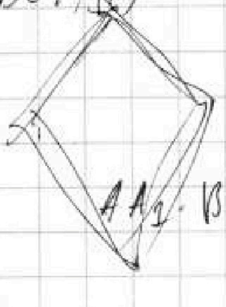
$A(0.0)$. $-8,-7,-6,\dots,-1,0,1,\dots 11$

$3x_2+y_2=33$

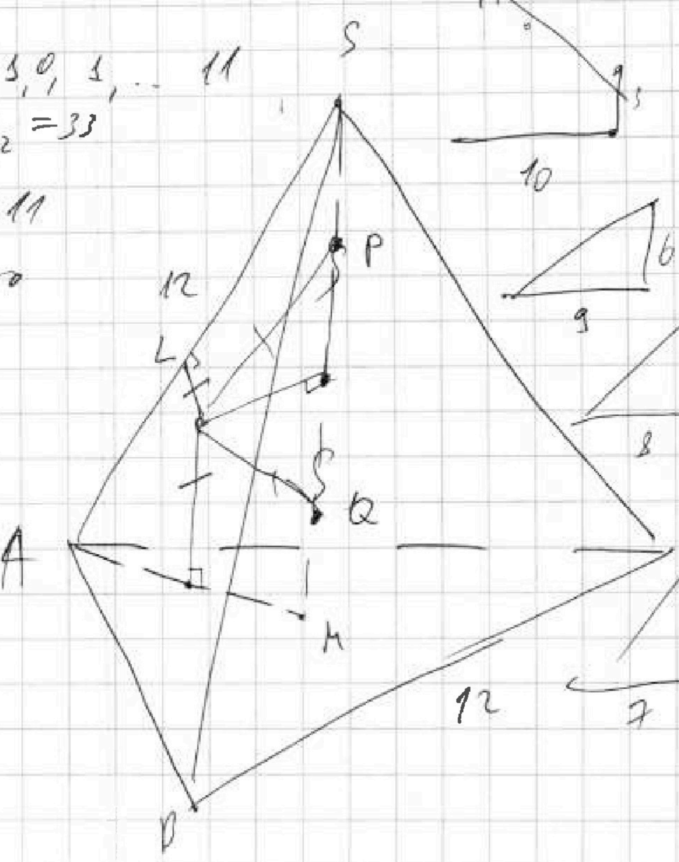
$B(x_2;y_2)$

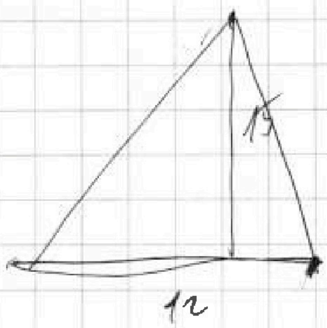
$x_2=11$

$y_2=0$



$AA_1\cdot BB_1-CC_1$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

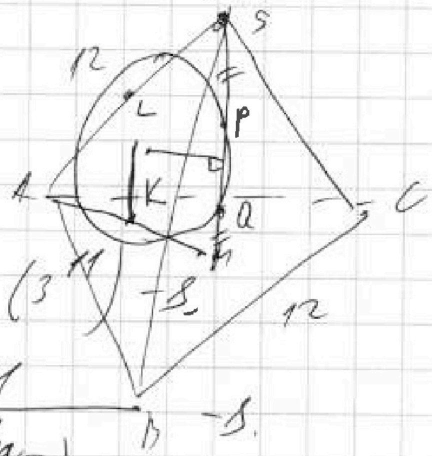
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8.$

$243 = 3\cdot 81 = 3^5$

$\log_3^4 x + \frac{6}{\log_3 x} = \frac{5}{2\log_3 x} - 8.$

ОДЗ.
$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$



$\log_3 x = a$

$a^4 + \frac{6}{a} = \frac{5}{2a} - 8.$

$\log_3^4 (5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2} (3^{11}) - 8$

$\log_3^4 (5y) + \frac{2}{\log_3 (5y)} = \frac{11}{2\log(5y)} - 8.$

$\log_3 (5y) = b$

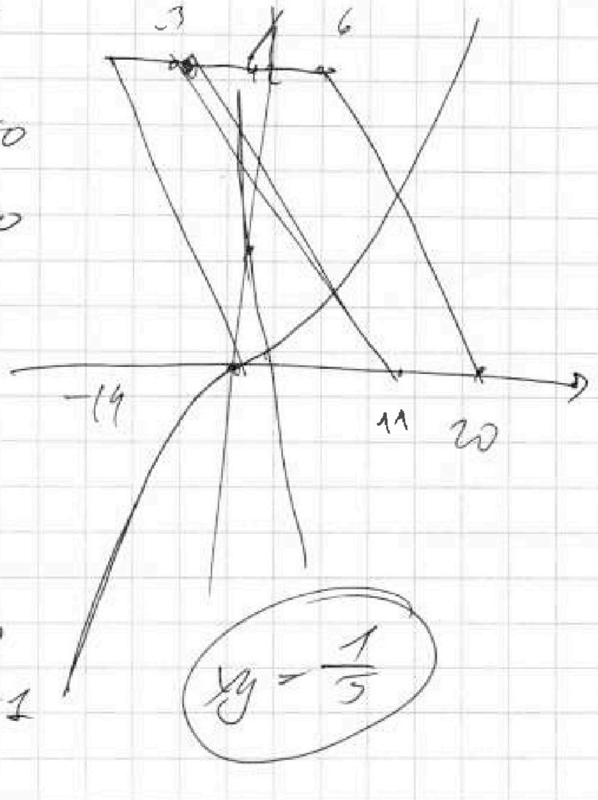
$b^4 + \frac{2}{b} = \frac{11}{2b} - 8.$

$b^4 - \frac{7}{2b} + 8 = 0$

$\begin{cases} b^5 + 8b - \frac{7}{2} = 0 \\ a^5 + 8a + \frac{7}{2} = 0 \end{cases}$

$2x^5 + 16x - 7 = 0$

$\frac{x_0^2}{5}$



Если $\log_3 x + \log_3 5y = 0$

$5xy = 1$

$xy = \frac{1}{5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^9 3^{10} 5^{10}$

$ac \vdots 2^{13} 3^{15} 5^{30}$

$bc \vdots 2^{14} 3^{13} 5^{13}$

$\begin{cases} x_a + x_b = 9 \\ x_a + x_c = 19 \\ x_b + x_c = 14 \end{cases}$

$\begin{cases} y_a + y_b = 10 \\ y_a + y_c = 18 \\ y_b + y_c = 14 \end{cases}$

$x_a + x_b + x_c = 21$

$a^2b^2c^2 \vdots 2^{42} 3^{41} 5^{43}$

$\vdots 2^{42} 3^{42} 5^{44}$

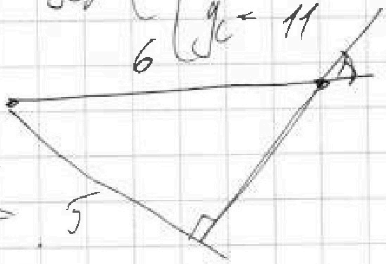
$\begin{cases} x_a = 7 \\ x_b = 2 \\ x_c = 12 \end{cases}$

$y_a + y_b + y_c = 21$

$\cancel{y_a = 8}$
$\cancel{y_b = 2}$
$\cancel{y_c = 12}$

$\begin{cases} y_a = 7 \\ y_b = 3 \\ y_c = 11 \end{cases}$

$abc = 2^{21} 3^{21} 5^{22}$



$\begin{cases} z_a + z_b = 10 \\ z_a + z_c = 30 \\ z_b + z_c = 13 \end{cases}$

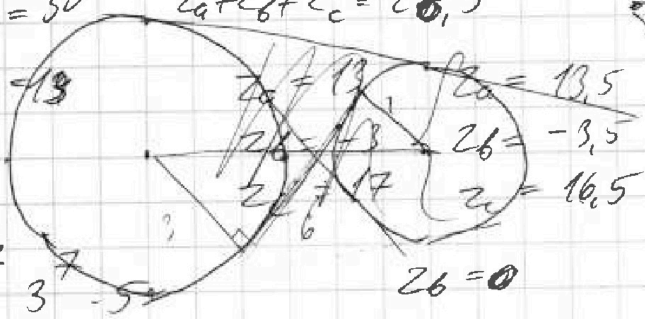
$z_a + z_b + z_c = 26{,}5$

$\cancel{z_a = 13}$
$\cancel{z_b = -3}$
$\cancel{z_c = 17}$

$z_a = 13{,}5$

$z_b = -3{,}5$

$z_c = 16{,}5$



$z_b = 0$

$z_a \geq 10$

$z_c \geq 13$

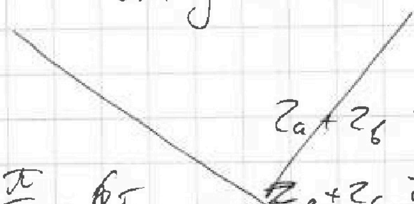
$z_a + z_c \geq 30$

$a = 2^7 3^7 \cdot 5$

$b = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

$c = 2^{12} 3^{11} \cdot 5$

$ax + 2y - 3b = 0.$

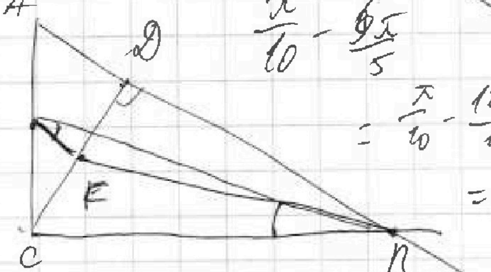


$z_a + z_b \geq 10$

$z_a + z_c \geq 30$

$z_b + z_c \geq 13$

$z_a, z_b, z_c \in N$



$\frac{\pi}{10} - \frac{6\pi}{5}$

$= \frac{\pi}{10} - \frac{12\pi}{10}$

$= -\frac{11\pi}{10}$

$\frac{\pi}{10} - \frac{6\pi}{10}$

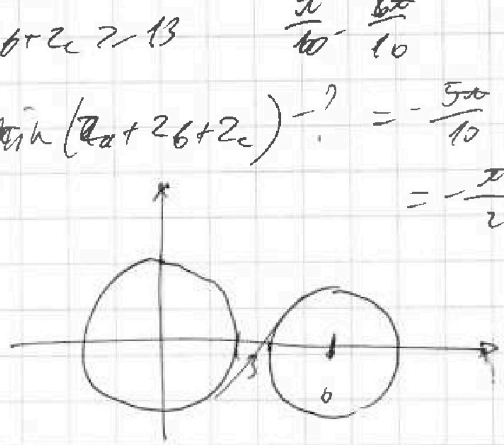
$= -\frac{5\pi}{10}$

$= -\frac{\pi}{2}$

$\sin(z_a + z_b + z_c) - ?$

$(x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ (x-6)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

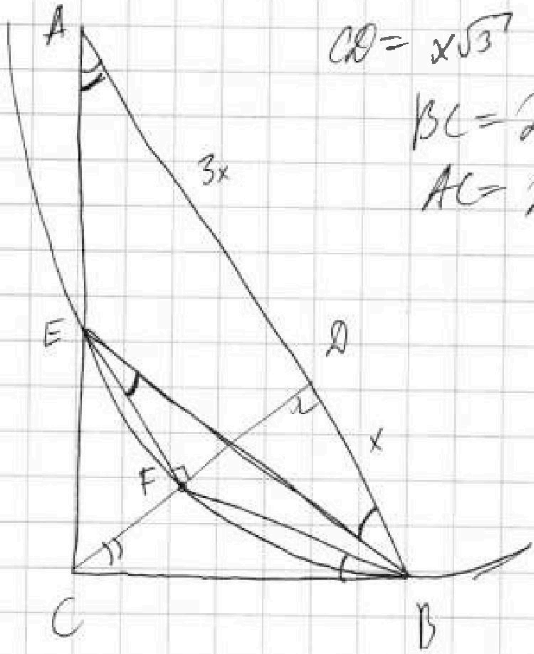


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$CD = x\sqrt{3}$

$BC = 2x$

$AC = 2x\sqrt{3}$

$CF = y$

$CE = 2y$

$AE = 2x\sqrt{3} - 2y$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB}$$

$$\frac{y}{2x\sqrt{3}-2y} = \frac{2x}{4x}$$

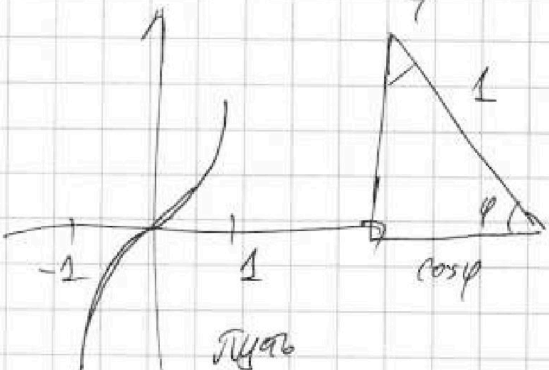
$$2y = 2x\sqrt{3} - 2y$$

$$y = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2}\cdot 2x \cdot 2x\sqrt{3} = 2x^2\sqrt{3}$$

$$S(CEF) = \frac{1}{2} CF \cdot FE = \frac{1}{2}\cdot y \cdot y\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \frac{8}{3}$$



$$5\arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}$$