МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \dfrac{3\pi}{2} + x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

   а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

   б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$ab = k\,2^7 3^{11} 5^{14}$ $\quad bc = l\,2^{13} 3^{15} 5^{18}$ $\quad ac = m\,2^{14} 3^{17} 5^{43}$; $k, l, m \in N$

$(abc)^2 = \cancel{klm}\ ab \cdot ac \cdot bc = klm \cdot 2^{34} 3^{43} 5^{75}$

$(abc)^2 \vdots 3^{43} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 3^{44}$ (чёт. степени всех делителей), $(abc)^2 \vdots 5^{75} \Rightarrow (abc)^2 \vdots 5^{76}$

$\Rightarrow klm \vdots 15$ $\quad klm = 15t,\ t \in N$

$(abc)^2 = \left(\frac{klm}{15}\right) \cdot 2^{34} 3^{44} 5^{76}$ $\quad \sqrt{t} \in N$ $\quad abc = \sqrt{t}\ 2^{17} 3^{22} 5^{38}$.

$abc \vdots ac \Rightarrow abc \vdots 5^{43} \Rightarrow \sqrt{t} \vdots 2^5$ $\quad t \vdots 2^{10}$; $klm \vdots (3 \cdot 5 \cdot 2^{10})$

$\sqrt{t} = f\,2^5,\ f \in N$

$abc = f\,2^{17} 3^{22} 5^{43}$ $\quad abc \vdots (2^{17} 3^{22} 5^{43})$

Докажем, что возможно $f = 1$ (и тогда $(abc)_{min} = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$)

Если $klm = 3 \cdot 5 \cdot 2^{10}$ это не вступает в конфликт ни с одним из условий. Тогда $t = \frac{klm}{15} = 2^{10}$; $\sqrt{t} = 2^5$; $f = \frac{\sqrt{t}}{2^5} = 1$ — это возможно. ЧТД

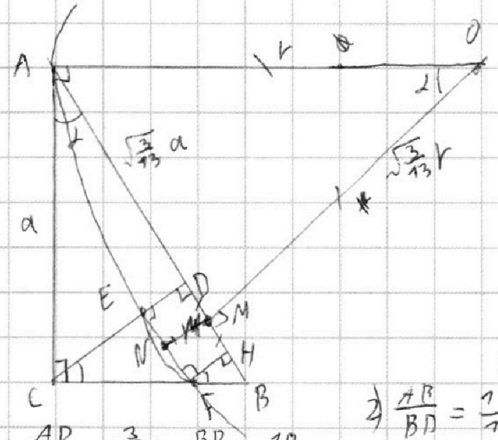
Ответ: $(abc)_{min} = 2^{17} 3^{22} 5^{43}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\omega(O, OA) \cap CD = E$, $\cap CB = F$

$AB \parallel EF$ $\quad \frac{AB}{BD} = 1{,}3$

$k = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}}$ — ?

1) $FH \perp AB$; $EF \parallel AB \Rightarrow ED = FH$

$OE = OF \Rightarrow O \in$ ср. пер. к EF (и DH)

M - ср. DH; $OM \perp AB$; N - ср. EF; $ON \perp EF$

$OA \perp AC$, $OM \perp AB \Rightarrow \angle AOM = \angle CAB = \alpha$

2) $\frac{AB}{BD} = \frac{13}{10}$ $\quad \frac{AD+BD}{BD} = \frac{13}{10}$ $\quad 1 + \frac{AD}{BD} = 1 + \frac{3}{10}$ $\quad \frac{AD}{BD} = \frac{3}{10}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{3}{13}$; $\frac{BD}{AB} = \frac{10}{13}$ $\quad \cos\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ $\quad AC^2 = \frac{3}{13}AB^2$ $\quad BC^2 = AB^2 - AC^2 = \frac{10}{13}AB^2$

$OF = OA = OE = r$ $\quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \sqrt{\frac{3}{13}}$ $\quad OM = r\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{13}}\, r$; $\sin\alpha = \sqrt{\frac{10}{13}}$

$AM = r\sin\alpha = \sqrt{\frac{10}{13}}\, r$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{10}{3}}$ $\quad AC = a$ $\quad BC = \sqrt{\frac{10}{3}}\, a$

$AB = \sqrt{\frac{13}{3}}\, a$ $\quad AD = \sqrt{\frac{3}{13}}\, a$ $\quad HM = DM = AM - AD = \sqrt{\frac{10}{13}}\, r - \sqrt{\frac{3}{13}}\, a$

$DB = \frac{10}{13} AB = \frac{10}{\sqrt{39}}\, a$ $\quad BH = DB - 2DM = \frac{10}{\sqrt{39}}\, a + 2\sqrt{\frac{3}{13}}\, a - 2\sqrt{\frac{10}{13}}\, r = \frac{10+6}{\sqrt{39}}\, a - \sqrt{\frac{40}{13}}\, r$

$NM = FH = HB\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \left(\frac{16}{\sqrt{39}}\, a - 2\sqrt{\frac{10}{13}}\, r\right) = 1{,}6\sqrt{\frac{10}{13}}\, a - 2\sqrt{\frac{3}{13}}\, r$

$ON = OM + NM = \sqrt{\frac{3}{13}}\, r + 1{,}6\sqrt{\frac{10}{13}}\, a - 2\sqrt{\frac{3}{13}}\, r = 1{,}6\sqrt{\frac{10}{13}}\, a - \sqrt{\frac{3}{13}}\, r$; $EN = DM = \sqrt{\frac{10}{13}}\, r - \sqrt{\frac{3}{13}}\, a$

$OE = r$; Th Пифагора: $ON^2 + NE^2 = OE^2$

$\left(1{,}6\sqrt{\frac{10}{13}}\, a - \sqrt{\frac{3}{13}}\, r\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{10}{13}}\, r - \sqrt{\frac{3}{13}}\, a\right)^2 = r^2$

$\left(\frac{16}{\sqrt{130}}\, a - \sqrt{\frac{3}{13}}\, r\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{13}}\, a - \sqrt{\frac{10}{13}}\, r\right)^2 = r^2$ $\quad \frac{16^2}{30} a^2 + \frac{3}{13} a^2 + \cancel{\frac{3+10}{13} r^2} +$

$\cancel{2\frac{16}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{3}{13}}\, ar - 2\sqrt{\frac{3}{13}}\cdot\sqrt{\frac{10}{13}}\, ar = r^2}$ $\quad \cancel{\frac{256\cdot 13 + 3\cdot 30}{390}\, a^2} = \left(32\sqrt{\frac{3}{390}} +\right.$

$\cancel{\sqrt{\frac{13}{3}} - \sqrt{\frac{3}{13}} = \frac{13-3}{\sqrt{39}} = \frac{10}{\sqrt{39}} = DB}$ $\quad \left. + 2\frac{\sqrt{30}}{13}\, ar\right) = \left(\frac{32}{13}\sqrt{\frac{39}{30}} + \frac{2}{13}\sqrt{30}\right) ar = \frac{2}{13}\left(16\sqrt{\frac{39}{30}} + \sqrt{30}\right) ar$

$\cancel{\frac{256\cdot 13 + 390}{30\cdot 390}\, a = \left(32\sqrt{\frac{39}{30}} + 60\right) r}$ $\quad \cancel{\frac{r}{a} = \frac{3+48}{30\left(32\sqrt{\frac{39}{30}} + 60\right)}}$

$CD = AD\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{3}{13}}\cdot\sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{10}{13}}\, a$

$\triangle ACD \sim \triangle CEF$; $k = \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \left(\frac{CD}{EF}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{10}{13}}\, a}{2\sqrt{\frac{10}{13}}\, r - 2\sqrt{\frac{3}{13}}\, a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}\frac{r}{a} - 2\sqrt{3}}\right)^2$

$\frac{16^2}{130} a^2 + \frac{30}{130} a^2 + \cancel{\frac{3+10}{13} r^2} - \left(2\frac{16\sqrt3}{13\sqrt{10}} + 2\frac{10\sqrt3}{13\sqrt{10}}\right) ar = \cancel{r^2}$

$\frac{256+30}{130}\, a = \frac{2\cdot 26\sqrt3}{13\sqrt{10}}\, r = 4\sqrt{\frac{3}{10}}\, r = \frac{286}{130}\, a$ $\quad \sqrt{\frac{3}{10}}\, r = \frac{143}{65}\, a$

$\frac{r}{a} = \frac{143\sqrt{10}}{65\sqrt3} = \frac{1430\sqrt3}{195\sqrt{10}}$ $\quad k = \left(\frac{\sqrt{10}}{2\frac{1430}{195}\sqrt3 - 2\sqrt3}\right)^2 = \frac{10}{12}\left(\frac{1}{\frac{1430}{195} - 1}\right)^2 = \frac{10}{12}\left(\frac{195}{1235}\right)^2$

$= \frac{10}{12}\left(\frac{15}{95}\right)^2 = \frac{10}{12}\cdot\left(\frac{3}{19}\right)^2 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3^2}{19^2} = \frac{15}{2\cdot 19^2} = \frac{15}{722}$ $\quad$ Ответ: $\frac{15}{722}$

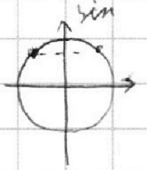
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$



$\arccos(t) \in [0; \pi]$ $\quad 5\arccos(t) \in [0; 5\pi]$

$\frac{3\pi}{2} + x \in [0; 5\pi]$; $x \in [-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

$5\arccos(\sin x) = 5\frac{\pi}{2} - 5\arcsin(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$, $-5\arcsin(\sin x) = x - \pi$

I) $x \in \bigcup_{n\in Z} [2\pi n - \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$ $\quad \arcsin(\sin x) = x + 2\pi k (k \in Z)$ $\quad -x - 10\pi k = x - \pi$

$2x = \pi(1 - 10k)$ $\quad x = \frac{\pi}{2}(1 - 10k)$ $\quad \begin{cases} x \geq -\frac{3\pi}{2} \\ x \leq \frac{7\pi}{2} \end{cases}$ $1 - 10k \geq -3$ $\quad 10k \leq 4$ $\quad k \leq 0,2$; $1 - 10k \leq 7$ $\quad 10k \geq -6$ $\quad k \geq -0,6$ $\quad k = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ Проверка: ~~$5\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$~~ $\quad 5\arccos(\sin\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ $\quad 0 = 2\pi$ - неверно

II) $x \in \bigcup_{n\in Z} (2\pi n + \frac{\pi}{2}; 2\pi n + \pi)$ $\quad \arcsin(\sin x) = \pi - x + 2\pi k, k \in Z$

$-5\pi + 5x - 10\pi k = x - \pi$ $\quad 4x = (4 + 10k)\pi$ $\quad x = \frac{\pi}{2}(2 + 5k)$ $\begin{cases} x \geq -\frac{3\pi}{2} \\ x \leq \frac{7\pi}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 2 + 5k \geq -3 \\ 2 + 5k \leq 7 \end{cases}$

$\begin{cases} 5k \geq -5 \\ 5k \leq 5 \end{cases}$ $\quad k \in \{-1; 0; 1\}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3\pi}{2} \\ x = \pi \\ x = \frac{7\pi}{2} \end{array}\right.$ $\quad$ Проверка: $x = -\frac{3\pi}{2}$: $5\arccos(\sin -\frac{3\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}$ $\quad 0 = 3\pi$ - неверно; $x = \pi$: $5\arccos(\sin\pi) = \frac{3\pi}{2} + \pi$ $\quad 5 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\frac{\pi}{2}$ - верно

$x = \frac{7\pi}{2}$: $5\arccos(\sin\frac{7\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{2}$ $\quad 5\pi = 5\pi$ - верно

Ответ: $x = \pi$, $x = \frac{7\pi}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

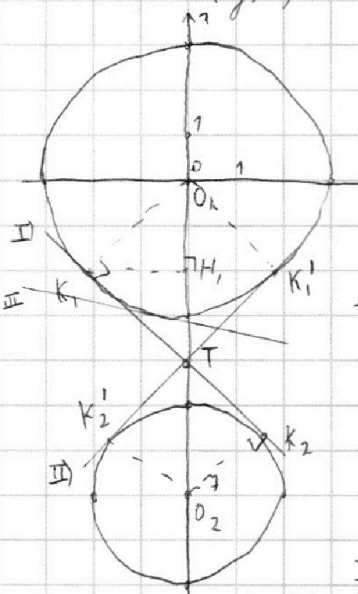
МФТИ

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9) = 0 \end{cases}$$

Найти a: $\forall b$; 4 решения

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно не содержит a и b

$$\left[\begin{array}{l} x^2+14x+y^2+45=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+14x+49+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} (x+7)^2+y^2=2^2 \\ x^2+y^2=3^2 \end{array}\right.$$ — задаёт в осях $(y;x)$ на коорд. пл-ти окружности $\omega_1((0;-7),2)$ и $\omega_2((0;0),3)$



Первое уравнение задаёт прямую $x = -3ay + 7b$

У уравнения 4 решения $\Leftrightarrow$ прямая пересекает обе окружности

Рассмотрим те a, при которых условие не выполняется, т.е. прямая касается обоих окружностей либо касается лишь одной (и не может иметь общих точек с другой), при этом, т.к. b варьируется, условие не должно выполняться при параллельном переносе, а значит, окружности в разных полуплоскостях отн. $x = -3ay + 7b$

I) $\triangle O_1K_1T \sim \triangle O_2K_2T$ $\quad \frac{O_1T}{O_2T} = \frac{O_1K_1}{O_2K_2} = \frac{3}{2}$. $\quad O_1O_2 = 7 \quad O_1T = \frac{3}{5}O_1O_2 = \frac{21}{5}$

$O_2T = \frac{2}{5}O_1O_2 = \frac{14}{5} \qquad \cos\angle K_1O_1T = \frac{O_1K_1}{O_1T} = \frac{O_1H_1}{O_1K_1} \qquad O_1H_1 = \frac{O_1K_1^2}{O_1T} = \frac{9}{\frac{21}{5}} = \frac{15}{7}$

$H_1T = \frac{21}{5} - \frac{15}{7} = \frac{3(49-25)}{35} = \frac{72}{35} \qquad K_1H_1 = \sqrt{O_1K_1^2 - O_1H_1^2} = \sqrt{3^2 - \frac{15^2}{49}} = 3\sqrt{\frac{49-25}{49}} = \frac{3}{7}\sqrt{24} = \frac{6}{7}\sqrt{6}$

$\operatorname{tg}\angle H_1K_1T = \frac{H_1T}{K_1H} = \frac{72}{35}\cdot\frac{7\sqrt6}{6} = \frac{12\sqrt6}{5}$ Угловой коэф. — тангенс угла наклона: $-3a = -\frac{12\sqrt6}{5} \quad a = \frac{4\sqrt6}{5}$

II) Аналогично $-3a = \frac{12\sqrt6}{5} \qquad a = -\frac{4\sqrt6}{5}$

III) $a \in \left(-\frac{4\sqrt6}{5}; \frac{4\sqrt6}{5}\right)$ — усл. ситуации касания лишь одной окр-ти

Когда нет 4 решений, $a \in \left[-\frac{4\sqrt6}{5}; \frac{4\sqrt6}{5}\right]$, когда есть

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{4\sqrt6}{5}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt6}{5}; +\infty\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \log_7^4(6x) - 2\log_{6x}7 = \log_{36x^2}343 - 4 \\ \log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4 \end{cases} \qquad xy - ?$$

ОДЗ: $x, y > 0;\ y \neq 1,\ x \neq \frac{1}{6}$; пусть $k = \log_7 6x$, $t = \log_7 y$; $k, t \neq 0$

$$\begin{cases} k^4 - \frac{2}{k} = \frac{3}{2k} - 4 \\ t^4 + \frac{6}{t} = \frac{5}{2t} - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} k^4 = \frac{7}{2k} - 4 \\ t^4 = -\frac{7}{2t} - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} k^5 + 4k = 3{,}5 \\ t^5 + 4t = -3{,}5 \end{cases}$$

$k^5 + t^5 + 4(k+t) = 0 \qquad (t+k)(k^4 - k^3t + k^2t^2 - kt^3 + t^4 + 4) = 0$

$(t+k)\left(k(k^3 - t^3) - t(k^3 - t^3) + 4\right) = 0 \qquad (t+k)\left((k-t)^2(k^2 + kt + t^2) + 4\right) = 0;\ (k-t)^2 \geq 0,$

$k^2 + kt + t^2 \geq 0\ \left(t \neq 0;\ \left(\frac{k}{t}\right)^2 + \left(\frac{k}{t}\right) + 1 = 0;\ D = 1 - 4 < 0;\ \underline{\cup}\ > 0\right)$, $\Rightarrow (k-t)^2(k^2 + kt + t^2) + 4 > 0$

$t + k = 0 \qquad t = -k$

Замена следствием: $t = -k \qquad \log_7 6x = -\log_7 y \qquad 6x = \frac{1}{y}$

$xy = \frac{1}{6}$ – ед. возможное значение.

Проверка:

$2k^5 + 8k - 7 = 0$; ~~$k = \frac{7}{2}$: $2 \cdot \frac{7^5}{2^5} + \frac{8 \cdot 32 \cdot 7}{2^5} - \frac{7 \cdot 32}{2^5} = 0$, $2 \cdot 7^4 + 128 \cdot 7 - 16 = 0$ – не уд.~~

$f(k) = 2k^5 + 8k$; $f(k) \nearrow$; $f(0) = 0$; $f(1) = 10 \Rightarrow \forall k \in (0; 10)$: $f(k) = 7$
$7 \in (0; 10)$ $\quad k \neq 0, k \neq 1$

$(2k^5 + 8k = 7)$

– k сущ. если сущ k, то $t = -k$: $2t^5 + 8t = -(2k^5 + t) = -7$ $\quad t \neq 0, t \neq -1$

– t сущ. $\Rightarrow x$ и y сущ. ($k, t \neq 0 \Rightarrow$ ~~$x \neq 1, y =$~~ $y \neq 1$, $x \neq \frac{1}{6}$ – уд.)

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$

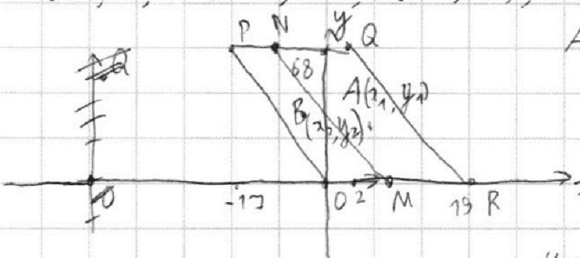
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$O(0;0)$, $P(-17;68)$ $Q(2;68)$, $R(19;0)$



A и B выше OR, но ниже PQ

$0 \leq y_1, y_2 \leq 68$

PO: $y = -4x$; QR: $y = -4(x-19) = 76 - 4x$

A и B выше PO, но ниже QR

$-4x_1 \leq y_1 \leq 76 - 4x_1$; $-4x_2 \leq y_2 \leq 76 - 4x_2$

$y_1 + 4x_1 \in [0;76]$ $\qquad$ $y_2 + 4x_2 \in [0;76]$

$4x_2 + y_2 - (4x_1 + y_1) = 40$

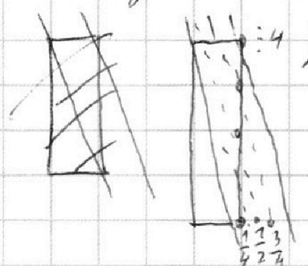
$\cancel{-}(y_1 + 4x_1) \in \cancel{[-76;0]}\ [0;76]$ $\qquad$ $4x_2 + y_2 \in [40;116]$ $\quad$ $y_2 + 4x_2 \in [40;76]$

$(4x_1 + y_1) = (4x_2 + y_2) - 40$ $\qquad$ $(4x_1 + y_1) \in [0;36]$

$y_1 = -4x_2 + b$, $b \in [0;36]$ $\qquad$ $y_2 = -4x_2 + d$, $d \in [40;76]$

– уравнения прямых, параллельных PO

$(4x_2 + y_2) - (4x_1 + y_1) = 40$ $\qquad$ $d - b = 40$. ~~Имеем~~



Две прямые, полные целых точек, лежат по x через один. $x_1 = \frac{b - y}{4}$; ~~$y \vdots 4$, $b \vdots 4$~~ $y \underset{4}{\equiv} b$

I) при $y \underset{4}{\equiv} 0$: $x_1 = \frac{b}{4}$ $\quad$ $x_1 \in [0;9]$ – 9 прямых – 9 пар прямых

$y \underset{4}{\equiv} 0$ $x_2 = \frac{d}{4}$ $\quad$ $x_2 \in [10;19]$ – 9 прямых

на каждой прямой $\frac{68}{4} + 1$ точек (уч. на границе)

если $y \not\vdots 4$, то $x \notin \mathbb{Z}$

– итого 18. На каждой из прямых 18 точек внутри $PQRO$. Имеем $9 \cdot 18^2$ точек при $y \underset{4}{\equiv} 0$

II) при $y \underset{4}{\equiv} 1, 2, 3$, у нас нет точек на границах, получаем их параллельным переносом. $y \underset{4}{\equiv} 1$ $\quad$ $x \equiv \frac{b-1}{4}$ $\quad$ $x_1 \in [0;8]$ – 8 прямых – 8 пар прямых

$x \equiv \frac{d-1}{4}$ $\quad$ $x_2 \in [10;18]$ – 8 прямых

Ан. для $y \underset{4}{\equiv} 2, 3$. Имеем $3 \cdot 8 \cdot 17^2$

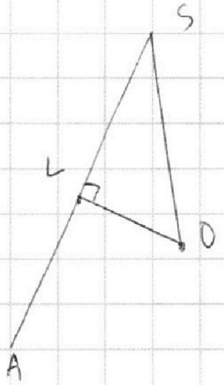
~~$9 \cdot 18^2 = (8+1)(18+1)$~~

Ответ: $9 \cdot 18^2 + 3 \cdot 8 \cdot 17^2$ $\quad$ $(= 9852$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

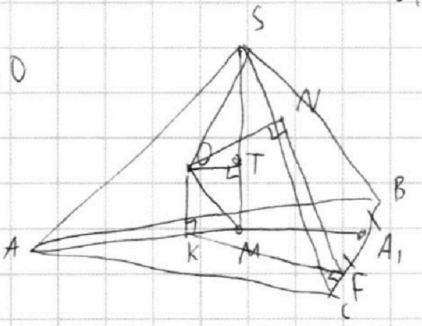


$SO = 5;\ OL = 4 \Rightarrow SL = \sqrt{SO^2 - OL^2} = 3;\ AL = 7$

$AK = AL = 7 \quad AM = 10 \quad AA_1 = 15 \quad KM = 3$

$KA_1 = 15 - 7 = 8$

$OM = \sqrt{KM^2 + OK^2} = 5 = OS \quad OM = OS$



$\triangle SOM$ − равнобед.; OT − мед, выс, бис.

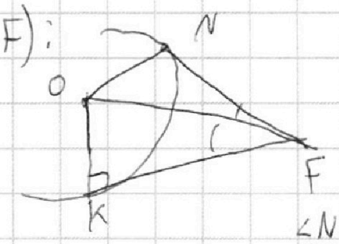
$OA_1 = \sqrt{OK^2 + KA_1^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{1+4} = 4\sqrt{5}$

$OA = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$

KF − перп. к BC

$\frac{KF}{AH} = \frac{KA_1}{AA_1} = \frac{8}{10} \quad KF = \frac{8}{10} \cdot 12 = \frac{96}{10} = 9{,}6$

(KOF):



$FN = FK$ (касательные)

$OK = 4;\ KF = 9{,}6$

$\angle NFK = \widehat{(SBC), (ABC)}$

$\frac{\angle NFK}{2} = \operatorname{arctg} \frac{OK}{KF} = \frac{40}{96} = \frac{20}{48} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

$\sin \frac{\angle NFK}{2} = \frac{5}{13}$ (я знаю, т.к. $5^2 + 12^2 = 13^2$)

~~sin~~ $\cos \angle NFK = 1 - 2\sin^2 = 1 - \cancel{2 \cdot \frac{25}{156} = 49}\ 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} =$

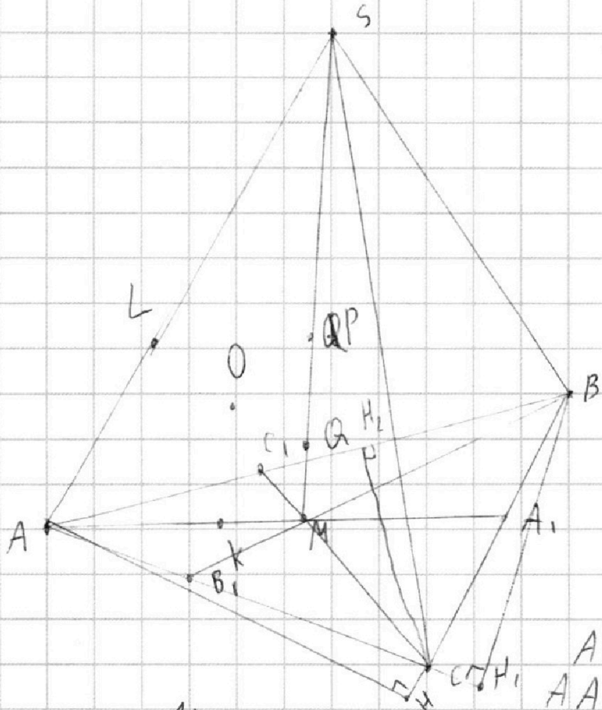
$= \frac{169 - 50}{169} = \frac{119}{169}$

Ответ: $\angle NFK = \arccos\left(\frac{119}{169}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

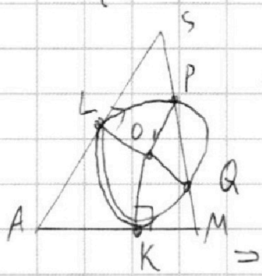
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



O – центр Ω $\quad OL = OK = OQ = OP$

В (ASM): ~~$O_1 = Pr_\perp(O)$~~ $O_1 = Pr_\perp(O)$



$\angle O_1PQ = O_1QP \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O_1PS = \angle O_1QM$
$O_1P = O_1Q,\ PS = QM \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle O_1PS = \triangle O_1QM$
$\Rightarrow OS = OM$

$\triangle O_1LS\ O_1KM$ – прямоуг. $O_1L = O_1K$,
$OS = OM \Rightarrow \triangle O_1LS = \triangle O_1KM$; $LS = KM$
AK, AK – кас. $\Rightarrow AL = AK$
$AS = AL + LS = AK + KM = AM$
$AM = AS = BC = 10$
$AA_1 = \frac{3}{2}AM = 15$

AH – выс. $\triangle ABC$; ~~AH~~ $H \in BC$ ~~(нет на рис.)~~ $\quad \frac{1}{2}AH \cdot BC = S_{ABC} = 60$

$AH = \frac{120}{BC} = 12 \qquad A_1H = \sqrt{AA_1^2 - AH^2} = 9 \qquad BA_1 = \frac{BC}{2} = 5;\ BH = 14;\ CH = 4$

$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \qquad AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{144+196} = \sqrt{340}$

BH_1 – выс к AC $\quad BH_1 = \frac{2S}{AC} = \frac{120}{4\sqrt{10}} = \frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10} \qquad CH_1 = \sqrt{BC^2 - BH_1^2} =$
$= \sqrt{100-90} = \sqrt{10} \qquad B_1C = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{10};\quad B_1H_1 = B_1C + CH_1 = 3\sqrt{10}$

$BB_1 = \sqrt{BH_1^2 + H_1B_1^2} = \sqrt{90+90} = \sqrt{180} = 3\sqrt{20} \qquad CH_2$ – выс. к AB

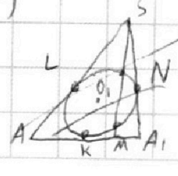
$CH_2 = \frac{2S}{AB} = \frac{120}{\sqrt{340}} = \frac{120}{340}\sqrt{340} = \frac{6}{17}\sqrt{340} \qquad BC_1 = AC_1 = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{340}}{2}$

~~$C_1H_2 = BC_1 - BH_2$~~ $\quad BH_2 = \sqrt{BC^2 - CH_2^2} = \sqrt{100 - \frac{6^2}{17^2}\cdot 340} = \sqrt{100 - \frac{36}{17}\cdot 20} = \sqrt{\frac{1700-720}{17}} =$
$= \sqrt{\frac{980}{17}} = \frac{1}{17}\cdot\sqrt{49}\cdot\sqrt{340} = \frac{7}{17}\sqrt{340} \qquad C_1H_2 = BC_1 - BH_2 = \left(\frac{17}{34} - \frac{14}{34}\right)\sqrt{340} = \frac{3\sqrt{340}}{34}$

$CC_1 = \sqrt{CH_2^2 + H_2C_1^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{17}\right)^2 + \left(\frac{3}{34}\right)^2}\sqrt{340} = \frac{\sqrt{144+9}}{17}\cdot\sqrt{340} = \frac{\sqrt{153}}{17}\cdot\sqrt{340} = \frac{3\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}\sqrt{20}}{17} =$

$= 3\sqrt{20} \qquad$ 1) Ответ: $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 3\sqrt{20} \cdot 3\sqrt{20} =$
$= 15 \cdot 9 \cdot 20 = 300 \cdot 9 = 2700$

2) ~~(ASM)~~:



~~$SN = 3 \quad SL = SN = 3$~~ $\qquad$ ~~$O = O_1$~~ $\quad SN = 3,\ NO = 4 \Rightarrow SO = 5$

$OL = OK = OQ = OP = ON = 4$ – радиус $\qquad$ прод. на др. листе

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Черновик

256×13: 768, 256, 3328

~~3328~~ 3418

$1430 - 195 = 1235$

$1235 : 13 = 95$; 117, 65

$135 : 13 = 15$; 13, 65

19×19: 171, 19, 361

14×14: 56, 14, 196

$980 : 17 = 4$; 68, 300

$18 \times 18 = 144$; 18, $324 \times 9 = 2916$

$17 \times 17 = 119$…; 17, $289 \times 8 = 2312$; $2312 \times 3 = 6936$; $6936 + 2916 = 9852$