



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $a_2 = \sqrt{2}(a)$, $b_2 = \sqrt{2}(b)$, $c_2 = \sqrt{2}(c)$,
аналогично определим $a_3, b_3, c_3, a_5, b_5, c_5$.

$\sqrt{p}(n)$ - степень включения p в n .

Из условий:

$$\begin{cases} ab: 2^7 \Rightarrow a_2 + b_2 \geq 7 \\ bc: 2^{13} \Rightarrow b_2 + c_2 \geq 13 \\ ac: 2^{14} \Rightarrow a_2 + c_2 \geq 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 7 + 13 + 14 \Rightarrow a_2 + b_2 + c_2 \geq 17.$$

Аналогично для 3 и 5 получаем

$$\begin{cases} a_3 + b_3 \geq 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \Rightarrow 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{Z} \\ a_3 + c_3 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$

$$\begin{cases} a_5 + b_5 \geq 14 \\ b_5 + c_5 \geq 18 \Rightarrow 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75, a_5, b_5, c_5 \in \mathbb{Z} \\ a_5 + c_5 \geq 43 \end{cases} \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 38$$

Но $a_5 + c_5 \geq 43 \Rightarrow a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$

$$\Rightarrow \sqrt{2}(abc) = a_2 + b_2 + c_2 \geq 17$$

$$\sqrt{3}(abc) = a_3 + b_3 + c_3 \geq 22$$

$$\sqrt{5}(abc) = a_5 + b_5 + c_5 \geq 43$$

$$\Rightarrow abc: 2^{17} 3^{22} 5^{36} \Rightarrow abc \geq 2^{17} 3^{22} 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

... \Rightarrow то годит и малтсе при

$$a_2 = 4 \left\{ \begin{array}{l} a = 2^4 3^7 5^{21} \\ b = 2^3 3^5 5^0 \\ c = 2^{10} 3^{10} 5^{22} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \min(abc) = 2^{17} 3^{22} 5^{48}$$

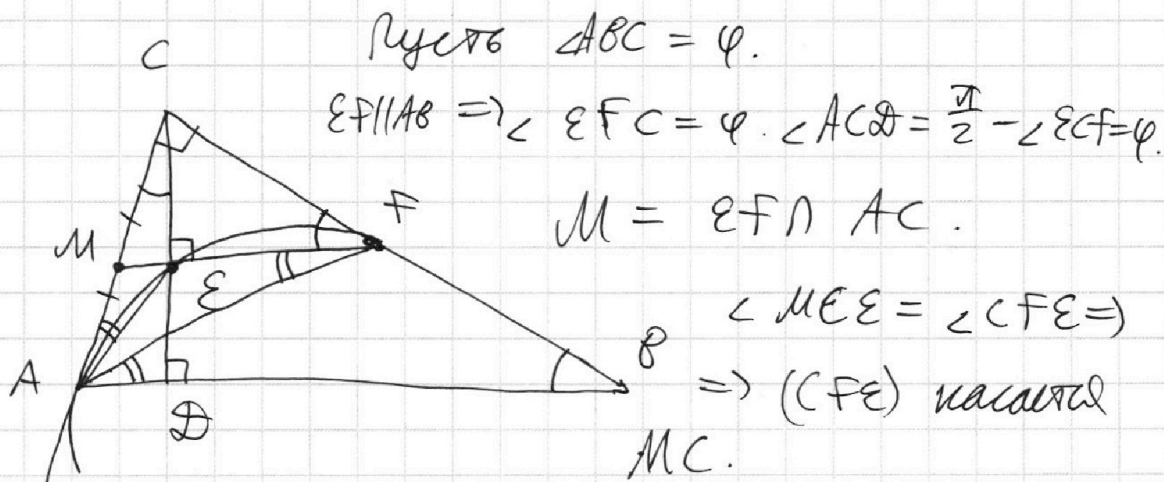
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\Rightarrow ME \cdot MF = \text{pow}(M, (CFE)) = MC^2.$$

$\text{pow}(P, \omega)$ - степень точки P отн. ω .

$$(AFE) \text{ касается } AC \Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF.$$

$$\Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF = MC^2 \Rightarrow MA = MC.$$

$$\Rightarrow S_{\triangle CFE} = \frac{1}{4} S_{\triangle CBD}. \quad (EF \parallel BD \text{ и } MA = MC)$$

$$\Rightarrow MF - \text{ср. линия } \triangle CBD \Rightarrow \frac{S_{CFE}}{S_{CBD}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot (AB - BD)}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot BD} = \frac{a_1 \cdot 3}{1} = a_1 \cdot 3.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle CEF}} = 4 \frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}} = 1,2.$$

Ответ: 1,2.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} - x$$

$$\Rightarrow \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$\Rightarrow \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi k & (1) \\ -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{10} - \frac{x}{5} + 2\pi k & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{6}{5}x = \frac{\pi}{5} - 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \Rightarrow \frac{4}{5}x = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$4x = 4\pi + 10\pi k$$

$$x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n \frac{5\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \pi + \frac{5}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



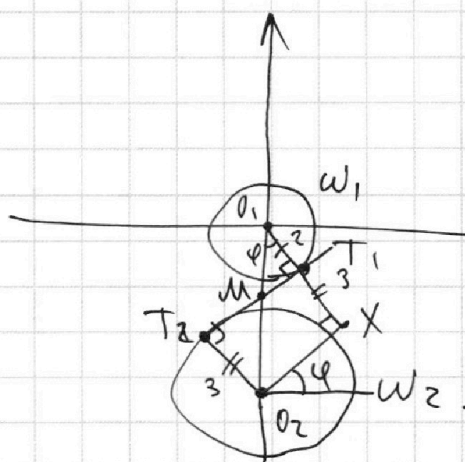
$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 14x + y^2 + 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Построим графики. Это будут окружности
с центрами в $(0;0)$ и $(-7;0)$ и
радиусами 2 и 3.



Рассмотрим их общую
внутреннюю касательную и
их коэффициенты наклона.

$$O_1X = R_1 + R_2 = 5$$

$$O_1O_2 = 7.$$

$$\Rightarrow O_2X = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}.$$

\Rightarrow для 101 касательной

$$\text{коэф. наклона } \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{O_2X}{O_1X} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$(\varphi = \frac{\pi}{2} - \angle O_1O_2X = \angle O_2O_1X).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда для второй касательной, из
анализа, $\psi_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$. $k = -\frac{1}{3a}$.

Тогда, ~~если $k \in (\psi_2; \psi_1)$~~ $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7\sqrt{6}}{3a} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = kx + \frac{7\sqrt{6}}{3a} = w(x)$$

\Rightarrow При $k \in [\psi_2; \psi_1]$, ^{если} любая прямая
такого вида ($w(x)$) будет пересекать
одну из окружностей в 2 точки, то она
не будет пересекать группу, т.к. ~~тогда~~

$$\cancel{k \in (\psi_2; \psi_1)} \quad k \in \psi_2 \leq k \leq \psi_1.$$

\Rightarrow Такое возможно при $k \in (-\infty; \psi_2) \cup (\psi_1; +\infty)$.

выберем в такое, что $\frac{7\sqrt{6}}{3a} = y_M$, где $M =$

$$= T_1, T_2 \cap O_1, O_2. \Rightarrow \text{При } k > \psi_1 \text{ или } k < \psi_2$$

коэф. наклона $w(x)$ будет ^{больше} ~~стольше~~, чем у
касательной (обусловлено) \Rightarrow она пересечет
обе окружности в 2 точки.

$$\Rightarrow -\frac{1}{3a} \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}; +\infty\right) \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{6\sqrt{6}}{5}\right) \cup \left(\frac{6\sqrt{6}}{5}; +\infty\right).$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$(\log_7 y)^5 + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2} = -((\log_7 w)^5 + 4 \log_7 w)$$

то получаем, что $\log_7 y = -\log_7 w$

$$\Rightarrow \log_7 y + \log_7 w = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_7 (yw) = 0 \Rightarrow yw = 1$$

$$\Rightarrow 6xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $xy = \frac{1}{6}$.

Других значений для xy нет,
так как мы делаем равносильные
перекоды и получили однозначный
ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\left. \begin{array}{l} \log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \quad (1) \\ \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2}(7^5) - 4. \quad (2) \end{array} \right\}$$

$$y > 0 \text{ и } 6x > 0 \Rightarrow y = |y|, x = |x|.$$

$$\text{Пусть } |6x| = w. \quad w > 0, |w| = w.$$

Перепишем выражения. $\ln w \neq 0, \ln y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7} \right)^4 - 2 \left(\frac{\ln 7}{\ln w} \right) = \frac{\ln 343}{\ln w^2} - 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7} \right)^4 - 2 \left(\frac{\ln 7}{\ln w} \right) = \frac{3 \ln 7}{2 \ln w} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln w}{\ln 7} \right)^5 - \frac{7}{2} + 4 \left(\frac{\ln w}{\ln 7} \right) = 0$$

$$\Rightarrow (\log_7 w)^5 + 4 \log_7 w = \frac{7}{2}.$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{\ln y}{\ln 7} \right)^4 + 6 \frac{\ln 7}{\ln y} = \frac{5 \ln 7}{2 \ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln y}{\ln 7} \right)^5 + \frac{7}{2} \frac{\ln y}{\ln 7} + 4 = 0. + 4 \frac{\ln y}{\ln 7} = 0.$$

$$\Rightarrow (\log_7 y)^5 + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2}.$$

Функции $y=x$, $y=x^5$ и $y=\log_7 x$
прикидывают каждое значение в

единственной точке \Rightarrow так как

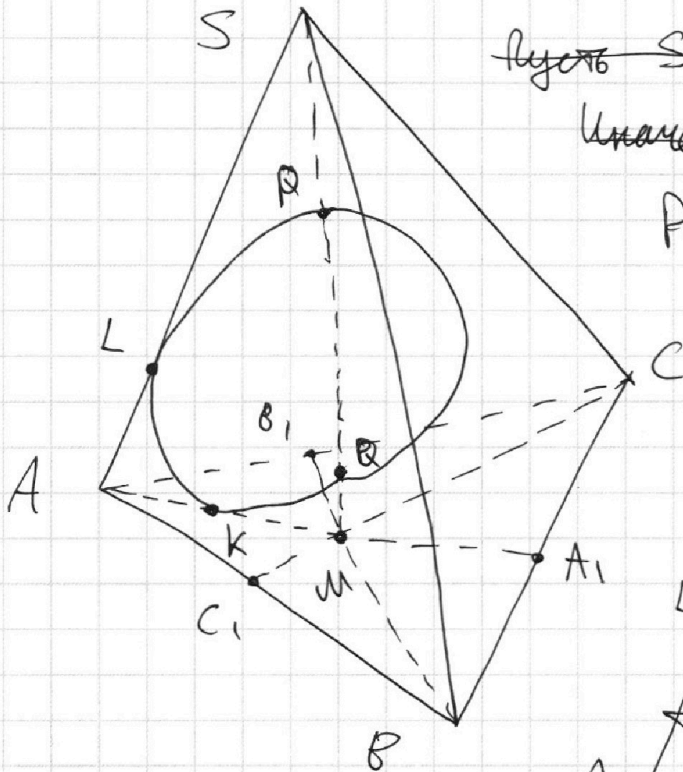
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



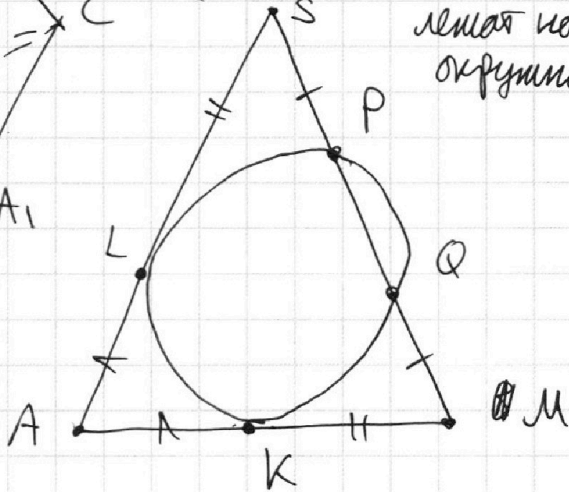
~~Пусть $SP < SQ$.~~

~~Тогда $SP^* = SP - PQ = SQ^*$.~~

Рассмотрим плоскость

$(ASM) \Rightarrow P, Q, L, K$

лежат на
окружности.



$$\begin{aligned} (\star) \quad SP = MQ &\Rightarrow SP \cdot PSQ = SM \cdot QM \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{pow}(S, (PQKL)) = \text{pow}(M, (PQKL)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow MK^2 = LS^2 \Rightarrow MK = LS. \end{aligned}$$

$$\text{Но } AL = AK = \sqrt{\text{pow}(A, (PQKL))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM = \cancel{SA} SA = AL + LS = AK + KM.$$

$$\Rightarrow AM = SA = 10.$$

Рассмотрим $\triangle ABC$.

(\star) [Если P и Q даны в другом положении, т.е. $SP > SQ$, то равенство всё равно выполняется].

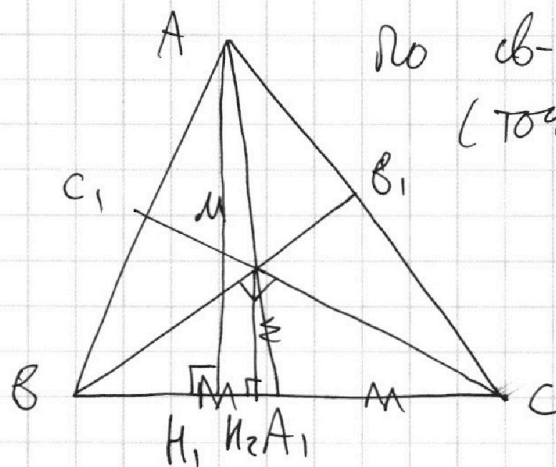
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



По св-ву центра масс
(точки M), $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = 2$.

$$= 2.$$

$$\Rightarrow MA_1 = \frac{1}{2} AM = 5.$$

$$\text{По } BA_1 = CA_1 = \frac{1}{2} BC =$$

$$= 5 = MA_1 \Rightarrow$$

\Rightarrow в $\triangle BMC$ медиана MA_1 равна

повыше стороне $\Rightarrow \angle BMC = \frac{\pi}{2}$.

$$MC = \frac{2}{3} CC_1; \quad MB = \frac{2}{3} BB_1 \Rightarrow BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1.$$

Пусть $H_1, H_2 \in BC$: $AH_1 \perp BC$; $MH_2 \perp BC$.

$$H_1A \parallel MH_2 \Rightarrow \triangle A_1H_2M \sim \triangle A_1H_1A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{H_2M}{H_1M} = \frac{\frac{1}{2} H_2M \cdot BC}{\frac{1}{2} H_1M \cdot BC} = \frac{S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{A_1M}{A_1A} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle BMC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{60}{3} = 20.$$

$$\text{По } S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BM \cdot MC = 2 S_{\triangle BMC} = 40.$$

$$\text{По } BM \cdot MC = \frac{4}{9} BB_1 \cdot CC_1 \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{40}{4} \cdot 9 = 90.$$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15 \Rightarrow AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 =$$

$$= 90 \cdot 15 = 1350.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

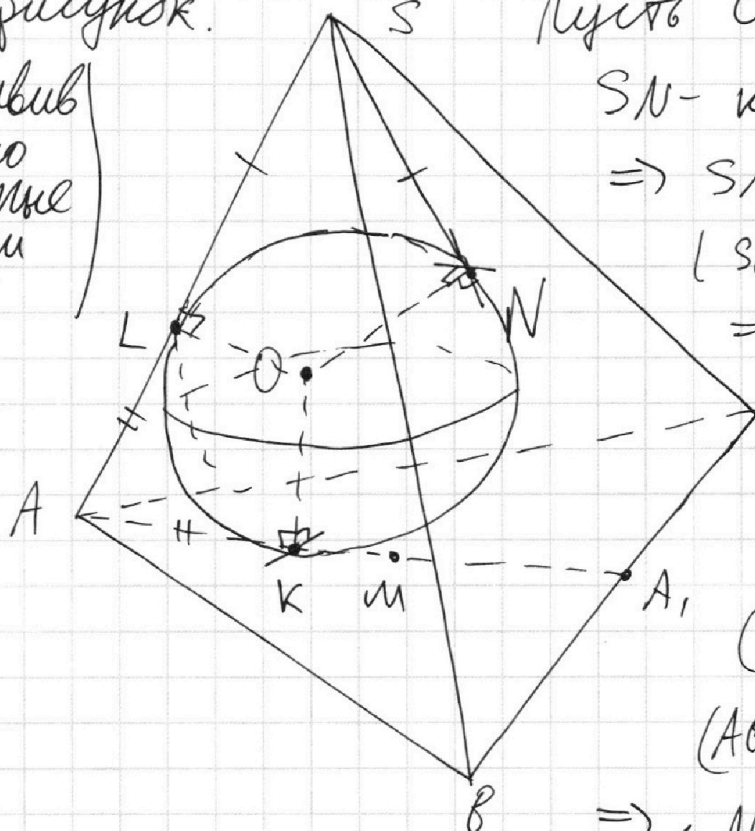
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



... Остался пункт б). Сделаем новый

рисунок.

(оставив только нужные точки)



Пусть O - центр Ω

SN - касательная \Rightarrow

$$\Rightarrow SN = SL = 3.$$

(SL - тоже касательная)

$$\Rightarrow AL = AS - SL = 10 - 3 = 7.$$

$$AK = AL = 7.$$

Ω касается

(BSC) в N и

(ABC) в $K \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NOK$ дополняет

и малый двугранный угол φ при BC до π , так как

Если мы соединим O с точкой T так, чтобы

$OT = \rho(O, BC)$, и опустим из O перпендикуляры

OX, OY на (ABC) и (BSC) , то ~~они взаимно перпендикулярны~~

$(OXTY)$ будет двугранным и $\angle XOY \in \angle YTX = \pi$.

(в данном случае $X = K, Y = N$).

$LO = \rho(O, AS)$ и, $NO = \rho(O, (BSN))$, $OK = \rho(O, (BC))$

$\Rightarrow (LOKA)$ и $(SNLO)$ по (SLO) и (SLA) и (OLA) .

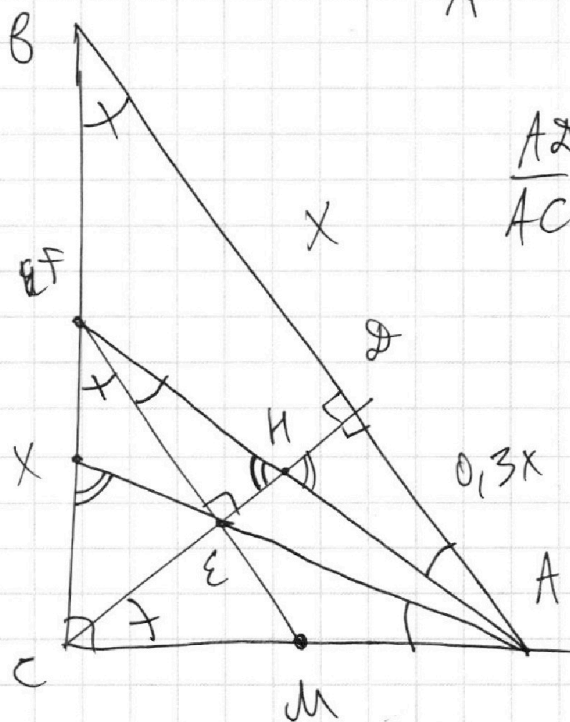
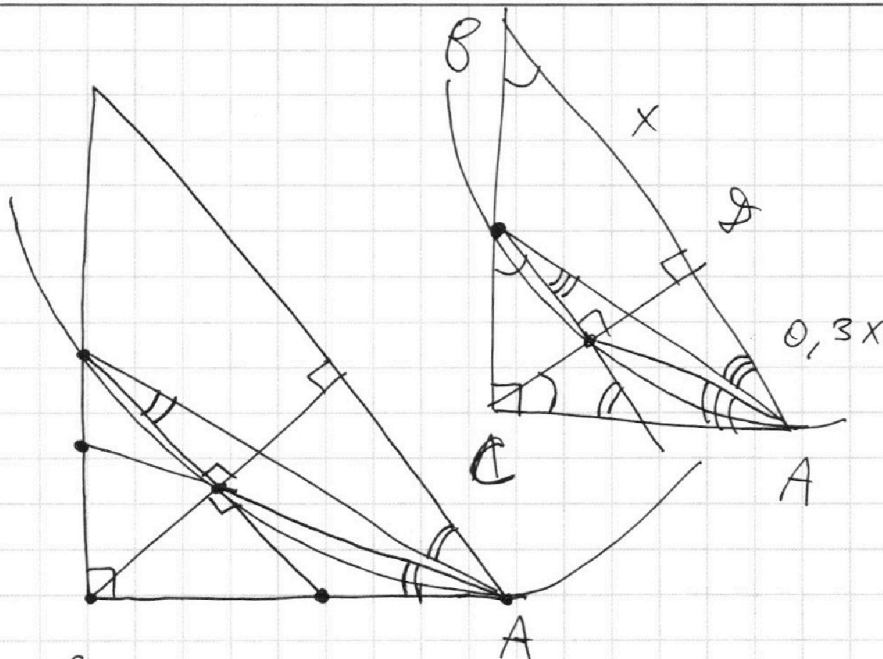
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



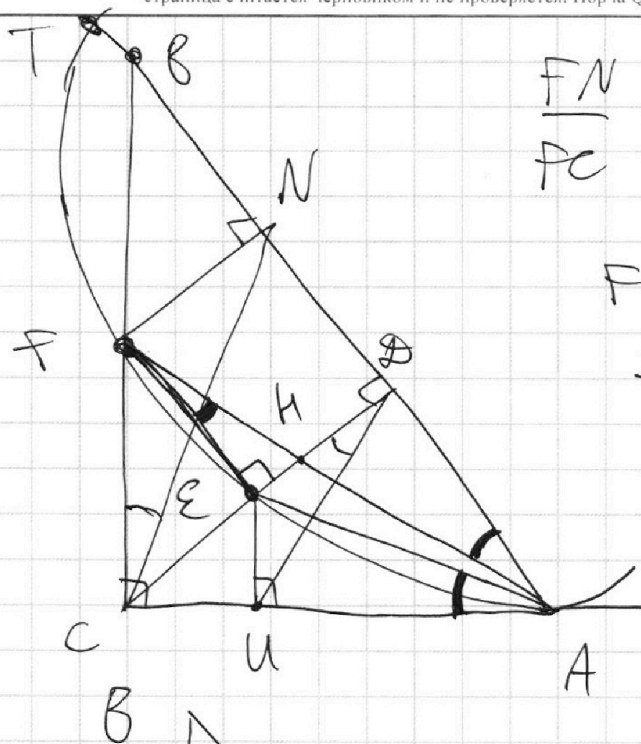
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

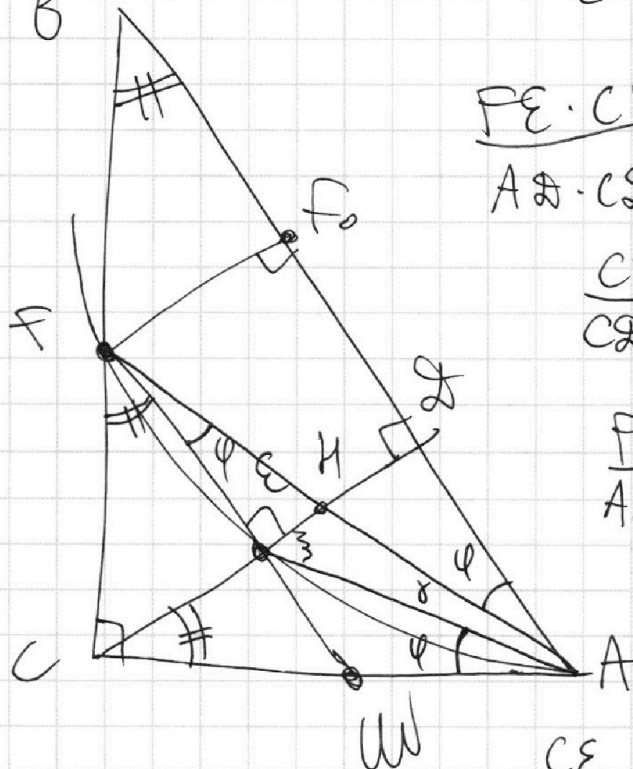
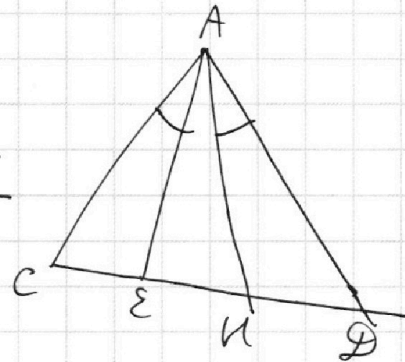
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{FN}{FC} = \frac{\varepsilon\eta}{\varepsilon\theta}$$

$$FC \cdot \varepsilon\eta = FN \cdot \varepsilon\theta$$

$$FC \cdot \varepsilon\eta = \varepsilon\theta^2$$



$$\frac{FE \cdot CE}{AD \cdot CD}$$

$$\frac{CE}{CD} = \frac{FE}{BD}$$

$$\frac{FE}{AD} = \frac{\varepsilon\eta}{\eta\theta}$$

$$\frac{CE \cdot CH}{\varepsilon\theta \cdot \eta\theta} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2$$

$$\frac{CE}{CD} \cdot \frac{\theta\eta}{\eta\theta} = \left(\frac{AC}{AD}\right)^2$$

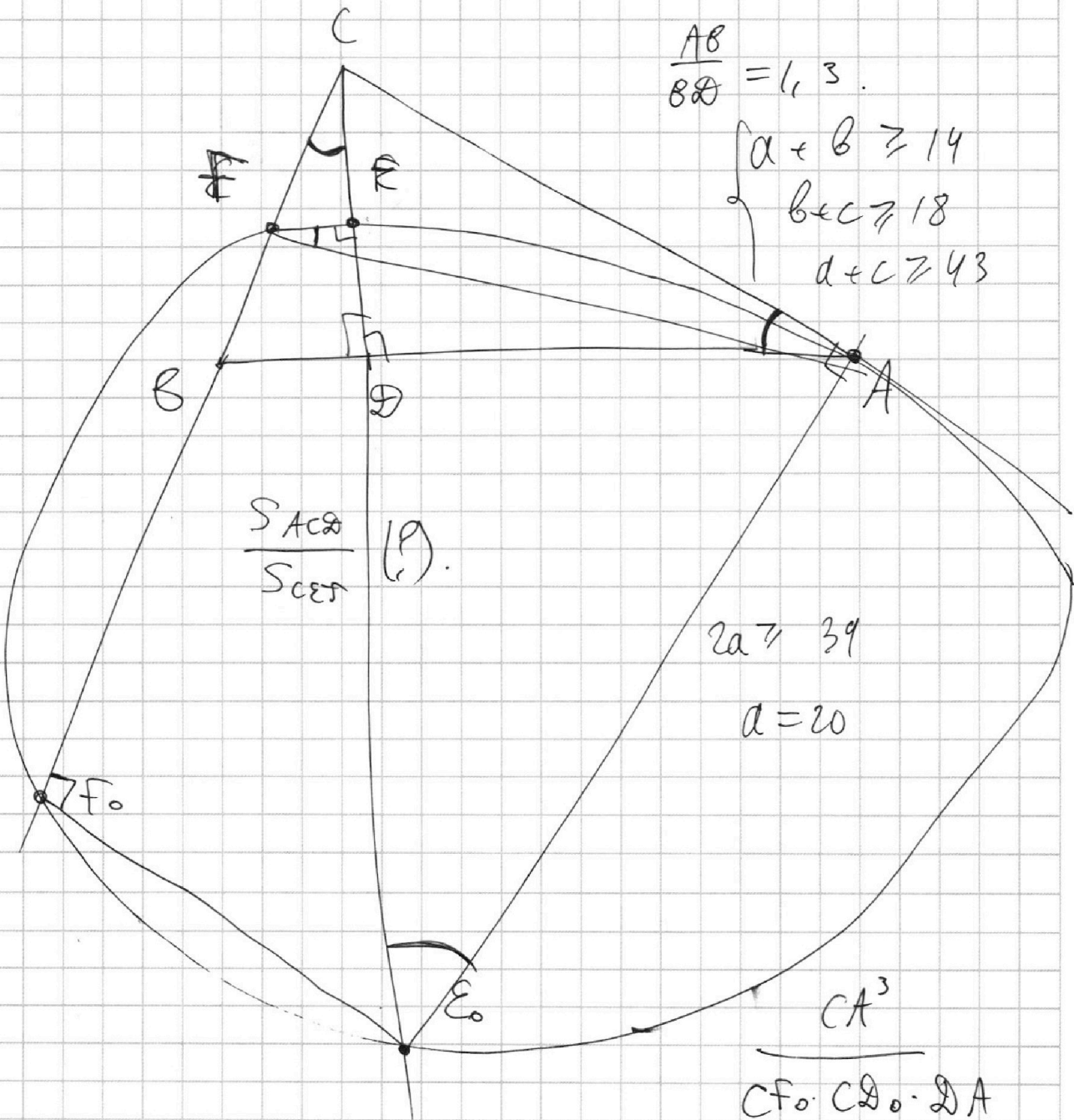
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{AB}{BD} = 1,3$$

$$\begin{cases} a + b \geq 14 \\ b + c \geq 18 \\ d + c \geq 43 \end{cases}$$

$$\frac{S_{ACB}}{S_{CEB}} (P)$$

$$2a \geq 39$$

$$a = 20$$

$$\frac{CA^3}{CF_0 \cdot CE_0 \cdot CA}$$

$$CF \cdot CF_0 = CE \cdot CE_0 = CA^2$$

$$\frac{S_{CFE}}{S_{ACB}} = \frac{CE \cdot FC}{CA \cdot DA} = \frac{CA^4}{CF_0 \cdot CE_0 \cdot CA \cdot DA}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

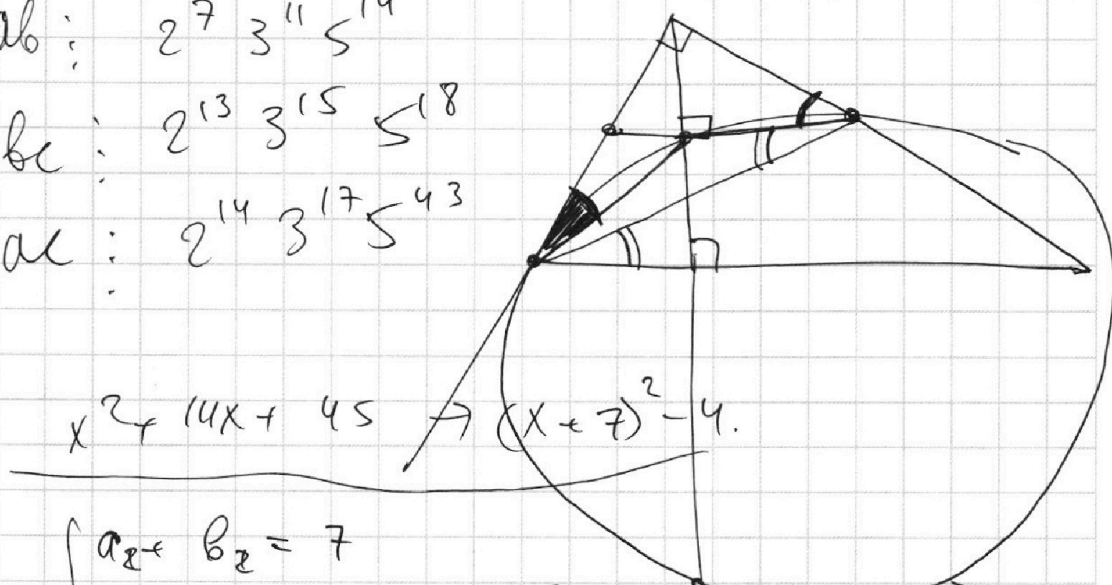
1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ab: & 2^7 3^{11} 5^{14} \\ bc: & 2^{13} 3^{15} 5^{18} \\ ac: & 2^{14} 3^{17} 5^{43} \end{cases}$$



$$x^2 + 14x + 45 \rightarrow (x+7)^2 - 4.$$

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = 7 \\ a_2 + c_2 = 14 \\ b_2 + c_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_2 = 21 - 13 = 8 \\ a_2 = 4 \\ b_2 = 3 \\ c_2 = 10 \end{cases} \checkmark$$

$$\begin{cases} a_3 + b_3 = 11 \\ b_3 + c_3 \geq 15 \\ a_3 + c_3 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_3 = 13, a_3 \geq 7 \\ a = 7 \\ b = 5 \\ c = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a+b+c) \geq (\dots)$$

$$\begin{cases} 2(a_3 + b_3 + c_3) \geq 43 \\ 2(a_2 + b_2 + c_2) \geq 34 \Rightarrow e_2 \\ 2(a_5 + b_5 + c_5) \geq 75 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~log~~
~~ln~~

$$\log_7^5 y + 4 \log_7 y = -\frac{7}{2}$$

$$\log_7^5 6x + 4 \log_7 6x = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \log_7 y = -\log_7 6x \Rightarrow y = (6x)^{-1}$$

$$\frac{\ln y}{\ln 7} = -\frac{\ln 6x}{\ln 7}$$

$$\ln y = -\ln 6x$$

~~$$\Rightarrow y = -6x$$~~

$$\Rightarrow y \neq e^{\ln y} = e^{-\ln 6x}$$

~~$$e^{\ln y + \ln 6x} = 1$$~~

~~$$\ln y + \ln 6x \neq 0$$~~

~~$$\ln(6xy) \neq 0$$~~

$$\ln y + \ln 6x = 0$$

$$\ln(6xy) = 0, \quad 6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x.$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi + 2x}{10}\right).$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi + 2x}{10}\right)$$

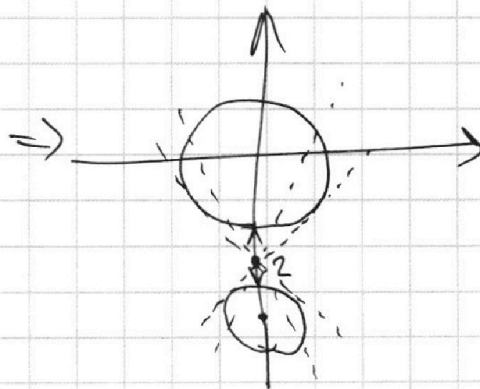
$$\frac{\pi}{2} - x = \frac{3\pi + 2x}{10} + 2\pi k$$

$$\cancel{5\pi} - 10x = 3\pi + 2x + 20\pi k$$

$$\cancel{12x} = 2\pi + 20\pi k$$

$$x = \frac{\pi + 10\pi k}{6}$$

$$\begin{cases} (x+7)^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

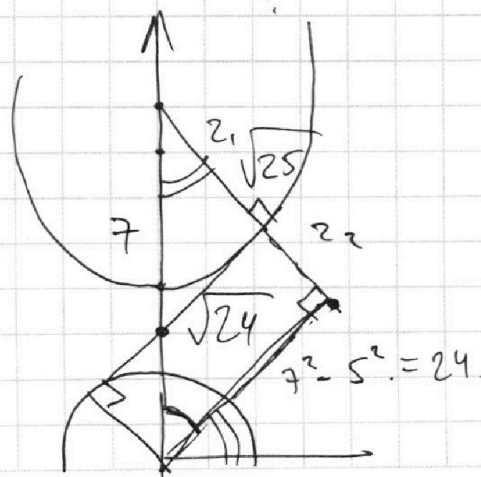


$$y = -\frac{x}{3a} + \left(\frac{7b}{3a}\right)$$

$$y = -\left(\frac{1}{3a}\right)x + c$$

$$y = kx + c$$

$$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \Delta$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x}(7) = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\left(\frac{\ln(6x)}{\ln 7}\right)^4 - 2 \left(\frac{\ln 7}{\ln 6x}\right) = \frac{\ln 343}{\ln(36x^2)} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^4 - 2 \frac{\ln 7}{\ln 6x} = \frac{3 \ln 7}{2 \ln 6x} - 4$$

$$\left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 - \frac{7}{2} + 4 \frac{\ln 6x}{\ln 7} = 0 \quad \Rightarrow x \text{ (?)}$$

$$2x^5 - 7 + 4x = 0$$

$$\log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

$$\left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^4 + 6 \left(\frac{\ln 7}{\ln y}\right) = \frac{5 \ln 7}{2 \ln y} - 4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right)^5 + 4 \left(\frac{\ln 6x}{\ln 7}\right) = \frac{7}{2}$$

$$\left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right)^5 + 4 \left(\frac{\ln y}{\ln 7}\right) = -\frac{7}{2}$$

$$(\ln 6x)^5 + 4 (\ln 6x) (\ln 7)^4 + (\ln y)^5 + 4 (\ln y) (\ln 7)^4$$



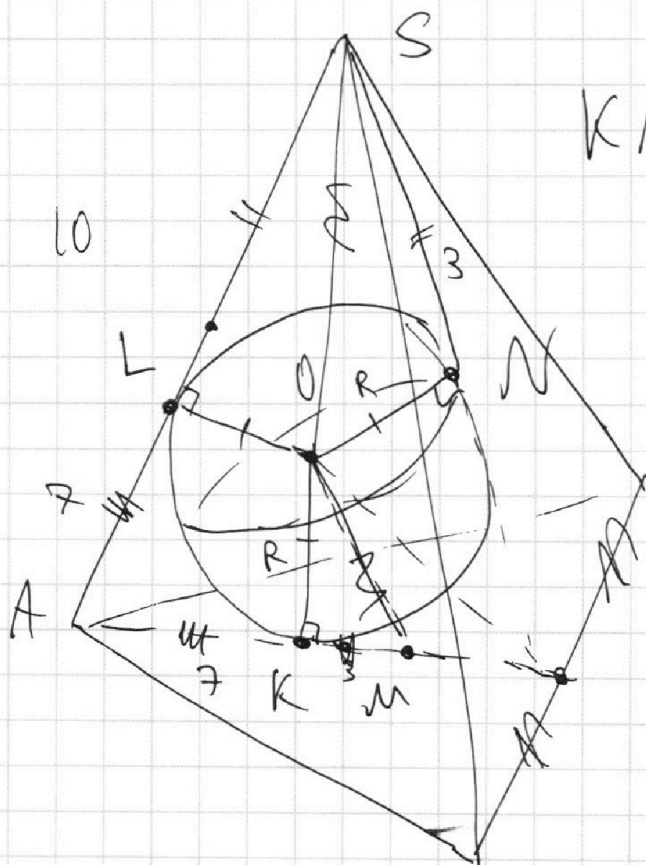
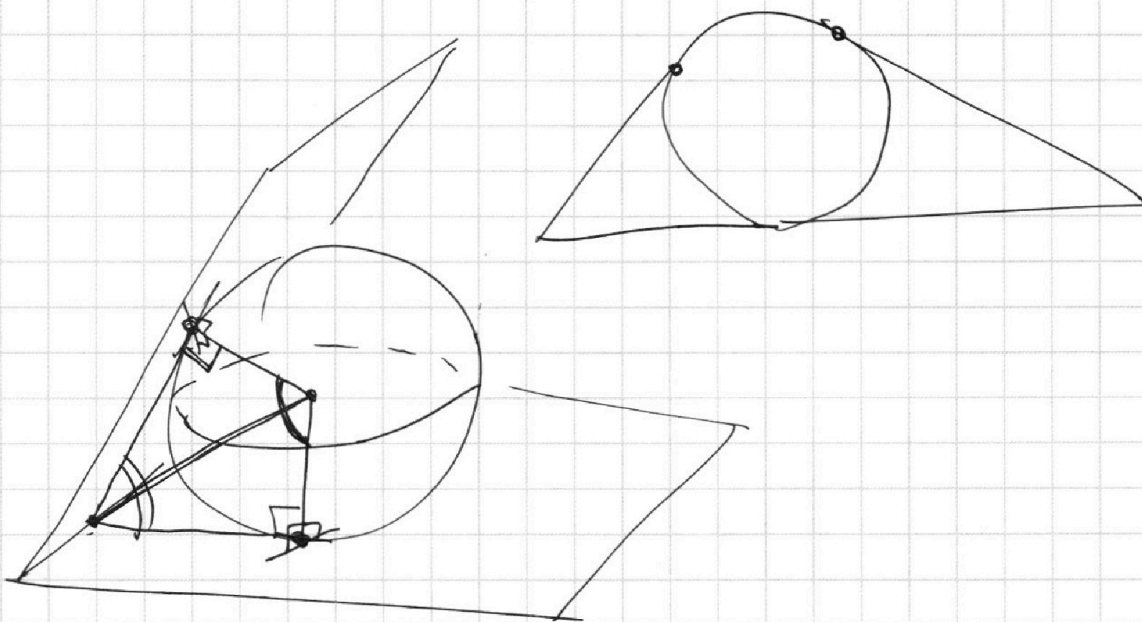
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$KN(???)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

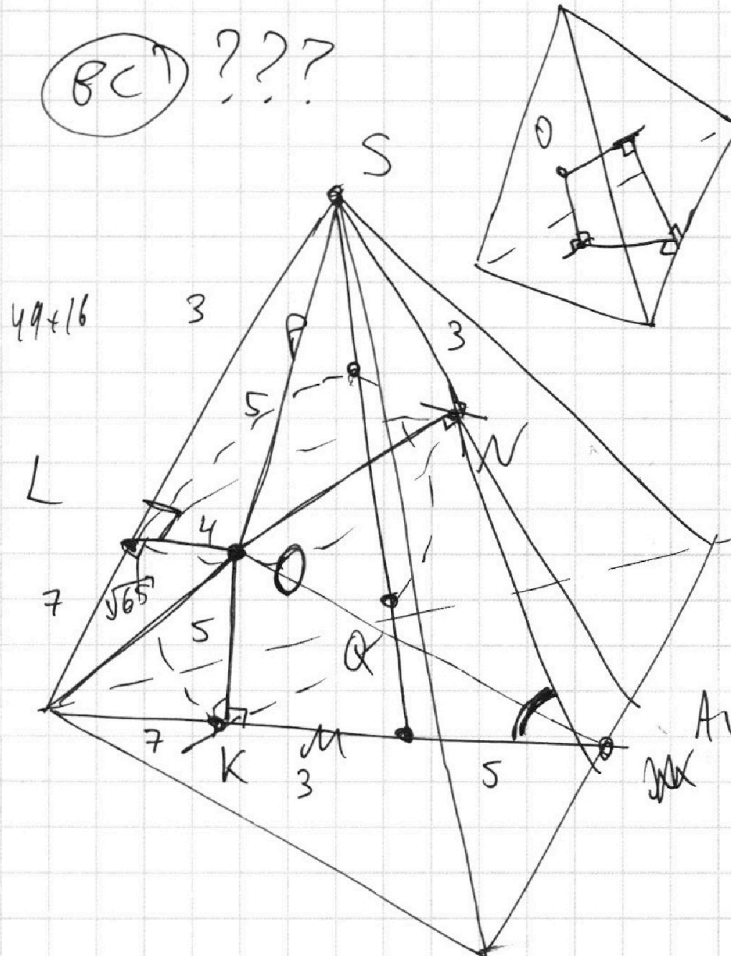
1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

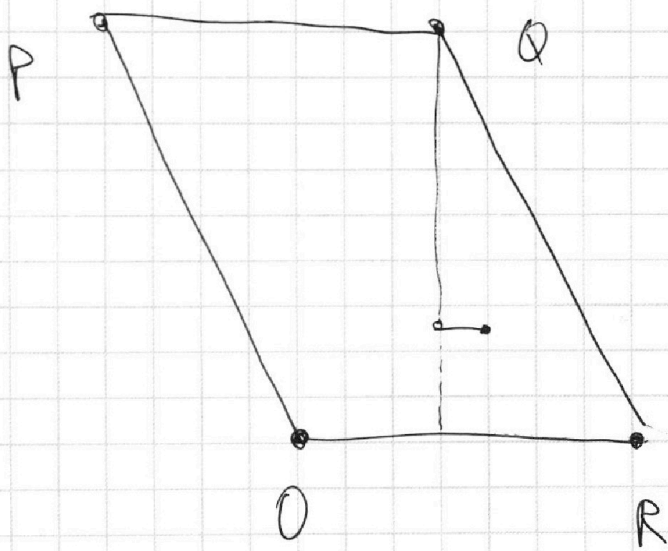
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\text{BCI} \text{ ???}$



$A, N(?)$



$\#(\Delta x, \Delta y)$

- ↓
- 0, 40
- 1, 36
- 2, 32
- ⋮
- 10, 0.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

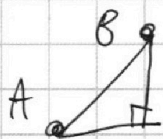
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



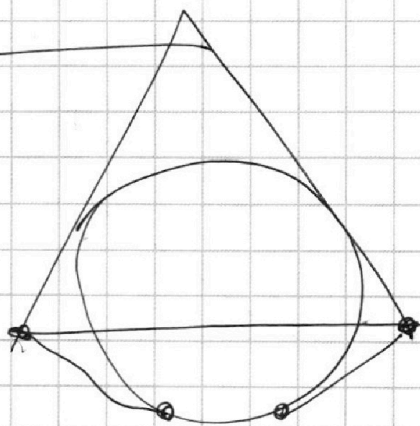
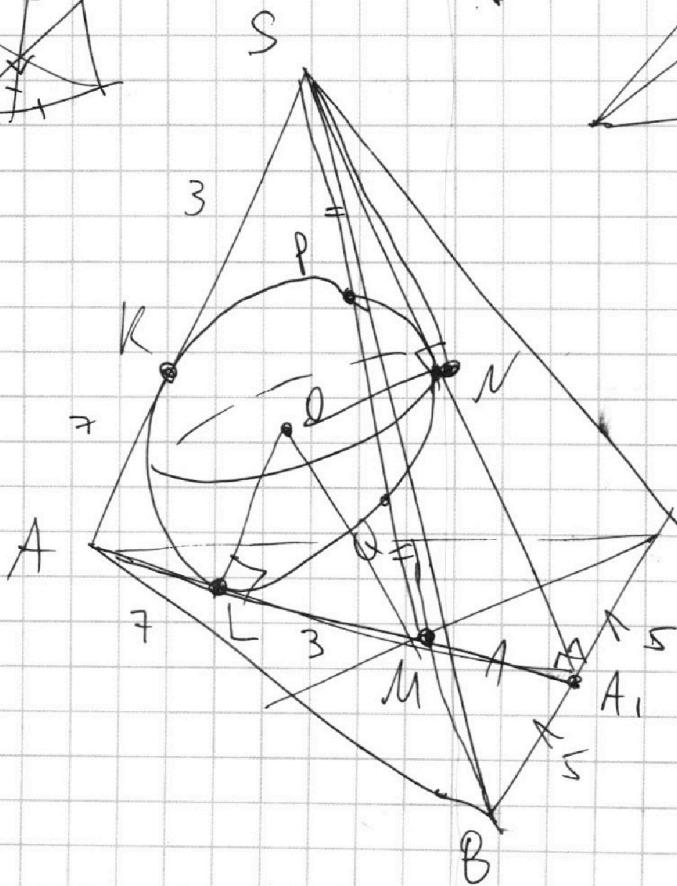
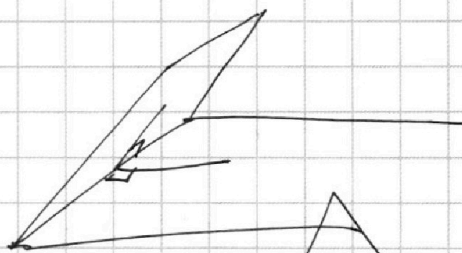
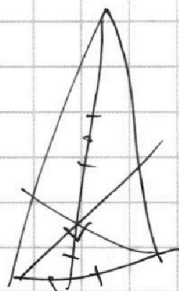
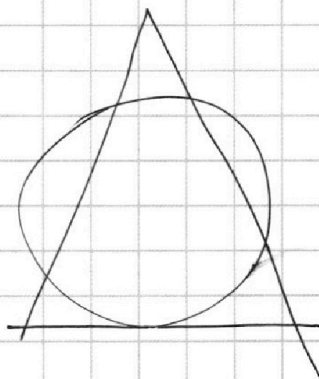
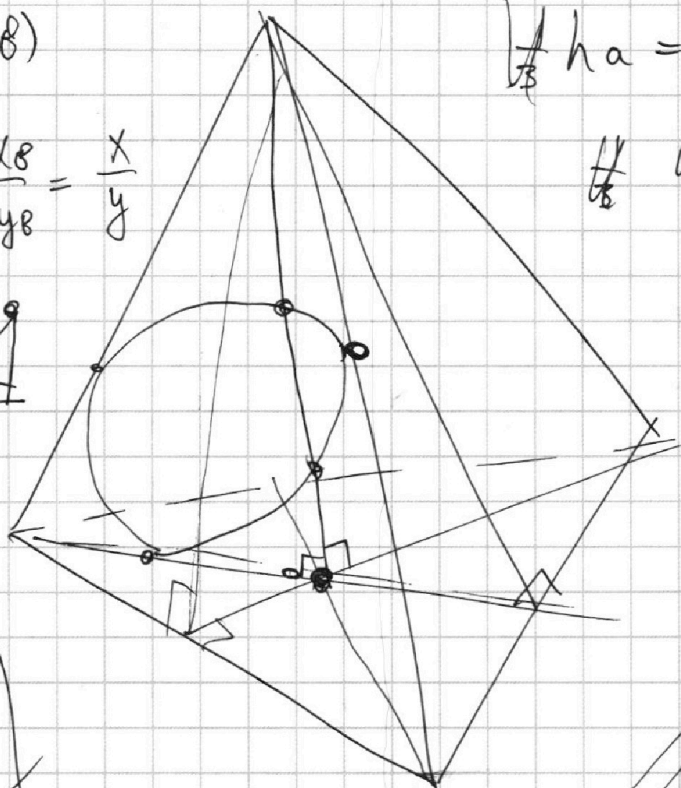
$l(A, B)$

$$\frac{x_A - x_B}{y_A - y_B} = \frac{x}{y}$$



~~$h_a = \frac{2S}{bc} = \dots = 12.$~~

~~$h_c = ?$~~



$OS = OM = 3.$

$OS = CA_1 = A_1B.$

$OM = MA_1$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

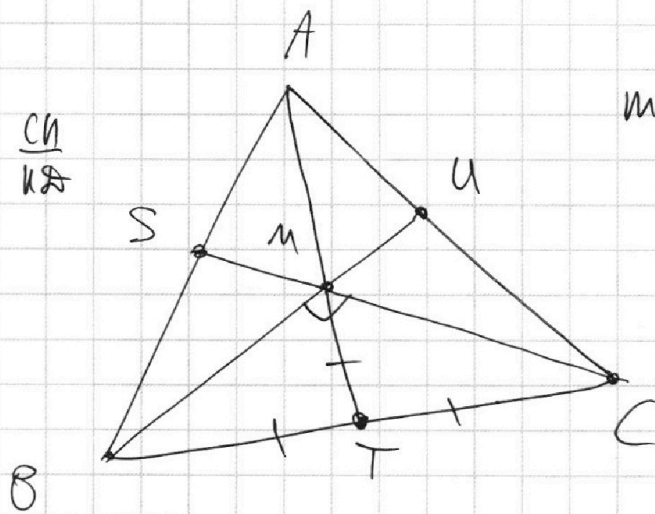
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~CE~~
~~KB~~

~~CE~~ ~~CH~~
~~BE~~ ~~KB~~



$$BC = AM$$

$$ma + da + d = mb + ca + c$$

$$m = n = 5$$

~~$$25a + m^2 a = mb^2 + nc^2$$~~

$$BC = 10$$

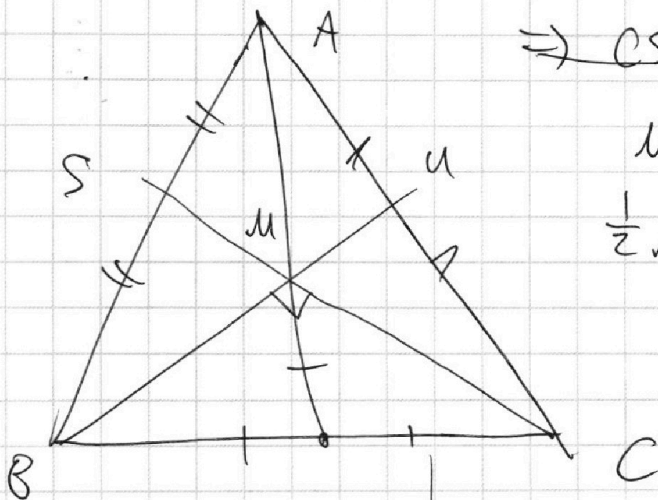
$$S = 60$$

$$AM = 10$$

~~$$\Rightarrow AT = 15$$~~

~~$$MC = MB = 5\sqrt{2}$$~~

$$\Rightarrow BM \perp CM$$



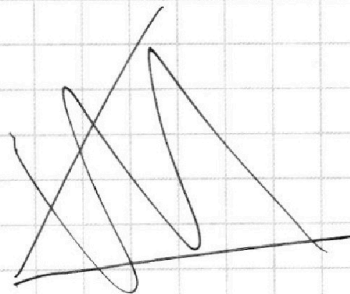
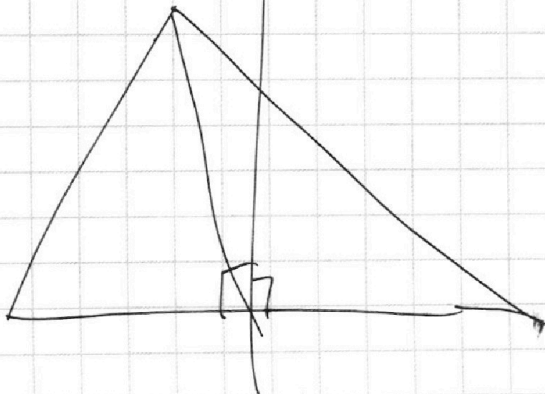
~~$$\Rightarrow CS = BU =$$~~

$$MB \cdot MC = \frac{4}{9} CS \cdot BU$$

$$\frac{1}{2} MB \cdot MC = S_{\Delta BMC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}$$

$$MB \cdot MC = 40$$

$$CS \cdot BU = 90 \Rightarrow CZ$$





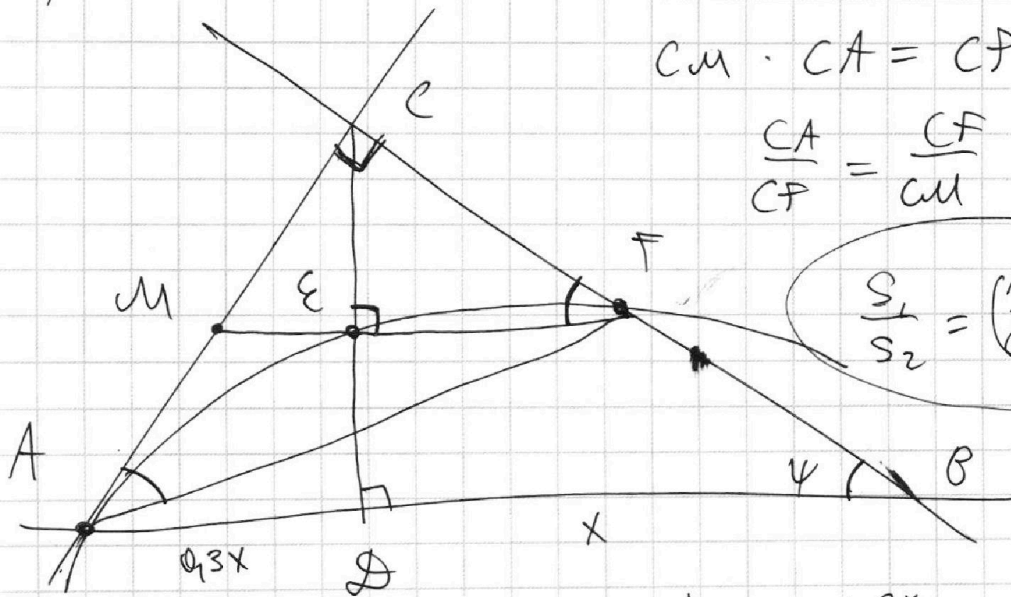
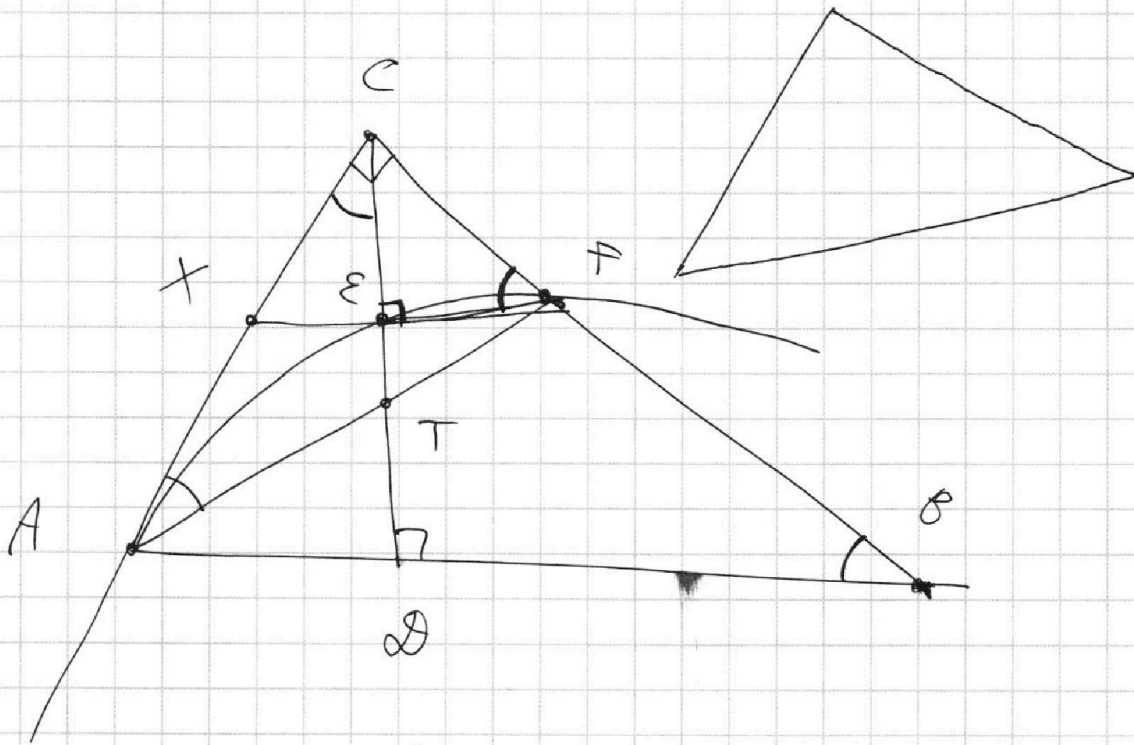
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CM \cdot CA = CF^2$$

$$\frac{CA}{CF} = \frac{CF}{CM} = \operatorname{tg} \psi$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{AC}{CF}\right)^2 = \frac{10}{3}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{x} = \frac{0,3x}{h}$$

$$h = \sqrt{0,3} x$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{3}{10}} \Rightarrow$$

