



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^8 3^{14} 5^{12}$ ,  $bc$  делится на  $2^{12} 3^{20} 5^{17}$ ,  $ac$  делится на  $2^{14} 3^{21} 5^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность, касающаяся прямой  $BC$  в точке  $B$ , пересекает высоту  $CD$ , проведённую к гипотенузе, в точке  $F$ , а катет  $AC$  – в точке  $E$ . Известно, что  $AB \parallel EF$ ,  $AD : DB = 5 : 2$ . Найдите отношение площади треугольника  $ABC$  к площади треугольника  $CEF$ .
3. [4 балла] Решите уравнение  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$ .

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа  $x$  и  $y$  удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{y^3} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения  $xy$ .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-16; 80)$ ,  $Q(2; 80)$  и  $R(18; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$ .
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида  $SABC$ , медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Сфера  $\Omega$  касается ребра  $AS$  в точке  $L$  и касается плоскости основания пирамиды в точке  $K$ , лежащей на отрезке  $AM$ . Сфера  $\Omega$  пересекает отрезок  $SM$  в точках  $P$  и  $Q$ . Известно, что  $SP = MQ$ , площадь треугольника  $ABC$  равна 100,  $SA = BC = 16$ .
  - а) Найдите произведение длин медиан  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .
  - б) Найдите двугранный угол при ребре  $BC$  пирамиды, если дополнительно известно, что  $\Omega$  касается грани  $BCS$  в точке  $N$ ,  $SN = 4$ , а радиус сферы  $\Omega$  равен 5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

11.  
 Пусть  $a = k \cdot 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$ ,  $b = m \cdot 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$ ,  $c = n \cdot 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$   
 $(k, m, n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \geq 0)$ . Тогда  
 $ab = km \cdot 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2}$   
 $bc = mn \cdot 2^{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_2 + \gamma_3}$   
 $ac = kn \cdot 2^{\alpha_1 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_3}$

\*<sup>⊗</sup> числа  $k, m, n$  не делятся на  $2, 3, 5$ ;  $\alpha_1, \dots, \gamma_3 \in \mathbb{Z}$

Тогда из условия кратности:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 8 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 12 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \geq 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 34 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 17 \end{cases} \Rightarrow \text{мин. степень } 2 \text{ в } abc - 17.$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 14 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 20 \\ \beta_3 + \beta_1 \geq 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 55 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geq \frac{55}{2} \geq 27 \end{cases} \Rightarrow \text{мин степень } 3 \text{ в } abc - 28.$$

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 12 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 17 \\ \gamma_3 + \gamma_1 \geq 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 68 \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34, \text{ но т.к. } \gamma_1 + \gamma_3 \geq 39 \\ \text{и } \gamma_2 \geq 0, \text{ то } \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 39, \text{ мин степень } 5 \text{ в } abc - 39. \end{cases}$$

Тогда минимальное значение  $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$   
 (это возможно при  $a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{19}$ ,  $b = 2^4 \cdot 3^7$ ,  $c = 2^{10} \cdot 3^{14} \cdot 5^{20}$ )

Ответ:  $2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

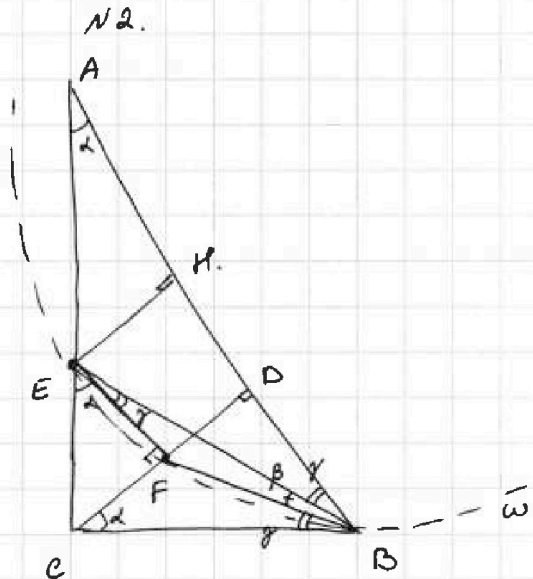
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Пусть  $\angle BAC = \alpha$ ;  
 $\angle EBF = \beta$ ,  $\angle FBC = \angle FEB = \gamma$   
 ( $\angle FEB$  в окр-ти  $\omega$  -  
 вписанный, опирающийся  
 на дугу  $\widehat{BF}$ ;  $\angle FBE$  -  
 угол между касательной и  
 хордой  $BF$ , стягивающей  
 дугу  $\widehat{BF} \Rightarrow \angle FBC = \frac{\widehat{BF}}{2} = \angle FEB$ ).

П.к.  $EF \parallel AB$ , то  $EF \perp ED$ ;  
 $\angle CEF = \angle CAD = \alpha$

В прямоугольном  $CEB$   $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ \Rightarrow 90^\circ - \alpha = \beta + \gamma =$   
 $= \angle ABC \Rightarrow \angle ABE = 90^\circ - \beta - \gamma = 90^\circ - (\beta + \gamma) = \delta$ .

Кроме того,  $ED \perp AB \Rightarrow \angle DEB = \alpha$ . Тогда  
 $\triangle AEB \sim \triangle FEB$  по 2-м углам ( $\angle BAE = \angle FEB = \alpha$ ;  
 $\angle ABE = \angle FBC = \gamma$ ). Тогда  $\frac{BE}{AB} = \frac{EF}{AE} = \sin \alpha$ .

Пусть  $EH \perp AB$ . Тогда  $EHDF$  - прам-к  $\Rightarrow EH = FD$ ;  
 $\sin \alpha = \frac{EH}{AE} = \frac{DF}{AE} = \frac{CF}{AE} \Rightarrow DF = CF \Rightarrow F$  - середина

высоты  $ED$ . П.к.  $EF \parallel AB$ , то  $\triangle CEF \sim \triangle CAD$  с  
 коэффициентом подобия  $k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \frac{1}{4}$ .

У  $\triangle CAD$  и  $CEB$  общая высота  $ED \Rightarrow \frac{S_{CAD}}{S_{CEB}} = \frac{AD}{CB} = \frac{5}{2}$ ;  
 $S_{CAD} + S_{CEB} = S_{ABE}$

$$\frac{S_{CAD}}{S_{ABE}} = \frac{5}{7}, \text{ тогда } S_{CAD} = \frac{5}{7} S_{ABE}; S_{CEF} = \frac{1}{4} S_{CAD} =$$

$$= \frac{5}{28} S_{ABE} \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{CEF}} = \frac{28}{5} \text{ к1}$$

Ответ:  $\frac{28}{5}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3.

$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x \Leftrightarrow \arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = \cos x & (1) \\ -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

$$(2): \begin{aligned} -5\pi &\leq \pi - 2x \leq 5\pi \\ -6\pi &\leq -2x \leq 4\pi \\ -4\pi &\leq 2x \leq 6\pi \\ -2\pi &\leq x \leq 3\pi \quad (*) \end{aligned}$$

$$(2): \frac{\sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)}{\sin} \cdot \cos x = 0$$

$$\cos x - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) \cos\left(\frac{2\pi - 6x}{10}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) = 0 & (3) \\ \cos\left(\frac{3\pi - 6x}{10}\right) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$(3): \sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi - 2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi - 2x = 5\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

С учётом (\*) получаем  $x = \frac{\pi}{2}$  ( $k=0$ ),  $x = 3\pi$  ( $k=-1$ ),  
 $x = -2\pi$  ( $k=1$ )

$$(4): \cos\left(\frac{3\pi - 6x}{10}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\pi - 6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\pi - 6x = 5\pi + 10\pi h, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 6x = -2\pi - 10\pi h, h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi + 5\pi h}{3}, h \in \mathbb{Z}$$

Условию (\*) удовлетворяют  $x = -\frac{\pi}{3}$  (или  $h=0$ ),  
 $x = -2\pi$  ( $h=1$ ),  $x = \frac{4\pi}{3}$  ( $h=-1$ ),  $x = 3\pi$  ( $h=-2$ )

Ответ:  $-2\pi$ ;  $-\frac{\pi}{3}$ ;  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{4\pi}{3}$ ;  $3\pi$ .

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№4.

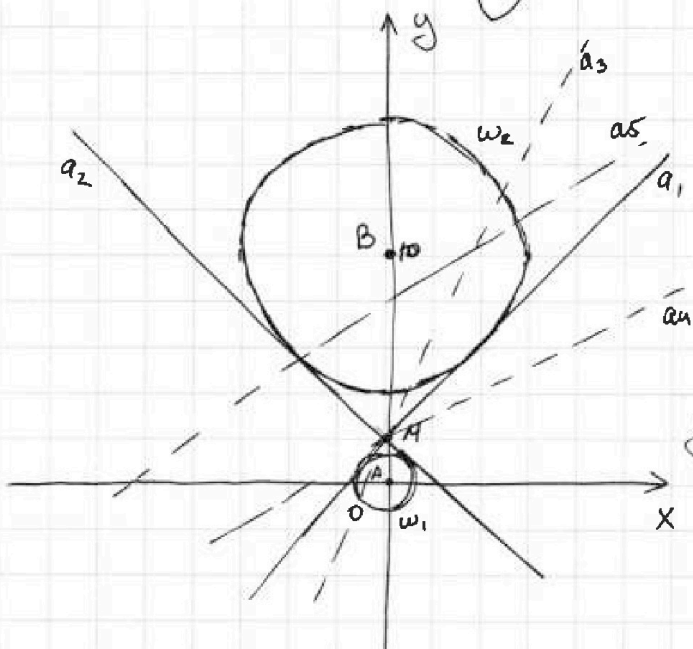
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ур-е (2) системы равносильно  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 20y + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & (3) \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 & (4) \end{cases}$$

Ур-е (3) задаёт на координатной пл-ти окр-ть  $\omega_1$  с центром  $A(0; 0)$  и радиусом  $R_A = 1$ ; ур-е (4) - окр-ть  $\omega_2$  с центром  $B(0; 10)$  и радиусом  $R_B = 6$ .

Ур-е (1)  $\Leftrightarrow 3y = ax + 4b \Leftrightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  - на координатной пл-ти прямая. Чтобы исходная система имела ровно 4 решения, эта прямая должна пересекать каждую из окр-тей ровно 2 раза.



В прямой  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$   $a$  отвечает за угловой коэффициент ( $\frac{a}{3}$  - тангенс угла наклона прямой),  $b$  - за смещение вдоль оси ОУ. Пусть прямые  $a_1$  и  $a_2$  - общие касательные к  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . (из симметрии  $a_2 = -a_1$ ). для прямой  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  найдётся коэффициент  $b$  такой, что она пересечёт  $\omega_1$  и  $\omega_2$  по 2 раза каждую, при  $a \in (a_1; a_2)$ ,

Пусть  $M$  - точка пересечения "крайних" прямых  $a_1$  и  $a_2 = -a_1$  (из симметрии  $M$  лежит на ОУ). Тогда при  $a \in (a_1; a_2)$  прямая  $y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$  проведённая  $a_1$  и  $a_2$  через  $M$ , пересечёт каждую из 2-х окр-тей 2 раза; при  $a \leq a_1$  или  $a \geq a_2$  прямая, проведённая  $a_1$  и  $a_2$  через  $M$ , пересечёт либо обе окр-ти по 1 разу (при  $a_1$  и  $a_2$ ) (см. на след. стр.)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

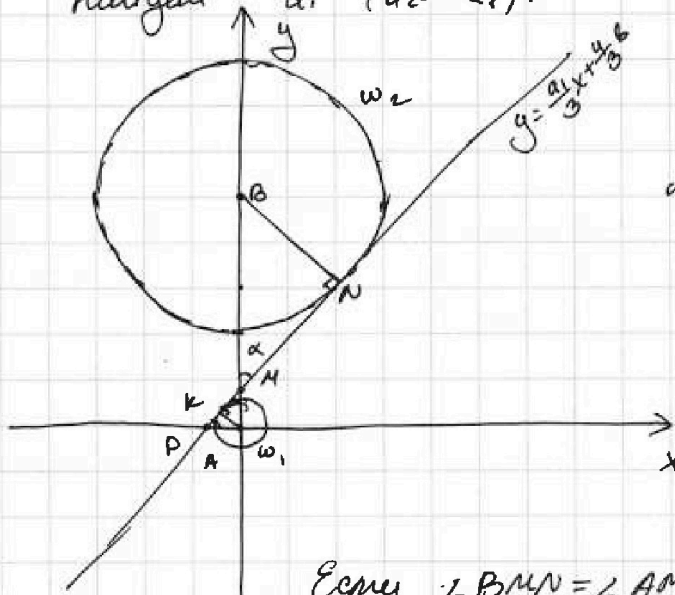
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№4 (продолжение) либо на одну из окружностей и при движении вверх/вниз вдоль оси  $Ox$  (как на рисунке) пересечёт не более 1-ой окружности в одной или 2-х точках.

Найдём  $a_1$  ( $a_2 = -a_1$ ):



Пусть прямая касается  $\omega_1$  в т.к.  $\omega_2$  в т.н.  
 Тогда  $\triangle MBN \sim \triangle MAK$   
 ( $\angle MBN = \angle MAK$  как вертикальные,  $\angle MNB = \angle MKA = 90^\circ$ ).

$AK = 1, BN = 6 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AK}{BN} = \frac{1}{6};$   
 $AB = 10 \Rightarrow AM = \frac{10}{7},$  тогда  
 $BM = \frac{60}{7}.$

Если  $\angle MBN = \angle MAK = \alpha$ , то в  $\triangle MAP$

$(P - \text{точка пересечения прямой и } Ox)$   $\angle MPA = 90^\circ - \alpha = \beta \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \tan \beta = \frac{a_1}{3} = \tan \alpha. \quad \sin \alpha = \frac{BN}{BM} = \frac{6}{\frac{60}{7}} = \frac{7}{10}. \quad \cos \alpha \text{ (т.к. } \alpha < 90^\circ)$   
 $= \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}; \quad \tan \alpha = \frac{6}{\frac{60}{7}} = \frac{7}{10}.$  Тогда  
 $a_1 = 3 \tan \beta = \frac{3\sqrt{51}}{7}.$

Ответ:  $(\frac{3\sqrt{51}}{7}; -\frac{3\sqrt{51}}{7})$ .

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:



1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№5.

Заметим, что, т.к. есть слагаемые  $\log_5^4(2x)$ ,  $3\log_{2x}5$ ,  $\log_5^4 y$ ,  $4\log_5 y$ , то  $2x > 0$  и  $2x \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$  и

$y > 0$  и  $y \neq 1$  (заметим, что при таких знаках-ях  $x$  и  $y$   $\log_5^4(2x) \neq 0$  и  $\log_5^4 y \neq 0$ ).

При этих ограничениях для  $x$  и  $y$  пусть

$$\log_5 2x = u \neq 0; \log_5 y = v \neq 0. \text{ Тогда:}$$
$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 - \log_{2x}5 > 625 + 3 = 0$$
$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 - \frac{4}{3}\log_{2x}5 + 3 = 0 \quad \text{— прикидывает возр.}$$
$$u^4 - \frac{3}{u} - \frac{4}{3u} + 3 = 0 \quad | \cdot 3u \neq 0$$

$$3u^5 - 9 - 4 + 9u = 0$$

$$3u^5 - 13 + 9u = 0 \quad (1) \Rightarrow 3u^5 + 9u = 13$$

$$\log_5^4 y + 4\log_5 y - \log_{30,2} 3 + 3 = 0$$

$$\log_5^4 y + 4\log_5 y + \frac{1}{3}\log_5 y + 3 = 0 \quad (7\text{-к. } \log_{30,2} 3 = \frac{1}{3}\log_5 3)$$
$$= \log_5^4 y + \frac{13}{3}\log_5 y + 3 = 0 \quad \text{или } v^4 + \frac{4}{v} + \frac{1}{3v} + 3 = 0 \quad | \cdot 3v \neq 0$$

$$3v^5 + 12v + 1 + 9v = 0$$

$$3v^5 + 13 + 9v = 0 \quad (2) \Rightarrow 3(-v)^5 + 9(-v) = 13$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 3u^5 + 9u + 3v^5 + 9v = 0 \Rightarrow 3(u^5 + 3u + v^5 + 3v) = 0$$

$$\Leftrightarrow u^5 + 3u + v^5 + 3v = 0 \Leftrightarrow u^5 + 3u = (-v)^5 + 3(-v)$$

Получили  $f(u) = f(-v)$ , где  $f(t) = 3t^5 + 9t$ . Заметим, что  $f(t)$  — возрастающая функция (как сумма возр.  $3t^5$  и  $9t$ );  $f'(t) = 15t^4 + 9 \geq 9 > 0$  при  $\forall t$   $\Rightarrow \Rightarrow f(u) = f(-v)$  выполняется только при  $u = -v$ ,

$$\text{т.е. } u + v = 0$$

$u + v = \log_5(2x) + \log_5 y = \log_5(2xy) = 0$ , откуда  $2xy = 1 \Rightarrow xy = \frac{1}{2}$  — единственное возможное значение для  $xy$ .

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

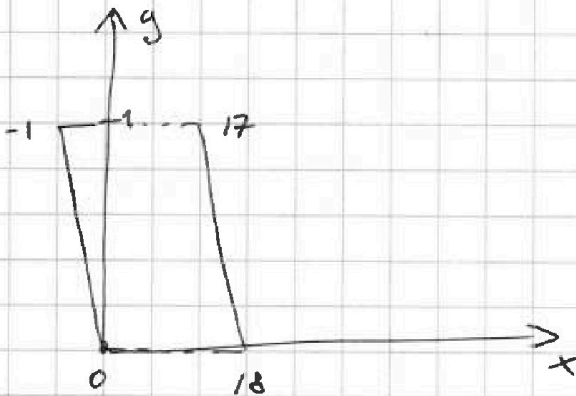
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

Точки P и Q лежат на прямой  $y = -5x$ ; точки  
R и S - на прямой  $y = -5x + 90$ .

$$5(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 45$$

$(y_2 - y_1) : 5$ . Для  $y_2 - y_1 = 0$  должно быть  $x_2 - x_1 = 9$



для  $y_1, y_2, \dots \in \mathbb{Z}$   
взять  $x_2$  - от 0 до 18 -  
19 вар  $\Rightarrow$  10 пар  $x_2 - x_1 = 9$ :  
0; 9, 1; 10, ..., 9; 18.  
 $y \in \mathbb{Z}$  - от 0 до 81 - 81  
вар. Пар такого вида -  
10 · 81 = 810.

Всего пар с  $x_1, x_2, y, y_2 \in \mathbb{Z}$ :  
19 · 81.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

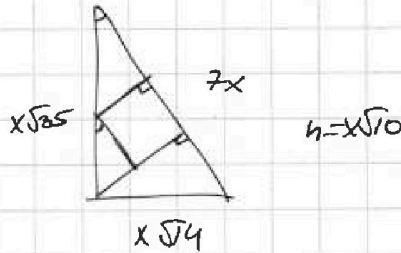
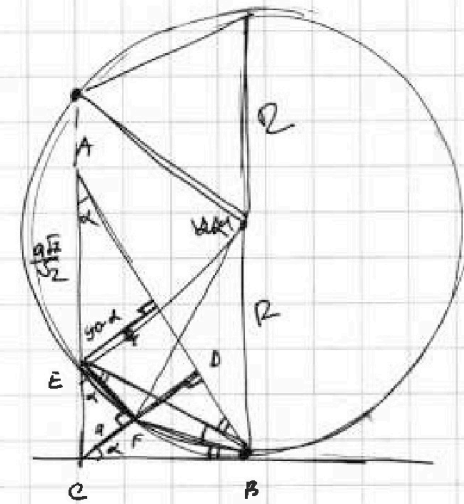
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$CB^2 = CE \dots$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{7} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\frac{a}{AE} = \sqrt{\frac{2}{7}} = AE = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$CE = x\sqrt{35} - \frac{\sqrt{14}}{7a} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$CE \sin \alpha = \sqrt{\frac{2}{7}} \left( x\sqrt{35} - \frac{\sqrt{14}}{7a} \right) = \frac{CE}{CE} \sin \alpha \Rightarrow CE =$$

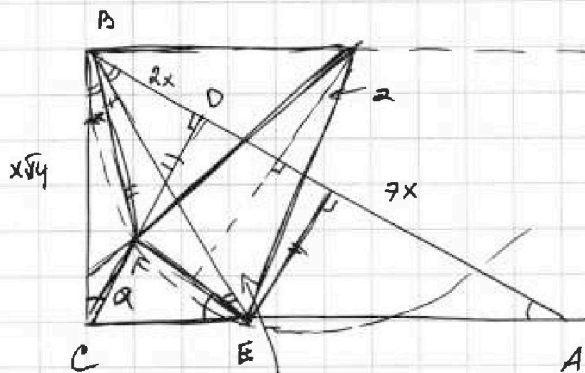
$$= x\sqrt{10} - a$$

~~22249+1802+1~~



$$\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

$$h = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{7a}{2}$$



$$\frac{CB}{AB} = \frac{CF}{AE} = \frac{BF}{BE}$$

$$CF = a$$

$$AE = \frac{CF\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{CF}{AE} = \frac{CB}{AB} = \frac{x\sqrt{4}}{7x} = \sqrt{\frac{a}{7}}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МОТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 625 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \frac{4}{3} \log_{2x} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5 2x = 4$$

$$u^4 - \frac{3}{u} - \frac{4}{3u} + 3 = 0 \quad | \cdot 3u$$

$$3u^5 - 9 - 4 + 9u = 0$$

$$3u^5 + 9u - 13 = 0 \quad (1)$$

$$v^4 + \frac{4}{v} + \frac{1}{3v} + 3 = 0 \quad | \cdot 3v$$

$$3v^5 + 12 + 1 + 9v = 0$$

$$3v^5 + 9v + 13 = 0 \quad (2)$$

$$(1) + (2): 3u^5 + 9u + 3v^5 + 9v = 0$$

$$u^5 + 3u + v^5 + 3v = 0$$

$$(u+v)(\dots) = 0$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{xy} 0,2 = 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 + \frac{1}{3} \log_{xy} 5 + 3 = 0$$

$$\log_5 y = u$$

$$u+v=?$$

$$u+v=0$$

$$\log_5 2xy = 0$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

$$4t^5 + 3t^2 + 3t + 1 = \frac{13}{t^5} \quad | \cdot t^5$$

$$t^5 + 3t^2 + 3t + 1 + \frac{3}{t^4} = f(t)$$

$$4t^5 + 3t^2 + 3t + 1 = \frac{13}{t^5}$$

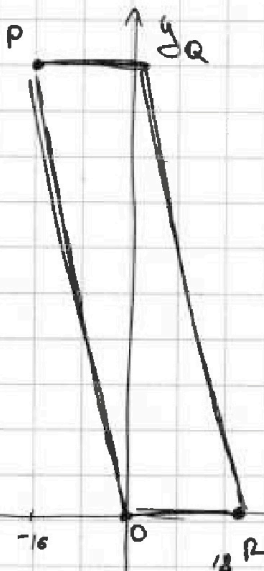
$$u^5 + 3u = -v^5 + 3v$$

$$f(u) = f(-v)$$

$$f(t) = t^5 + 3t \uparrow$$

$$\Rightarrow u = -v$$

6

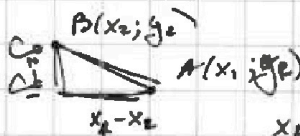


$$(x_1; y_1) \quad (x_2; y_2)$$

$$5x_2 - 5x_1 + y_1 - y_2 = 45 \quad P(-16; 80)$$

$$|k_1 - k_2|$$

$$Q(2; 80)$$



$$x_2 - x_1 \leq 34$$

$$5x_2 - 5x_1 \leq 170$$

$$y_2 - y_1 \leq 80$$

$$a; b \quad 5a + b = 45$$

101  
-9

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

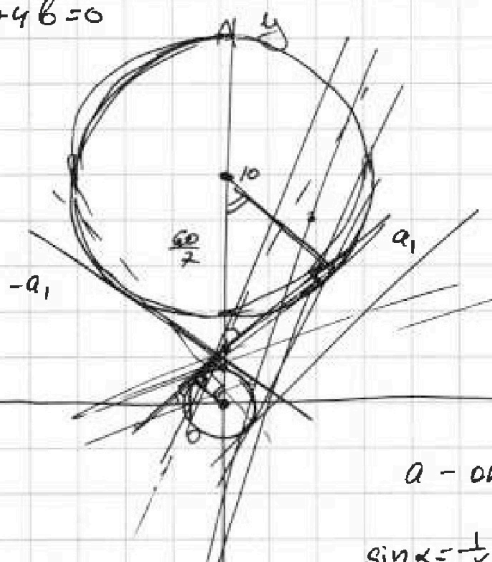
④ 
$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 & (1) \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 & (2) \end{cases}$$

(2): 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y-10)^2 = 6^2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 20y + 64 = (x^2 + (y-10)^2 + 100) - 36$$

(1):  $ax - 3y + 4b = 0$

$$3y = ax + 4b$$
  
$$y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$$



$$\frac{1}{x} = \frac{3}{5-x}$$
  
$$5-x = 3x$$
  
$$4x = 5$$
  
$$x = \frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{\frac{5}{4}} = \frac{12}{5}$$

$a - \text{om } a_1 \quad \alpha_0 - a_1$

$\sin \alpha = \frac{1}{x} = \frac{3}{5-x}$

$5-x = 3x \quad 4x = 5$   
 $x = \frac{5}{4}$

$\text{tg } \beta$

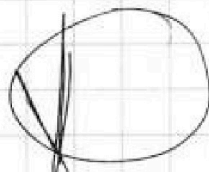
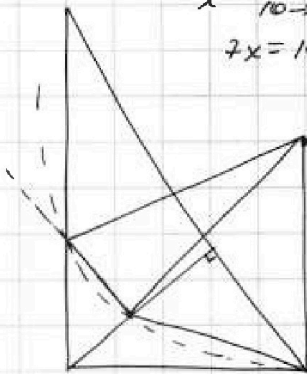
$\sin \alpha = \frac{4}{5} \quad 5 - \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$   
 $\cos \alpha = \frac{3}{5} \quad \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

$\text{tg } \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{4} = 1$

$\frac{a}{3} - \text{om } \frac{a}{4} \quad \alpha_0 - \frac{a}{4}$   
 $a - \text{om } \frac{a}{4} \quad \alpha_0 - \frac{a}{4}$   
 $(\frac{a}{4}; -\frac{a}{4})$

$$\frac{1}{x} = \frac{6}{10-x}$$
  
$$7x = 10$$
  
$$x = \frac{10}{7}$$

$$\frac{6}{\frac{10}{7}} = \frac{7}{10}$$



$$\frac{1}{x} = \frac{6}{10-x} \quad 10-x = 6x$$
  
$$7x = 10 \quad x = \frac{10}{7}$$

⑤  $\log_5^4(ax) - 3 \log_{ax} 5 = \log_{8x} 3 \cdot 625 - 3; \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_y^3 0,2 - 3$

$\log_5(ax) = t$

$\frac{4}{3} \log_{ax} 5$

$\log_y^3 0,2 = \log_y^3 \frac{1}{5} = \frac{y > 0, y \neq 1}{x > 0, x \neq \frac{1}{2}}$   
 $= -\frac{1}{3} \log_5^5 625 = 5^4$

$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{4}{3}t - 3 \quad | \cdot 3t$

$3t^5 - 9 - 4t^2 + 9t = 0 \quad b=4$

$3t^5 - 4t^2 + 9t - 9 = 0$

$\log_5 y = v$

$v^4 + \frac{4}{v} = -\frac{1}{3}v - 3 \quad | \cdot 3v$

$3v^5 + 12 + v^2 + 9v = 0$

$3v^5 + v^2 + 9v + 12 = 0$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

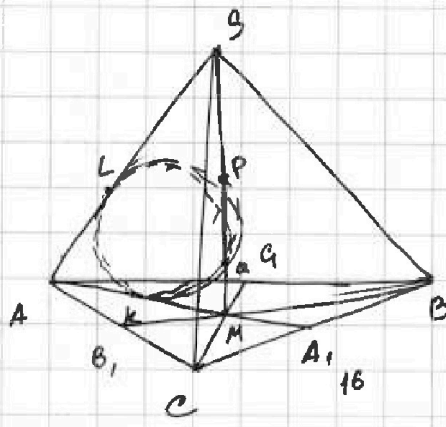
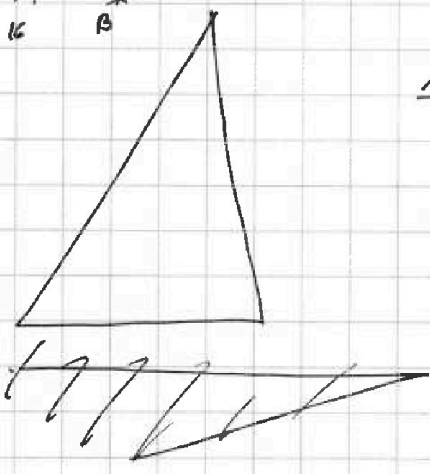
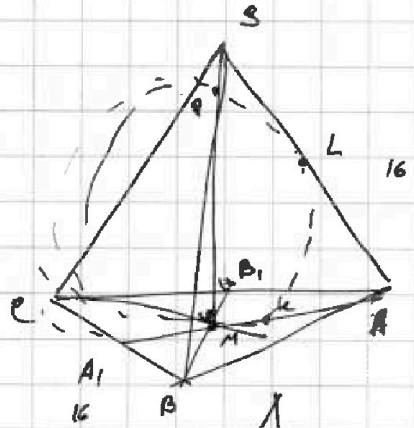
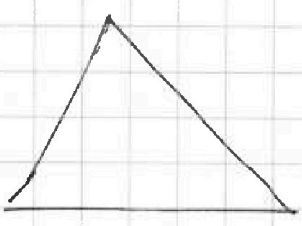
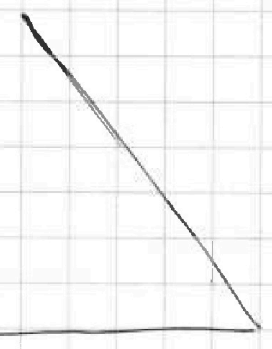
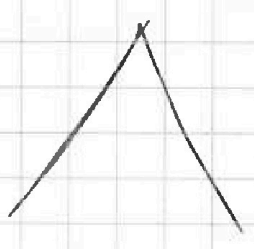
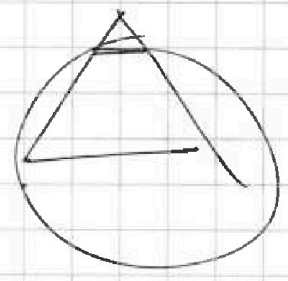
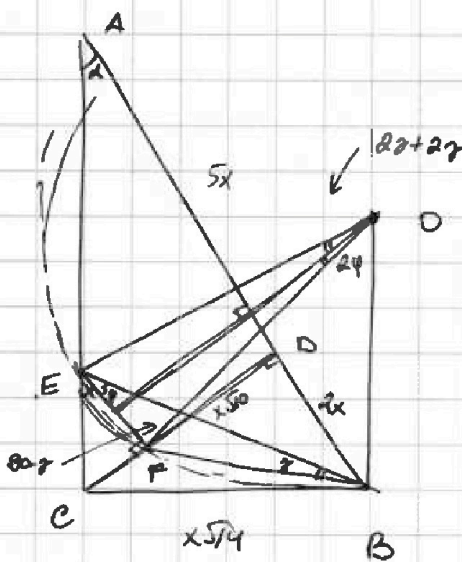
Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2



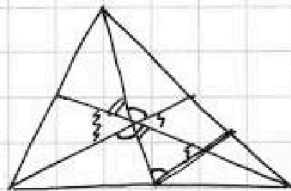
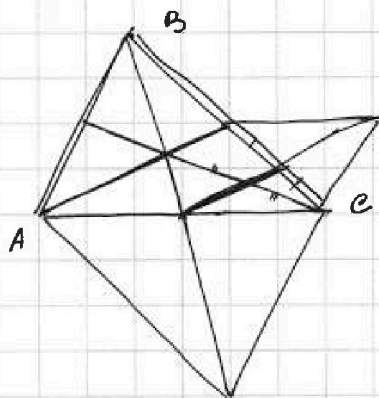
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



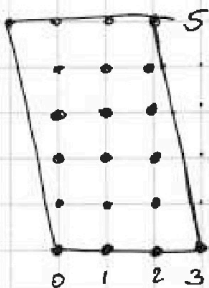
34-16  
18  
 $\frac{2\sqrt{3}}{2}$   
 $\frac{3}{4}$   
когда  
подобия  
5  
3 из задач - 75

$$5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45$$

↑  
0, 1, 2, 3, 4, ..., 9

$$x_2 - x_1 = 9 \quad 0, 9 \quad 1, 10, \dots, \underline{9 \quad 18}$$

$$18 \cdot 5 = 90$$



QR - 19

$$19 \cdot 16 +$$

$$19 \cdot 17 + (80 - 17) \cdot 9 \quad \text{— целых точек}$$

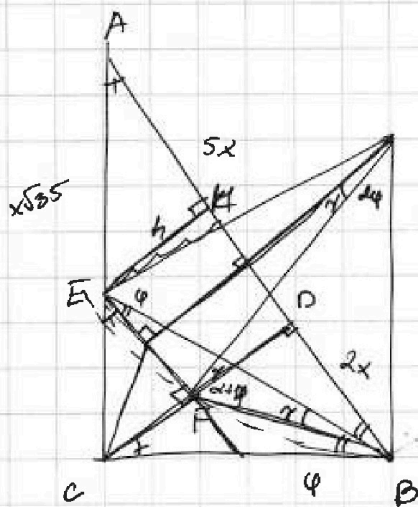
$$y_2 = y_1: \quad \underline{10 \cdot 17 + (80 - 17) \cdot 9}$$

$y_2 = 0$   
 $y_1 = 80$   
← 16  
↑ 80  
← 2   ← 1  
↑ 10   ↑ 5

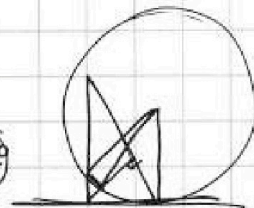
PO:  $y = -5x$   
-16; 80

QR:  $y = -5x +$   
 $-5x + 80$

$y_2 - y_1: 5$



$\frac{x \cdot 2 \cdot \sqrt{10}}{2}$



$$\frac{BC}{AB} = \frac{CF}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$$

$$2\varphi + \theta + \alpha = 90^\circ$$

$$2\varphi + \theta = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \alpha = \dots$$

$$CF = a \quad AE = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{h}{AE} = \sin \alpha = \frac{CF}{AE} = h = CF$$

CP

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

①  $ab = k \cdot 2^8 3^{14} 5^{12}$ ;  $bc = m \cdot 2^{13} 3^{20} 5^{12}$ ;  $ac = n \cdot 2^{14} 3^{21} 5^{20}$   
 $a^2 b^2 c^2 = mnk \cdot 2^{55} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}$   
 $2^{36} \cdot 3^{56} \cdot 5^{68}$   
 $abc = 2^{14} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$   
 $ab = 2^8 3^{14} 5^{12}$   
 $k=1, m=2, n=3$   
 $a = 2^4 \cdot 3^7 \cdot 5^{12}$   
 $b = 2^4 \cdot 3^7$   
 $c = 2^{10} \cdot 3^{13} \cdot 5^5$

$a = 2^4 \cdot 3^{11} \cdot 5^8$ ;  $b = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^7$ ;  $c = 2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^7$

$\beta_1 + \beta_2 \geq 14$   
 $\beta_2 + \beta_3 \geq 20$   
 $\beta_1 + \beta_3 \geq 21$   
 $\beta_2 = 0$   
 $2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \geq 55$   
 $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 28$   
 $\beta_1 = 14$   
 $\beta_2 = 8$   
 $\beta_3 = 7$   
 $\beta_2 = 0$   
 $\beta_3 = 0$

$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 8$   
 $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 13$   
 $\alpha_3 + \alpha_1 \geq 14$   
 $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \geq 35$   
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq 18$   
 $\alpha_1 = 10$   
 $\alpha_2 = 5$   
 $\alpha_3 = 4$

$\gamma_1 + \gamma_2 \geq 12$   
 $\gamma_2 + \gamma_3 \geq 17$   
 $\gamma_3 + \gamma_1 \geq 39$   
 $2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \geq 68$   
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 34$   
 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 39$   
 $\gamma_1 = 12$   
 $\gamma_2 = 0$   
 $\gamma_3 = 17$   
20, 19

③  $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$   
 $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10} \Leftrightarrow$

$\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) = \cos x$   
 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$   
 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$   
 $1) \sin \alpha = q$   
 $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$   
 $2) -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi - 2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$

$12) -5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$   
 $-6\pi \leq -2x \leq 4\pi$   
 $-4\pi \leq 2x \leq 6\pi$   
 $-2\pi \leq x \leq 3\pi$

$\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) - \cos x = 0$   
 $\sin(\frac{\pi - 2x}{10}) - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 0$   
 $\sin(\frac{\pi}{2} - x) - \sin(\frac{\pi - 2x}{10}) = 0$   
 $\sin(\frac{\pi - 2x}{5}) \cos(\frac{3\pi - 6x}{10}) = 0$

$\frac{5\pi - 10x - \pi + 2x}{20} = \frac{6\pi - 12x}{20} = \frac{3\pi - 6x}{10}$   
 $\frac{5\pi - 10x - \pi + 2x}{10} = \frac{4\pi - 8x}{10}$   
 $\frac{4\pi - 8x}{20} = \frac{\pi - 2x}{5}$   
 $2^4 \cdot 3^{21} \cdot 5^{33}$   $b = 2^7 \cdot 3^3$   
 $c = 2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^{22}$   $\frac{5\pi - 10x + \pi - 2x}{20} = \frac{6\pi - 12x}{20}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1)  $\sin\left(\frac{\pi - 2x}{5}\right) = 0$

$-\pi \leq x \leq 3\pi$

$\frac{\pi - 2x}{5} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\pi - 2x = 5\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$2x = \pi - 5\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi - 5\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$k=0: \frac{\pi}{2} \quad k=-1: \frac{6\pi}{2} = 3\pi \quad k=1: \frac{-4\pi}{2} = -2\pi$

2)  $\cos\left(\frac{3\pi - 6x}{10}\right) = 0$

$\frac{3\pi - 6x}{10} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$3\pi - 6x = 5\pi + 10\pi k$

$6x = -2\pi - 10\pi k$

$x = \frac{-2\pi - 10\pi k}{6} = \frac{-\pi - 5\pi k}{3}$

$k=0: -\frac{\pi}{3}$

$k=1: -\frac{6\pi}{3} = -2\pi$

$k=-1: -\frac{-4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$k=-2: \frac{-2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

$\frac{-\pi}{3}$   
 $\frac{4\pi}{3}$   
 $-2\pi$   
 $2\pi$

$2\pi: \cos x = -1$

$\cos(\pi) = -\frac{1}{2}$

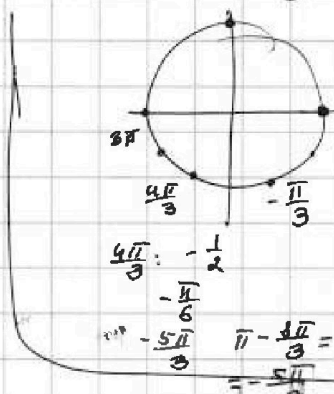
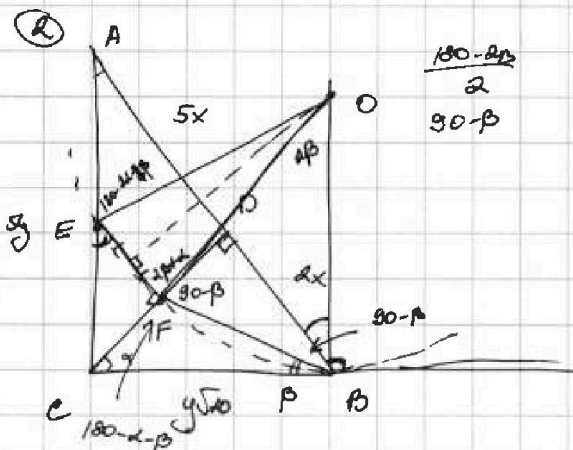
$5\pi$

$\pi = 6\pi$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

$\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$



$AP:PB = 5:2$       $\frac{S_{ABC}}{S_{BEF}} = ?$

$\tan \alpha = \frac{h}{5x} = \frac{2x}{h}$

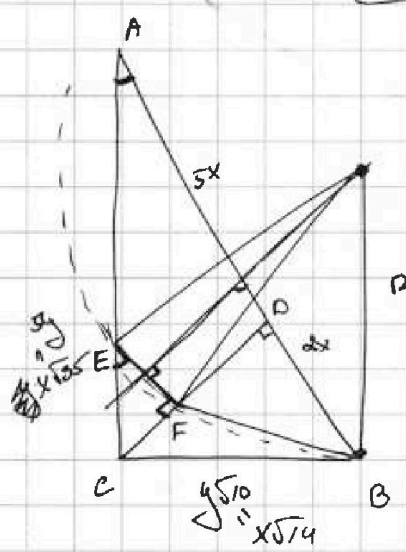
$AP \parallel EF$

$\frac{CF}{CP} = \frac{CE}{CA}$

$h^2 = 10x^2$

$h = x\sqrt{10}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{h}{5x} = \frac{\sqrt{10}}{5}$



$25y^2 + 10y^2 = 35y^2$

$y\sqrt{35} = 7x$

$S_{ABC} = \frac{x^2 \sqrt{35} \cdot 14}{2} = \frac{x^2 \cdot 7\sqrt{10}}{2}$

$y = \frac{7x}{\sqrt{35}} = x\sqrt{\frac{7}{5}}$

$y \cdot 5 = \frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{5}} x = \frac{25\sqrt{2}}{5} \sqrt{35} x$

$\sqrt{10}y = \sqrt{\frac{70}{5}} x = \sqrt{14} x$

$2\alpha + 180 + \alpha + \beta - 90 + \beta - 90 = 2\beta + \alpha$   
 $180 - \alpha - \alpha - 2\beta$