МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 9

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^{14}7^{10}$, bc делится на $2^{17}7^{17}$, ac делится на $2^{20}7^{37}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь
$$\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}.$$
При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m?

3. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, хорда AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC : CB = 7$. Найдите длину AB, если известно, что радиусы ω и Ω равны 1 и 5 соответственно.

4. [5 баллов] Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-12;24)$, $Q(3;24)$ и $R(15;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $2x_2-2x_1+y_2-y_1=12$.

6. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система
$$\begin{cases} ax-y+10b=0, \\ \left((x+8)^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-4\right) \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть M – середина той дуги AB описанной окружности, которая не содержит точку C; N – середина той дуги AC описанной окружности, которая не содержит точку B. Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, если расстояния от точек M и N до сторон AB и AC соответсвенно равны 4,5 и 2.

Задача №1

Пусть $a = 2^{\alpha_a} \cdot 7^{\beta_a} \cdot A$, где α_a и β_a — неотрицательные целые числа, а $A \not\vdots 2$ и $A \not\vdots 7$; $b = 2^{\alpha_b} \cdot 7^{\beta_b} \cdot B$, где α_b и β_b — неотрицательные целые числа, а $B \not\vdots 2$ и $B \not\vdots 7$; $c = 2^{\alpha_c} \cdot 7^{\beta_c} \cdot C$, где α_c и β_c — неотрицательные целые числа, а $C \not\vdots 2$ и $C \not\vdots 7$. Также A, B и C — натуральные числа. Иначе говоря: α_a, α_b и α_c — максимальные степени двойки, на которые делятся a, b и c соответственно; $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ — максимальные степени семёрки, на которые делятся a, b и c соответственно.

Тогда $ab = 2^{\alpha_a+\alpha_b} \cdot 7^{\beta_a+\beta_b} \cdot AB$, где $AB \not\vdots 2$ и $AB \not\vdots 7$;
$bc = 2^{\alpha_b+\alpha_c} \cdot 7^{\beta_b+\beta_c} \cdot BC$, где $BC \not\vdots 2$ и $BC \not\vdots 7$;
$ac = 2^{\alpha_a+\alpha_c} \cdot 7^{\beta_a+\beta_c} \cdot AC$, где $AC \not\vdots 2$ и $AC \not\vdots 7$.

По условию: $\begin{cases} ab \vdots (2^{14} \cdot 7^{10}) \Leftrightarrow [\alpha_a+\alpha_b \geq 14 \text{ и } \beta_a+\beta_b \geq 10] \\ bc \vdots (2^{17} \cdot 7^{17}) \Leftrightarrow [\alpha_b+\alpha_c \geq 17 \text{ и } \beta_b+\beta_c \geq 17] \\ ac \vdots (2^{30} \cdot 7^{37}) \Leftrightarrow [\alpha_a+\alpha_c \geq \cancel{30}\ 20 \text{ и } \beta_a+\beta_c \geq 37] \end{cases}$

Таким образом: $\begin{cases} (\alpha_a+\alpha_b)+(\alpha_b+\alpha_c)+(\alpha_a+\alpha_c) \geq 14+17+30 = \cancel{61}\ 51 \\ (\beta_a+\beta_b)+(\beta_b+\beta_c)+(\beta_a+\beta_c) \geq 10+17+37 = 64 \end{cases}$

$\begin{cases} 2(\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c) \geq \cancel{61}\ 51 \\ 2(\beta_a+\beta_b+\beta_c) \geq 64 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_a+\alpha_b+\alpha_c \geq \cancel{30{,}5}\ 25{,}5. \text{ Но } (\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c) \in \mathbb{Z}\ (*) \\ \beta_a+\beta_b+\beta_c \geq 32. \text{ Но } \beta_a+\beta_c \geq 37 \text{ и } \beta_b \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta_a+\beta_b+\beta_c \geq 37 \end{cases}$

$*$ если $\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c \leq \cancel{30}\ 25 < \cancel{30{,}5}\ 25{,}5$, то противоречие. Значит $\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c \geq \cancel{31}\ 26$

$abc = 2^{\alpha_a+\alpha_b+\alpha_c} \cdot 7^{\beta_a+\beta_b+\beta_c} \cdot ABC \geq \boxed{2^{26} \cdot 7^{37}}$

~~Пример: $a = 2^{11} \cdot 7^{17}$; $b = 2^{9\ 6\ 11}$; $c = 2^{16} \cdot 7^{20}$~~

~~Пример (на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$): $a = 2^{6} \cdot 7^{17}$; $b = 2^{8}$; $c = 2^{12} \cdot 7^{20}$. Тогда:~~
~~$ab = 2^{15} \cdot 7^{17}$, а $(2^{15} \cdot 7^{17}) \vdots (2^{14} \cdot 7^{10})$~~
~~$bc = 2^{17} \cdot 7^{20}$, а $(2^{17} \cdot 7^{20}) \vdots (2^{17} \cdot 7^{17})$~~
~~$ac = 2^{17} \cdot 7^{20}$, а $(2^{17} \cdot 7^{20}) \vdots$~~
~~abc~~

Пример на $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$: $a = 2^{9} \cdot 7^{17}$; $b = 2^{6}$; $c = 2^{11} \cdot 7^{20}$. Тогда:

1) $ab = (2^{15} \cdot 7^{17})$, то есть $\vdots (2^{14} 7^{10})$
2) $bc = (2^{17} \cdot 7^{20})$, то есть $\vdots (2^{17} \cdot 7^{17})$
3) $ac = (2^{20} \cdot 7^{37})$, то есть $\vdots (2^{20} \cdot 7^{37})$
4) $abc = 2^{26} \cdot 7^{37}$

$\boxed{\text{Ответ: } 2^{26} \cdot 7^{37}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 [X] 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Задача №2

По условию: НОД $(a;b)=1$, иначе НОД $(a;b)=d \geq 2 \Rightarrow (d \in \mathbb{N})$
$a=k_a d$ ($k_a \in \mathbb{N}$; $k_a<a$, т.к. $d\geq 2$) и $b=k_b d$ ($k_b \in \mathbb{N}$; $k_b<b$, т.к. $d \geq 2$) $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{\cancel{d}\cdot k_a}{\cancel{d}\cdot k_b}=\frac{k_a (\neq a)}{k_b (\neq b)}$. Противоречие.

Пусть мы нашли нужное m. Тогда $(a+b) \vdots m$ и $(a^2-6ab+b^2) \vdots m$. Заметим, что $a^2-6ab+b^2=(a+b)^2-8ab$. Так как $(a+b)\vdots m$, то $(a+b)^2 \vdots m$. Но $((a+b)^2-8ab)\vdots m \Rightarrow$
$\Rightarrow 8ab \vdots m$. Сразу ~~отметим~~, что m - ~~целое число~~ натуральное число, большее 1 (т.к. „сократить на 1" - бессмысленное понятие, правильно „не сократить").
Предположим, что $\exists$ p - простое число: $a \vdots p$ и $m \vdots p$. Так как $(a+b) \vdots m \vdots p$, то $(a+b) \vdots p$. Но $a \vdots p \Rightarrow b \vdots p \Rightarrow$ НОД$(a;b) \vdots p$. Но $p \geq 2$. Противоречие. Значит если $m \vdots p$, где p - простое число, то $a \not\vdots\, p$ и (аналогично) $b \not\vdots\, p$. Таким образом, НОД $(ab, m)=1$, так как НОД$(a,m)=1$ и НОД$(b,m)=1$. Использовали, что ~~то~~ натуральное число, которое ≥ 2, имеет х.б. 1 простой делитель.

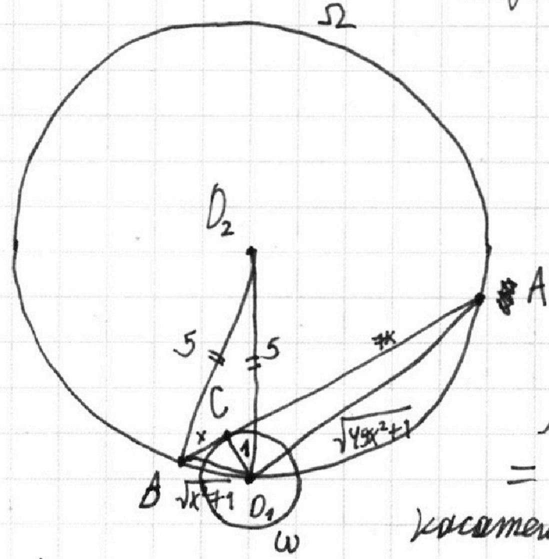
Так как $8ab \vdots m$, а НОД $(ab, m)=1$, то $8 \vdots m$. Таким образом, $m \leq \boxed{8}$

Пример на $m=8$: $a=3$ и $b=53$. Тогда (поскольку 3 и 53 - различные простые числа) НОД$(a,b)=$ НОД$(3,53)=1$, то есть дробь $\frac{a}{b}=\frac{3}{53}$ несократима ($a=3\in\mathbb{N}$; $b=53 \in \mathbb{N}$).
Дробь на доске равна $\frac{a+b}{a^2-6ab+b^2}=\frac{3+53}{3^2-6\cdot 3\cdot 53+53^2}=\frac{56}{9-\overset{954}{6\cdot 159}+(2500+300+9)}=\frac{56}{\underset{1864}{\cancel{2818}-954}}=\frac{56}{1864}=\frac{7\cdot 8^1}{233\cdot 8_1}=\frac{7}{7\cdot 33+2}$.

Как видим, $233 \not\vdots\, 7$ (т.к. $2 \in (1;6)$, т.е. $\neq 0$) $\Rightarrow$ дробь можно сократить максимум на 8.

$\boxed{\text{Ответ: } 8}$

Задача №3



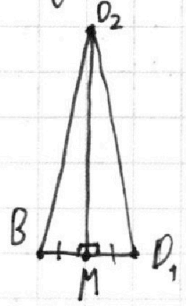
Пусть $BC = x$. По условию: $\frac{AC}{CB} = 7$, откуда $AC = 7x$.

Пусть O_1 — центр ω; O_2 — центр Ω.

AB касается ω $\Rightarrow$ (по свойству касательной к окружности) $O_1C \perp AB \Rightarrow \Delta ACO_1$ и ΔBCO_1 — прямоугольные треугольники. По теореме Пифагора: $BO_1 = \sqrt{BC^2+CO_1^2} =$ (т.к. $CO_1 = R_\omega = 1$ по свойству касательной к окружности) $= \sqrt{x^2+1}$ и

$AO_1 = \sqrt{AC^2+CO_1^2} = \sqrt{49x^2+1}$.

Рассмотрим ΔBO_2O_1: он равнобедренный (т.к. $BO_2 = O_1O_2 = R_\Omega = 5$; по признаку равнобедренного Δ-а), у него $BO_1 = \sqrt{x^2+1}$. Пусть M — середина BO_1, то есть $BM = O_1M = \frac{BO_1}{2} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2}$. По свойству



равнобедренного Δ-а: O_2M — высота ΔBO_2O_1, т.е. $O_2M \perp BO_1$, т.е. $O_2M \perp BM$, т.е. ΔBO_2M прямоугольный. Значит $BM = BO_2 \cdot \sin\angle BO_2M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} =$ (по свойству равнобедренного Δ-а: O_2M — биссектриса ΔBO_2O_1, т.е. $\angle BO_2M = \angle MO_2O_1 = \frac{\angle BO_2O_1}{2}$) $5 \cdot \sin\frac{\angle BO_2O_1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} =$ (по свойству вписанного угла: $\angle BAO_1 = \frac{\angle BO_2O_1}{2}$) $10 \cdot \sin\angle BAO_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} =$ ($\angle CAO_1 = \angle BAO_1$, т.к. $C \in AB$) $10\sin\angle CAO_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 10\frac{CO_1}{AO_1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{49x^2+1}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{49x^2+1} = 10 \Leftrightarrow$ ($x^2+1 \geq 1 > 0$ и $49x^2+1 \geq 1 > 0$) $(x^2+1)(49x^2+1) = 100 \Leftrightarrow 49(x^2)^2 + 50x^2 - 99 = 0 \Leftrightarrow (49(x^2)^2 + 99x^2) - (49x^2 + 99) = 0 \Leftrightarrow (49x^2+99)(x^2-1) = 0$. Так как $49x^2+99 \geq 99 > 0$, то $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow (x > 0)$ $x = 1 \Leftrightarrow BC = 1 \Rightarrow AB = BC + AC = x + 7x = 8x = \boxed{8}$

$\boxed{\text{Ответ: } AB = 8}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4

$\sqrt{2x^2-5x+3}-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \Leftrightarrow \sqrt{(2x^2+2x+1)+(2-7x)}-$

$-\sqrt{2x^2+2x+1}=2-7x \Leftrightarrow \left(a=\sqrt{2x^2+2x+1};\ b=2-7x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b}-a=b \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b}=a+b.$

Отметим, что по ОДЗ: $a^2+b\geqslant 0$ и $\overbrace{\sqrt{\cancel{a}}}^{2x^2+2x+1}\geqslant 0$. А из последнего равенства получаем:

$\begin{cases} a+b\geqslant 0 \\ \cancel{a^2}+b=\cancel{a^2}+2ab+b^2 \Leftrightarrow b^2+2ab-b=0 \Leftrightarrow b(b+2a-1)=0 \Leftrightarrow \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \Leftrightarrow 2-7x=0 \Leftrightarrow x=3{,}5 \text{ (см. далее)} \\ b+2a-1=0 \Leftrightarrow 2a=1-b \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+2x+1}=\cancel{1}-(\cancel{2}-7x)=7x-1, \end{array}\right.$

откуда получаем: $\begin{cases} 7x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{1}{7} \\ 4(2x^2+2x+1)=49x^2-14x+1 \Leftrightarrow \cancel{8x^2}+ \\ +8x+\cancel{4}=\cancel{49x^2}-14x+\cancel{1} \Leftrightarrow 41x^2-22x-3= \end{cases}$

$=0 \Rightarrow D'=\left(\frac{22}{2}\right)^2-41\cdot(-3)=121+123=244\ (>0) \Rightarrow x=\dfrac{-\frac{(-22)}{2}\pm\sqrt{244}}{41}=$

$=\dfrac{11\pm 2\sqrt{61}}{41}$ (см. далее)

Итак, получили 3 корня: $x_1=3{,}5;\ x_2=\dfrac{11-2\sqrt{61}}{41};\ x_3=\dfrac{11+2\sqrt{61}}{41}$.

Отметим, что $2x^2+2x+1=2\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+0{,}5\right)=$

$=2\left((x+0{,}5)^2+(0{,}5-0{,}25)\right)=2(x+0{,}5)^2+0{,}5\geqslant 0{,}5>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a$ всегда имеет смысл. Осталось проверить, что $a^2+b\geqslant 0$ и $a+b\geqslant 0$.

При ~~$x_1=3{,}5$~~ $x=3{,}5$: $a=\sqrt{2(3{,}5+0{,}5)^2+0{,}5}=\sqrt{32{,}5}$ и $b=2-7\cdot 3{,}5=$

$=-22{,}5$. Тогда $a+b=\sqrt{32{,}5}-22{,}5<\sqrt{36}-22{,}5=6-22{,}5=-16{,}5<0$ (!)

~~При $x=\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$: $b=2-7\cdot\frac{11-2\sqrt{61}}{41}=\frac{82-77+14\sqrt{61}}{41}=\frac{5+14\sqrt{61}}{41}$ и~~

~~$a=\sqrt{2\left(\frac{11-2\sqrt{61}}{41}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\sqrt{2\cdot\left(\frac{22-4\sqrt{61}+41}{82}\right)^2+\frac{1}{2}}=$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\cancel{= \sqrt{\frac{2}{82^2}(63-4\sqrt{61})^2+\frac{1}{2}}} =$

значит $x_1 = 3{,}5$ — НЕ решение.

Заметим, что $2x^2-5x+3 = (2x^2-3x)-(2x-3) = (2x-3)(x-1)$

При $x = \frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$: $(2x-3)(x-1) = \left(\frac{22\pm4\sqrt{61}}{41}-3\right)\left(\frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}-1\right) =$

$= \frac{-101\pm4\sqrt{61}}{41}\cdot\frac{-30\pm2\sqrt{61}}{41} = \frac{\overset{488}{8\cdot61} \pm(\overset{120}{-30\cdot4}\overset{-322}{-}\overset{202}{101\cdot2})\sqrt{61}+3030}{41^2} =$

$= \frac{3518 \mp 322\sqrt{61}}{41^2}$. Заметим, что $3518 > 322\sqrt{61}$ (т.к. $322\cdot\sqrt{61} < 322\cdot\sqrt{100}$ $(61<100)$ $= 3220 < 3518) > -322\sqrt{61} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-5x+3 \geq 0$ при $x = \frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$, т.е. $a^2+b \geq 0$.

Осталось проверить, что $a+b \geq 0$ $\Leftrightarrow$ ~~при $x = \frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$~~.

~~$b = 2-7\cdot\frac{11\pm2\sqrt{61}}{41}$~~ $\Leftrightarrow a \geq -b \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+1} \geq 7x-2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{7} \\ \begin{cases} 7x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{7} \\ 2x^2+2x+1 \geq 49x^2-28x+4 \Leftrightarrow 47x^2-30x+3 \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Корни многочлена $x_{1,2} = \frac{-\left(\frac{-30}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{30}{2}\right)^2-47\cdot3}}{47} = \frac{15\pm\sqrt{225-141}}{47} =$

$= \frac{15\pm\sqrt{84}}{47} = \frac{15\pm2\sqrt{21}}{47} \Rightarrow x \in \left[\frac{15-2\sqrt{21}}{47}; \frac{15+2\sqrt{21}}{47}\right]$ (метод интервалов)

$+ \quad - \quad +$; $\frac{15-2\sqrt{21}}{47}$, $\frac{15+2\sqrt{21}}{47}$

~~$\frac{15-2\sqrt{21}}{47} ? \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15-2\sqrt{21} ? \frac{94}{7}$ (меньше)~~ ~~(метод интервалов)~~

~~$\frac{15+2\sqrt{21}}{47} ? \frac{2}{7} \Leftrightarrow 15+2\sqrt{21} ? 94$ (меньше, т.к. $2\sqrt{21} < 2\sqrt{25}$ $(21<25)$ $= 10 < 79$)~~

~~Таким образом, $x \leq \frac{15+2\sqrt{21}}{47} < 2 \leq$~~

$\frac{15-2\sqrt{21}}{47} ? \frac{2}{7} \Leftrightarrow 105-14\sqrt{21} ? 94 \Leftrightarrow 11 ? 14\sqrt{21}$ (меньше, т.к. $14\sqrt{21} > 14$ $(21>1)$)

$\frac{15+2\sqrt{21}}{47} ? \frac{2}{7} \Leftrightarrow 105+14\sqrt{21} ? 94$ (больше) $\Rightarrow x \in \left[\frac{2}{7}; \frac{15+2\sqrt{21}}{47}\right]$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Итак, $x \le \frac{15+2\sqrt{21}}{47}$

Пусть $x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ — корень. Тогда:

$\frac{11-2\sqrt{61}}{41} \le \frac{15+2\sqrt{21}}{47} \Leftrightarrow \cancel{517} - \cancel{94}\sqrt{61} \le (410+205) + \cancel{82}\sqrt{21} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le 47\sqrt{61} + 49 + 41\sqrt{21}$ (выполняется) $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = \frac{11-2\sqrt{61}}{41}$ — корень.

Пусть $x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ — корень. Аналогично $47\sqrt{61} \le 49 +$

$+ 41\sqrt{21}$ ~~. Но~~ $\cancel{49+41\sqrt{21} > 49+41\cdot\sqrt{16}\ (21>16) =}$

$\cancel{= 49 + 41\cdot 4 = 213. \text{ А } 47\sqrt{61}}$

$\cancel{\Leftrightarrow 47^2\cdot 61 \le 49^2 + 41^2\cdot 21 + 2\cdot 49\cdot 41\cdot\sqrt{21} \Leftrightarrow}$

$\cancel{\sqrt{21} \ge 4{,}5,\ \text{т.к. } 21 \ge 20{,}25 \Rightarrow 49+41\sqrt{21} \ge 49+41\cdot 4{,}5 =}$

$\cancel{= 233{,}5}$. Но $47\sqrt{61} > 47\cdot 7{,}5$ (т.к. $61 > 56{,}25$) $=$

$= 329 + 23{,}5 = 352{,}5$. А $49 + 41\sqrt{21} \le 49 + 41\cdot 5$ (т.к. $21 < 25$) $=$

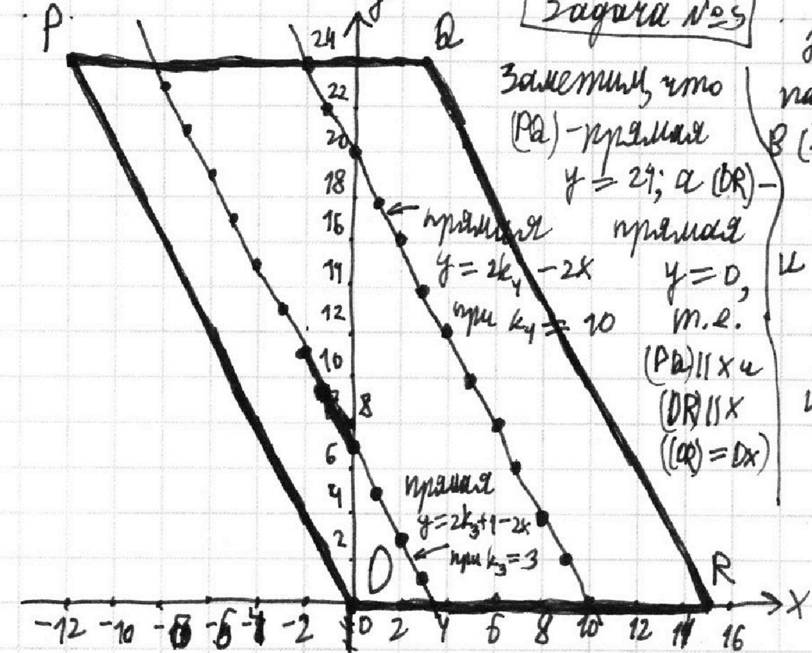
$= 49 + 205 = 254$. И $254 < 352{,}5$. Значит $47\sqrt{61} >$

$> 49 + 41\sqrt{21}$ (!) $\Rightarrow x_3 = \frac{11+2\sqrt{61}}{41}$ — НЕ корень.

Таким образом, единственный корень уравнения — это $x_2 = \boxed{\frac{11-2\sqrt{61}}{41}}$

Ответ: $\frac{11-2\sqrt{61}}{41}$

Задача №5



Заметим, что (PQ) – прямая $y=24$; а (OR) – прямая $y=0$, т.е. $(PQ)\parallel Ox$ и $(OR)\parallel Ox$ ($(PQ)=Ox$)

Нужно посчитать кол-во пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ таких, что x_1, x_2, y_1, y_2 – целые числа, и $(2x_2+y_2)-(2x_1+y_1)=12$

Что представляет из себя множество точек $(x;y)$, где $2x+y=z$, где z – целое число? Это прямая $y=z-2x$. А что из себя представляют прямые (PO) и (QR): Порассуждаем для (PO): пусть это прямая $y=k_1x+b_1$. Тогда:

$$\begin{cases} k_1\cdot 0+b_1=0 \text{ (точка O)} \\ k_1\cdot(-12)+b_1=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=0 \\ \text{(точка P)} \end{cases} \Rightarrow -\cancel{12}k_1=\cancel{24} \Leftrightarrow k_1=-2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (PO)$ – это прямая $y=-2x$ (здесь $z=0$).

Аналогично (QR) – это прямая $y=k_2x+b_2$:

$$\begin{cases} k_2\cdot 15+b_2=0 \text{ (точка R)} \\ k_2\cdot 3+b_2=24 \text{ (точка Q)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2=-15k_2 \\ b_2=24-3k_2 \end{cases} \Rightarrow 24-3k_2=-15k_2 \Leftrightarrow k_2=-2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b_2=30 \Rightarrow (QR)$ – это прямая $y=30-2x$ (здесь $z=30$)

Пусть ~~$2x_2+y_2$~~ точка $(x_2;y_2)$ лежит на прямой $y=z_2-2x$, и точка $(x_1;y_1)$ лежит на прямой $y=z_1-2x$. Здесь z_1 и z_2 – целые числа, при этом $z_1\in[0;30]$ и $z_2\in[0;30]$. Тогда $z_2-z_1=12 \Leftrightarrow z_2=z_1+12 \Rightarrow z_1+12\in[0;30] \Leftrightarrow z_1\in[-12;18] \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1\in[0;18]$ ($\Rightarrow z_2\in[12;30]$). Заметим, что при $\forall z$: прямая $y=z-2x$ параллельна PO и QR, т.к. коэффициенты при x в $y=z-2x$, $y=-2x$ и $y=30-2x$ одни и те же. Таким образом, если $z=2k_3+1$ ($k_3\in\mathbb{Z}$ и $k_3\in[0;14]$), то в параллелограмме лежат точки с целыми координатами
~~$(0;1)$, $(-1;3)$~~ $(k;1)$; $((k-1);3)$; $((k-2);5)$; ... ; $((k-i);1+2i)$ ($i\in\mathbb{Z}$ и $i\in[0;11]$); ~~...; $((k-11)$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~координатами $((x-i); (1+2i))$, где $i \in \mathbb{Z}$ и $i \in [0; 11]$. Действительно, если $1+2i \in [0;24]$, то $i \in [-0{,}5; 11{,}5] \Rightarrow i \in [0; 11]$, ведь $i \in \mathbb{Z}$, т.к. $x \in \mathbb{Z}$ и $x-i$~~

~~координатами $(x; 2k_3+1-2x)$, где~~ Поскольку $L_z \parallel PO$ и $L_z \parallel RQ$ (L_z задаётся уравнением $y = z-2x$), то проверку на абсциссу делать не нужно: нужно сделать проверку на ординату: $(2k_3+1-2x) \in [0;24] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x-2k_3-1) \in [-24;0] \Leftrightarrow 2x \in [2k_3-23; 2k_3+1] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in [\underbrace{k_3-11{,}5}_{\in (k_3-12;\, k_3-11)}; \underbrace{k_3+0{,}5}_{\in (k_3;\, k_3+1)}] \Rightarrow x \in [\underbrace{k_3-11}_{\in\mathbb{Z}}; \underbrace{k_3}_{\in\mathbb{Z}}]$.

Получаем на L_z 12 точек, разрешённых по условию. (и кстати, не лежащих на границе)

~~Если $z = 2k_4-2x$~~ * $2k_3+1 \in [0;30] \Leftrightarrow k_3 \in [-0{,}5; 14{,}5] \Rightarrow$
$\Rightarrow k_3 \in [0; 14]$

Если $z = 2k_4-2x$ ($k_4 \in \mathbb{Z}$; $2k_4 \in [0;30] \Leftrightarrow k_4 \in [0;15]$), то в параллелограмме (возможно, на границе) лежат точки с целыми координатами $(x; 2k_4-2x)$. Аналогично $(2k_4-2x) \in [0;24] \Leftrightarrow 2x-2k_4 \in [-24;0] \Leftrightarrow x \in [k_4-12; 0]$.
Получаем на L_z 13 точек, разрешённых по условию.

Итак, получаем, что ~~на прямой~~ на каждой из 16 их $y=-2x$; $y=2-2x$; ...; $y=30-2x$ ~~лежат~~ по отдельности лежит ровно 13 ~~подходящих~~ разрешённых точек, а на каждой из 15 прямых $y=1-2x$; $3-2x$; ...; $y=29-2x$ по отдельности лежит ровно 12 разрешённых точек. Заметим, что из $z_2-z_1=12$ следует, что (т.к. $z_1 \in \mathbb{Z}$ и $z_2 \in \mathbb{Z}$) z_1 и z_2 одной чётности (или оба чётные, или оба нечётные). Нам подходят пары z_1, z_2 I вида $(2j; 2j+12)$, где $j \in [0;9]$ (т.к. $z_1 \in [0;18]$), II вида $(2m+1; 2m+13)$, где $m \in [0;8]$ (т.к. $z_1 \in [0;18]$, то $2m+1 \in [0;18] \Leftrightarrow m \in [-0{,}5; 8{,}5] \Rightarrow m \in [0;8]$).
Пар I вида 10; пар II вида 9. По структуре пар, в каждой из пар z_1 и z_2 I вида есть ровно $13^2=169$ нужных пар A и B, а в каждой из пар z_1 и z_2 II вида — ровно $12^2 = 144 \Rightarrow$ всего нужных пар A и B $169 \cdot 16 + 144 \cdot 15 =$ ~~$(170-1) \cdot 16 + 72 \cdot 30 =$~~ $= 338 \cdot 8 + 72 \cdot 30 = 2704 + 2160 = \boxed{4864}$

$\boxed{\text{Ответ: } 4864}$

Задача №6

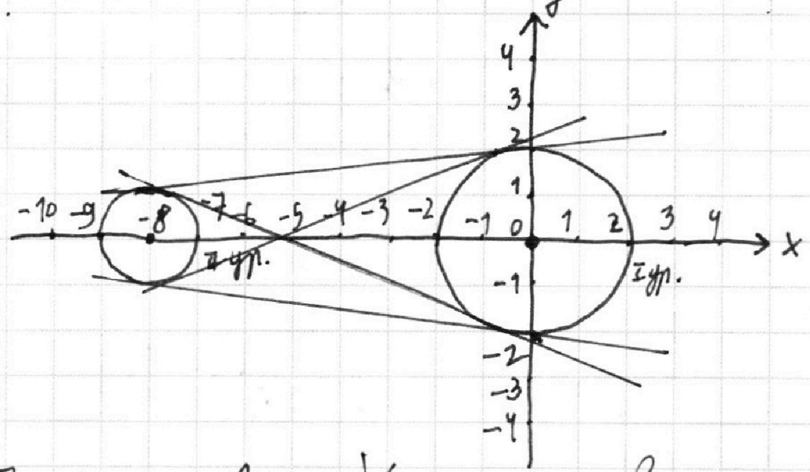
$$\begin{cases} ax - y + 10b = 0 \quad (1) \\ ((x+8)^2 + y^2 - 1)(x^2+y^2-4) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Из (1): $y = ax + 10b$

Из (2): $\cancel{(x+8)^2 + y^2 \geq 1}$, $\cancel{x^2+y^2 \geq 4}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \geq 1^2 \\ x^2 + y^2 \leq 2^2 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+8)^2 + y^2 \leq 1^2 \\ x^2 + y^2 \geq 2^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим графики уравнений $\overbrace{(x+8)^2 + y^2 = 1^2}^{\text{(I ур.)}}$ (окружность радиусом 1 в центре $(-8;0)$) и $\underbrace{x^2+y^2 = 2^2}_{\text{(II ур.)}}$ (окружность радиусом 2 в центре $(0;0)$):



Система 2 задаёт множество точек, лежащих или в окружности I уравнения (или на границе), или в окружности II уравнения (или на границе).

Заметим, что $\forall$ прямая ~~в координатной плоскости~~ пересекает круг (сейчас имеется в виду ~~круг~~ круг, а не окружность, то есть круг – это окружность + все точки внутри неё) или в 0 точках ( ), или в 1 точке ( ), или в ∞ множестве точек ( ). Тогда посмотрим, сколько всего решений в зависимости от того, как пересекает прямая $y = ax + 10b$ (1) 2 круга (см. выше окружности, которые их задают). Как видим из табл. справа, ~~Все~~ подходящий случай только при касании обоих кругов, то есть обеих окружностей. Таким образом, нужно найти уравнения всех ~~касательных~~ прямых, касающихся обеих окружностей.

кол-во т.п.с II \ кол-во т.п.с I	0	1	∞
0	0	1	∞
1	1	2	∞
∞	∞	∞	∞

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~Пусть~~ Таким образом, нам нужно найти такие a и b, чтобы ~~ур~~ каждая из ~~уравнений~~ систем уравнений

I сист. ур. $\begin{cases}(x+8)^2+y^2=1^2\\ y=ax+10b\end{cases}$ и II сист. ур. $\begin{cases}x^2+y^2=2^2\\ y=ax+10b\end{cases}$ имела ровно 1 ~~кор~~ решение.

Подставим y из нижнего уравнения в верхнее (и в I системе, и во II системе). ~~Получим систему~~ уравнений:

$\cancel{(x+8)^2+(ax+10b)^2=1^2}$

$\cancel{x^2+(ax+10b)}$

I) $(x+8)^2+(ax+10b)^2=1 \Leftrightarrow (x^2+16x+\overset{63}{\cancel{64}})+(a^2x^2+$
$+20abx+100b^2)=\cancel{1}\,0 \Leftrightarrow x^2(a^2+1)+x(20ab+16)+(100b^2+63)=0$

$D_I'=\left(\frac{20ab+16}{2}\right)^2-(a^2+1)(100b^2+63)=4(5ab+4)^2-(100a^2b^2+63a^2+$
$+100b^2+63)=\cancel{100a^2b^2}+160ab+\cancel{64}\,1-\cancel{100a^2b^2}-63a^2-100b^2-\cancel{63}=$
$=160ab-63a^2-100b^2+1$

II) $x^2+(ax+10b)^2=4 \Leftrightarrow x^2+(a^2x^2+20abx+100b^2)=4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(a^2+1)+20abx+(100b^2-4)=0$

$D_{II}'=\left(\frac{20ab}{2}\right)^2-(a^2+1)(100b^2-4)=\cancel{100a^2b^2}-(\cancel{100a^2b^2}+100b^2-$
$-4a^2-4)=4a^2-100b^2+4$

Заметим, что для $\forall x\in(-\infty,+\infty)$: $\exists$ единственный y: $y=$
$=ax+10b$. ~~Если $y_1=y_2$, то $ax_1+10b=ax_2+10b$~~ Значит:

$\begin{cases}D_I'=0 \Leftrightarrow 160ab-63a^2-100b^2+1=0\\ D_{II}'=0 \Leftrightarrow 4a^2-100b^2+4=0\end{cases} \Rightarrow (160ab-63a^2-\cancel{100b^2}+\cancel{1})-$
$-(4a^2-\cancel{100b^2}+\cancel{4})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 160ab-67a^2-3=0 \Leftrightarrow b=\frac{67a^2+3}{160a}$. Подставим b в нижнее уравнение: $4a^2-100\cdot\left(\frac{67a^2+3}{160a}\right)^2+4=0 \Leftrightarrow 4a^2-100\cdot\frac{67^2a^4+402a^2+9}{25600a^2}+4=$
$=0 \Leftrightarrow 1024a^4-(3600+840+49)a^4-402a^2-9+1024=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (1024-4489)t^2\ (t=a^2)-402t+1015=0 \Leftrightarrow 3465t^2+402t-$
$-1015=0 \Rightarrow D=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\Leftrightarrow 1024a^4 - (\overset{4440}{3600+840}\overset{4489}{+49})a^4 - \cancel{402a^2}_0 - 9 + \cancel{1024a^2}^{622a^2} = 0 \Leftrightarrow$$

-3465 (т.к. $67^2 = (60+7)^2$)

$$\Leftrightarrow (1024 - 4489)a^4 + 622a^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 3465a^4 - 622a^2 + 9 = 0$$

(пусть $t = a^2 \Rightarrow 3465t^2 - 622t + 9 = 0$)

$$\Rightarrow D' = \left(\frac{-622}{2}\right)^2 - 9 \cdot 3465 = 311^2 - 31185 =$$

$$= (\text{т.к. } 311^2 = (300+11)^2)\ (\cancel{90000}^{58815} + 6600 + 121) - \cancel{31185} =$$

$$= 58815 + 6600 + 121 = 65536 = 4 \cdot 16384 = 4 \cdot 4 \cdot 4096 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1024 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 32^2 = 8^2 \cdot 32^2 = 256^2 (>0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{-\left(\frac{-622}{2}\right) \pm 256}{3465} = \frac{311 \pm 256}{3465} = \left\{\frac{55}{3465}; \frac{567}{3465}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{1}{63}; \frac{9}{55}\right\} \Rightarrow$$

$$= \left\{\frac{1}{3^2} \cdot \frac{7}{7^2}; 3^2 \cdot \frac{55}{55^2}\right\} \Leftrightarrow a^2 \in \left\{7 \cdot \left(\frac{1}{21}\right)^2; 55 \cdot \left(\frac{3}{55}\right)^2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \in \boxed{\left\{-\frac{\sqrt{7}}{21}; -\frac{3\sqrt{55}}{55}; \frac{3\sqrt{55}}{55}; \frac{\sqrt{7}}{21}\right\}} \quad \left(\frac{\sqrt{7}}{21} < \frac{3\sqrt{55}}{55}, \text{ т.к.}\right.$$

$$\left.\sqrt{55} < 9\sqrt{7}, \text{ т.к. } \sqrt{55} < \sqrt{64}\ \underset{\text{т.к.}}{(55 < 64)} = 8 < 9 < 9\sqrt{7}\ (\text{т.к. } 7 > 1)\right)$$

Тогда (как видим, никакое $a \neq 0$) ищем в каждом случае b по формуле, выведенной ранее. Здесь это делать не будем.

Ответ: $-\frac{3\sqrt{55}}{55}; -\frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{\sqrt{7}}{21}; \frac{3\sqrt{55}}{55}$

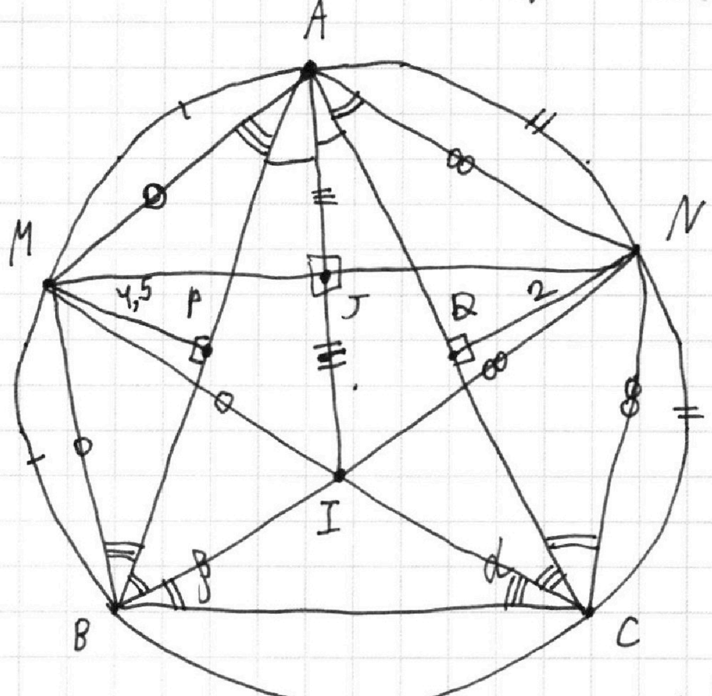
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

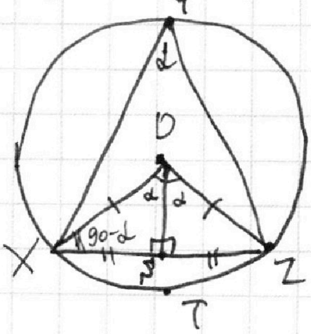
Задача №7

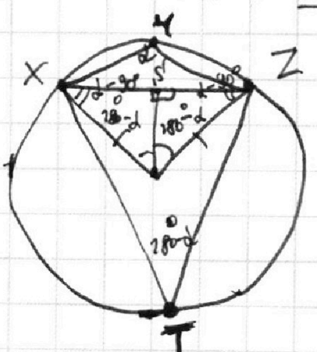


Пусть $MP \perp AB$ и $NQ \perp AC$, при этом $P \in AB$ и $Q \in AC$.
По условию:
$MP = 4{,}5$ и $NQ = 2$.
По теореме, обратной ~~то~~ лемме о трезубце*:
CM — биссектриса $\angle ACB$, а BN — биссектриса $\angle ABC$.
По свойству вписанной окружности: I — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, где $I = BN \cap CM$.
По лемме о трезубце:
~~BM~~ $MA = MB = MI$ и $NA = NC = NI$.

* так как ~~дуги MB и MA равны, то~~ ~~дуги~~ $\cap MB = \cap MA$ ($\cap$ — дуга), то $MB = MA$. Аналогично $AN = NC$}

По признаку дельтоида ($AM = MI$ и $AN = NI$):
$AMIN$ — дельтоид $\Rightarrow$ (по свойству дельтоида) $AI \perp MN$ и ($J = AI \cap MN$) $AJ = JI = \frac{AI}{2} \Rightarrow AI = 2AJ$





Заметим, что (см. слева) $OS = R\sin(90° - \alpha)$
~~$XZ = 2R\sin\alpha$ и при $\alpha \in [0°;90°)$, и при $\alpha \in (90°;180°)$ и при $\alpha = 90°$ (тогда XZ — диам.)~~
Значит:
$OS =$ ~~$R\sin(90° - \alpha)$~~ ~~$R\cos(\alpha)$~~ $R\sin(90° - \alpha)$.

$$\frac{\sin(90° - \alpha)}{4{,}5} = \frac{\sin(90° - \beta)}{2} = \frac{\sin\left(90° - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{AJ}.$$

Далее решаем, предполагая, что:
1) $\alpha < 90°$ и $\beta < 90°$
2) $\alpha < 90°$, $\beta > 90°$ и $\frac{\alpha+\beta}{2} > 90°$
3) $\alpha < 90°$, $\beta > 90°$ и ...

Получим $AJ \Rightarrow$ и ответ.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ