



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
- [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
- [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
- [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

- [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

- [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
- [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МОФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} ab &: 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc &: 2^{15} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \\ ac &: 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{45} \end{aligned}$$

\Rightarrow Можно переключить эти показатели произведения, получим:

$$(abc)^2 : 2^{34} \cdot 3^{45} \cdot 5^{75}$$

Т.к. $(abc)^2$ - это квадрат, то степень каждого простого числа в него войдет четным числом. Значит, раз: $(abc) : 3^{45}$

$\Rightarrow (abc)^2 : 3^{44}$ и $(abc)^2 : 5^{75} \Rightarrow (abc)^2 : 5^{76}$. Получим $(abc)^2 : 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76}$, т.к. числа натуральные, можем выдвинуть корень:

$$(abc)^2 : 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{76} \Rightarrow abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$$

но т.к. $ac : 5^{45}$

$\Rightarrow abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$ не меньше
Раз $abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$, то abc ~~натуральное~~
 $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$, т.к. a, b, c - натуральные числа.

Пример к $abc = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$:

$$\begin{cases} a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{21} \\ b = 2^3 \cdot 3^5 \\ c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{21} : 2^7 \cdot 3^{11} \cdot 5^{14} \\ bc = 2^{15} \cdot 3^{16} \cdot 5^{22} : 2^{15} \cdot 3^{15} \cdot 5^{18} \\ ac = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} : 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{43} \end{cases}$$

Пример подходит.

Ответ: $2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{38}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

√3

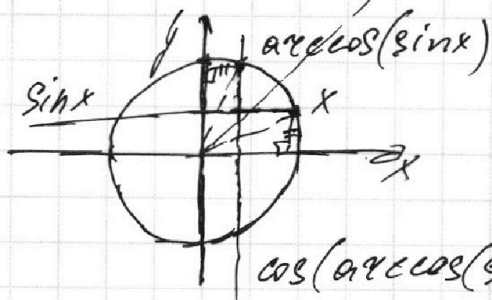
$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$$

Нарисуем графики правой и левой части уравнения. $f(x) = \frac{3\pi}{2} + x$ - это прямая, $g(x) = 5 \arccos(\sin x)$ колесика из функции $g_1(x) = \arccos(\sin x)$ растянутой в 5 раз вдоль оси Ox , поэтому, чтобы понять, как выглядит график $g(x)$, сначала нужно понять как выглядит $g_1(x)$.

Т.к. $\sin x$ - функция периодическая, с периодом 2π , то и $g_1(x) = \arccos(\sin x)$ тоже периодическая, с периодом 2π . Значит нам достаточно построить $g_1(x)$ на промежутке $[0; 2\pi]$, чтобы полностью понять как выглядит график функции.

Рассмотрим $g_1(x)$ на промежутке $[0; \pi]$:

1. $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$



(мы учитываем, что) из единичной окружности видно, что при $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\arccos(\sin x)$ будет являться мерой угла между первой осью и первой четвертью, т.е.

1.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

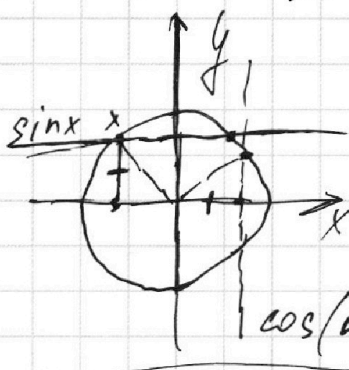
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x, \text{ при } x \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

а) $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$



Из един. окруж. видно, чтобы получить между $\arccos(\sin x)$, углом x отразить озн.

Объяснение: в каком направлении, озн. оси первой четверти, т.е.

$$\arccos(\sin x) = -\frac{\pi}{2} + x \text{ при } x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$$

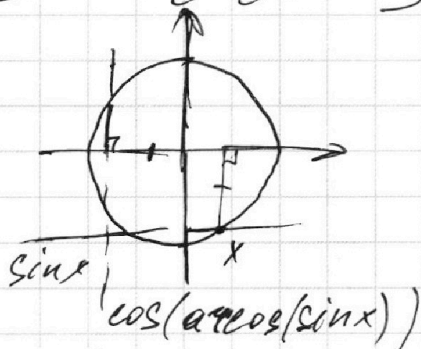
б) $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$



Из един. окр. и симметрии видно, что

$$\arccos(\sin x) = x - \frac{\pi}{2} \text{ при } x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$$

в) $x \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$



Из един. окр. и симметрии видно, что

$$\arccos(\sin x) = \frac{5\pi}{2} - x \text{ при } x \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$$

Переведем на левый и обратим $f_1(x)$

а) $\arccos(\sin x)$

2.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

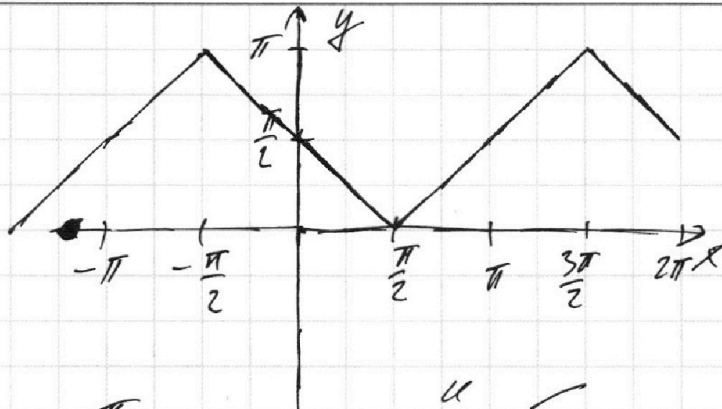
Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

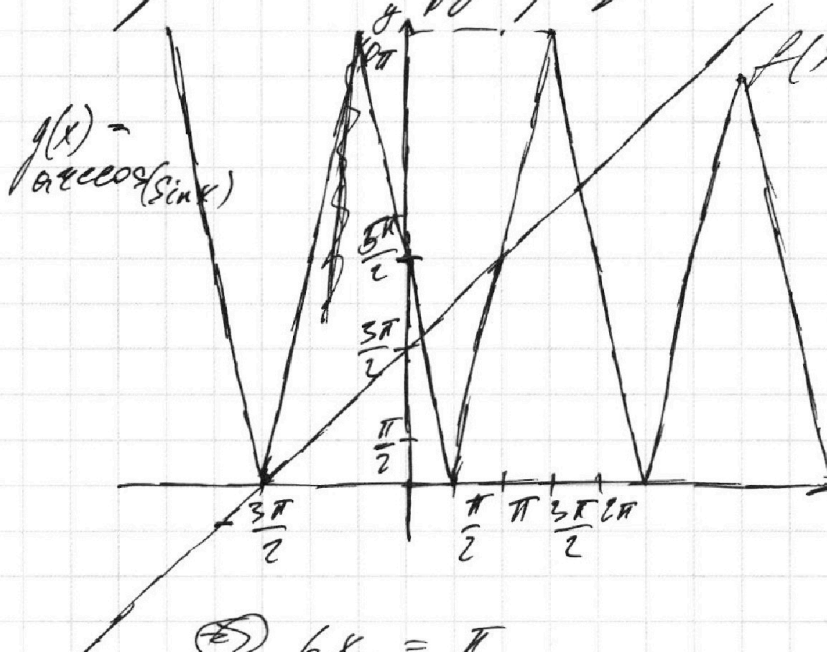
1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Может быть и $f(x)$ и $g(x)$:



Из графиков
находим
решения:

$$x_1 = -\frac{3\pi}{2}$$

$$x_2 = \pi$$

$$x_3 + \frac{3\pi}{2} = 5\left(\frac{\pi}{2} - x_3\right)$$

$$\textcircled{2} \quad 6x_3 = \pi$$

$$x_3 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_4 + \frac{3\pi}{2} = 5\left(\frac{5\pi}{2} - x_4\right) \Rightarrow 6x_4 = \frac{25\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 11\pi$$

$$x_4 = \frac{11\pi}{6}$$

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}; \pi; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$

3.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

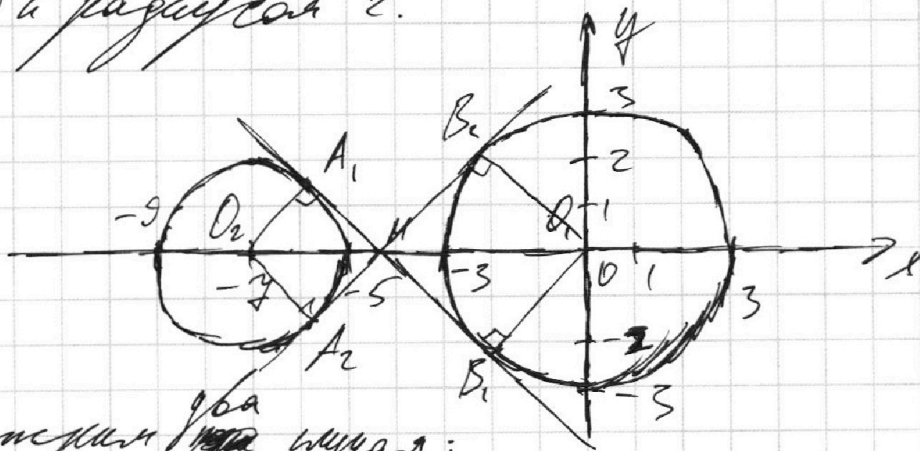
№4

$$\begin{cases} x+3ay-9b=0 & (1) \\ (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad (x^2+14x+y^2+45)(x^2+y^2-9)=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x^2+14x+y^2+45=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ (x+7)^2+y^2=4 \end{cases} \quad (3)$$

(3) Графиками выражения (2) будут две окружности: первая в центре $(0;0)$ и радиусом 3, а вторая в центре $(-7;0)$ и радиусом 2.



Рассмотрим ~~два~~ ^{один} случай:

(a) $a=0 \Rightarrow$ (1) принимает вид:

$$x = 9b - \text{это является}$$

вертикальной прямой, а из графика выражения (2) видно, что такая вертикальная прямая не сможет пересечь одновременно

1. но две окружности, т.е. не возможно найти

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

такой параметр b , чтобы каждая система
имела ровно ∞ решений.

6. $a \neq 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$ упрощается вид:

$$x + 3ay - 7b = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{-3a}x + \frac{7b}{3a} \text{ - это прямая,}$$

при этом из данной задачи мы видим, что
при заданном параметре a , от b зависит
только свободный член. Т.е. при изменении
 b , мы совершаем параллельный перенос данной
прямой вдоль оси Oy .

Рассмотрим два случая:

а) $a > 0 \Rightarrow y = \frac{1}{-3a}x + \frac{7b}{3a}$ - это убывающая
функция.

Из графика выражения (2) можно сделать
вывод, что, чтобы существовала такая b ,

при которой система имела ровно ∞ решений,
нужно, чтобы

~~коэффициент~~ коэффициент y прямой $y = \frac{1}{-3a}x + \frac{7b}{3a}$
~~был~~ был меньше по модулю, чем

y в уравнении общей касательной окруж-
ностей. модуль

Каждый раз коэффициент y ~~у~~
данной касательной:

Рассмотрим $\triangle A_1MO_2$ и $\triangle B_1MO_1$:

7. 1) $\angle O_1MB_1 = \angle O_2MA_1$, как верши.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



выражения отн. к x , модуль коэффициента касательной будет тот же, что и в случае \textcircled{A} :

$$\left| \frac{1}{-3a} \right| < \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \quad a < 0$$
$$\frac{1}{-3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$a < -\frac{2\sqrt{6}}{15} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right)$$

Ответом будет $\left\{ \begin{array}{l} a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \\ a \in \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right) \end{array} \right. \quad \textcircled{B}$

$$\textcircled{B} \quad a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$$

4.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



2) $\angle O_2 A_1 M = \angle O_1 B_1 M = 90^\circ$, т.к. $A_1 B_1$ - кас. (3)

$\triangle O_2 A_1 M \sim \triangle O_1 B_1 M$ (4)
 $O_2 A_1 = 2$
 $O_1 B_1 = 3$
 $O_1 O_2 = 4$

$O_2 M = \frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{12}{5}$ по т. Пифагора:
 $O_2 M^2 = O_2 A_1^2 + M A_1^2$
 $\frac{144}{25} = 4 + M A_1^2$
 $M A_1 = \frac{4\sqrt{6}}{5}$ (5)

$\tan \angle A_1 M O_1 = \tan \angle A_1 M O_2 = \frac{A_1 O_2}{A_1 M} = \frac{2}{\frac{4\sqrt{6}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$

~~Теперь~~ Теперь можем найти координаты значения a : $|\frac{1}{-3a}| < \frac{5}{2\sqrt{6}}$ (6)

$\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}} \Rightarrow a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$, т.е.
 $a \in (\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty)$

$a < 0 \Rightarrow y = \frac{1}{-3a} \cdot x + \frac{4b}{3a}$ - это возрастает

Аналогичными рассуждениями, что и для пункта (1), приходим, что нам необходимо, что модуль коэффициента общей внешней касательной для окружностей был больше $|\frac{1}{-3a}|$. В силу симметрии графика (2)

3

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5 Преобразуем левое равенство:

$$\log_4^4(6x) - 2 \cdot \log_6^4 4 = \log_{36x^2} 343 - 4$$

$$\log_4^4(6x) - 2 \cdot \frac{1}{\log_3 6x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\log_3 6x} - 4$$

Замена: $\log_3(6x) = t$, при этом $t \neq 0$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \quad | \cdot t$$

$$t^5 + 4t - \frac{3}{2} = 0 \quad (1)$$

Преобразуем второе равенство:

$$\log_7^4 y + 6 \log_7 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4$$

$$\log_7^4 y + 6 \cdot \frac{1}{\log_7 y} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\log_7 y} - 4$$

Замена: $z = \log_7 y$, при этом $z \neq 0$

$$z^4 + 6 \cdot \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{z} - 4 \quad | \cdot z$$

$$z^5 + 4z + \frac{7}{2} = 0 \quad (2)$$

Сложим выражения (1) и (2):

$$t^5 + z^5 + 4t + 4z = 0$$

$$(t+z)(t^4 - t^3z + t^2z^2 - tz^3 + z^4 + 4) = 0$$

Рассмотрим графически:

$$(1) \quad t^4 - t^3z + t^2z^2 - tz^3 + z^4 + 4 = 0$$

1.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. $t^4 \geq 0$, $z^4 \geq 0$, $t^2 z^2 \geq 0$, можем записать
нер-во Коши:

$$1) \frac{t^4 + t^2 z^2}{2} \geq |t^3 z| \geq t^3 z \quad (*)$$

$$(*) \frac{t^4}{2} + \frac{t^2 z^2}{2} - t^3 z \geq 0$$

$$2) \frac{z^4 + t^2 z^2}{2} \geq |z^3 t| \geq z^3 t \quad (**)$$

$$(**) \frac{z^4}{2} + \frac{t^2 z^2}{2} - z^3 t \geq 0$$

Сложим эти два получившихся нер-ва:

$$\frac{t^4}{2} + \frac{z^4}{2} + t^2 z^2 - z^3 t - t^3 z \geq 0$$

$$t^4 - t^3 z + t^2 z^2 - z^3 t + z^4 + 4 \geq 4 + \frac{t^2}{2} + \frac{z^2}{2} > 0$$

Из этого получаем, что равенство данного
выражения с 0 невозможно.

② $t + z = 0 \Rightarrow$
Обратная замена $\rightarrow \log_4(6x) + \log_4(y) = 0$
 $\log_4(6xy) = 0$
 $6xy = 1$
 $xy = \frac{1}{6}$

Ответ: $\frac{1}{6}$

2

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6
Зададим ~~уравнение~~ точки, которые лежат в
затененной параллелограмме с помощью
системы неравенств:

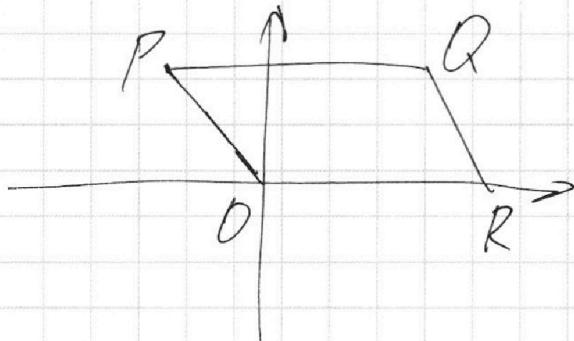
$$OR: y = 0$$

$$PQ: y = 68$$

$$PO: \frac{x-0}{-17-0} = \frac{y-0}{68-0} \Rightarrow y = -4x$$

$$QR: y = -4(x-19) \Rightarrow y = -4x + 76$$

⊕ Точки фигуры: ~~на~~ $y \in [0; 68]$



$$\begin{cases} y \geq -4x \\ y \leq -4x + 76 \end{cases}$$



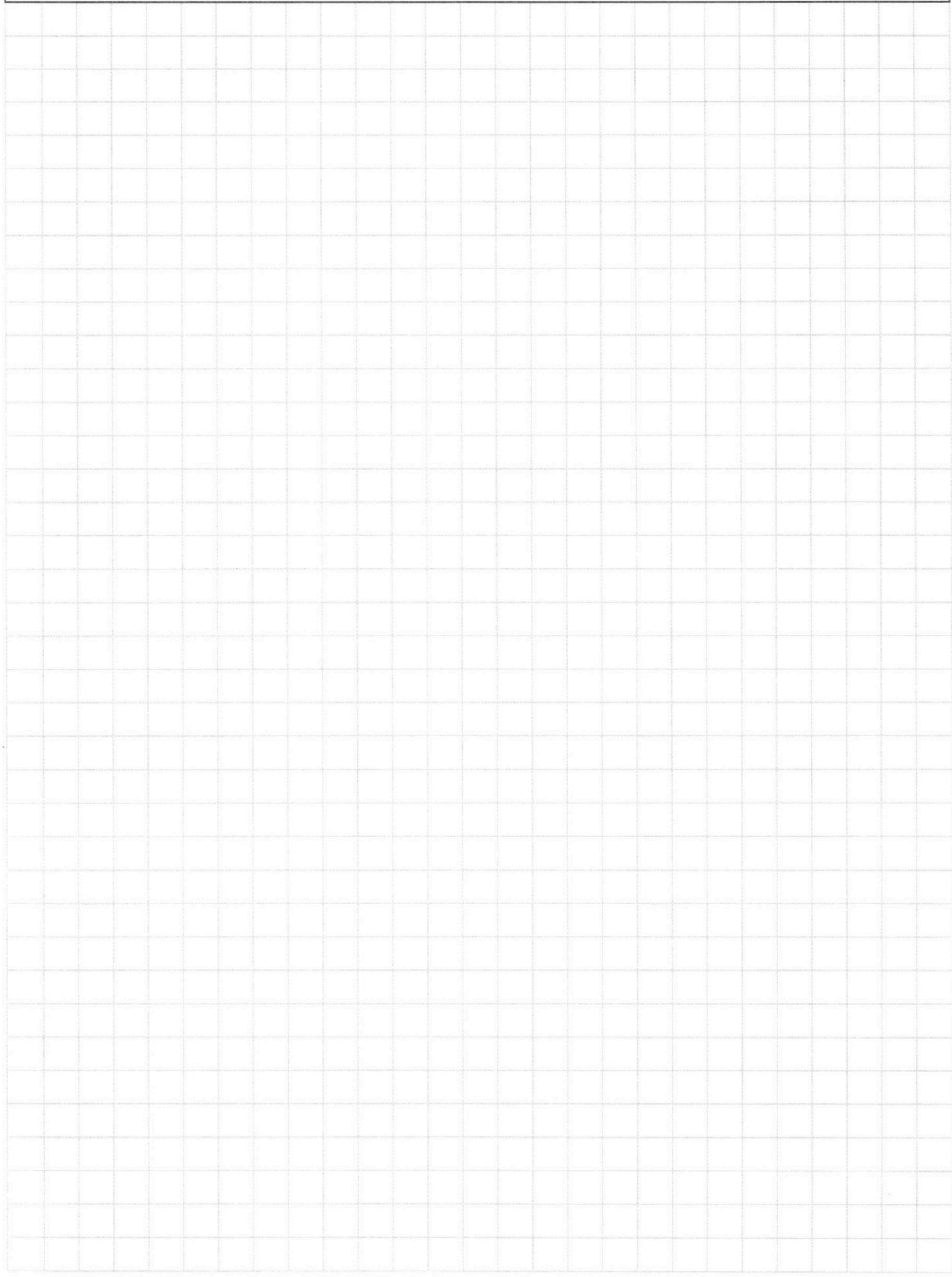
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

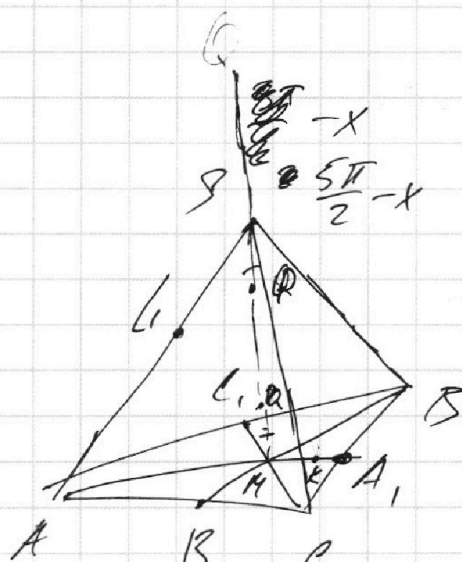
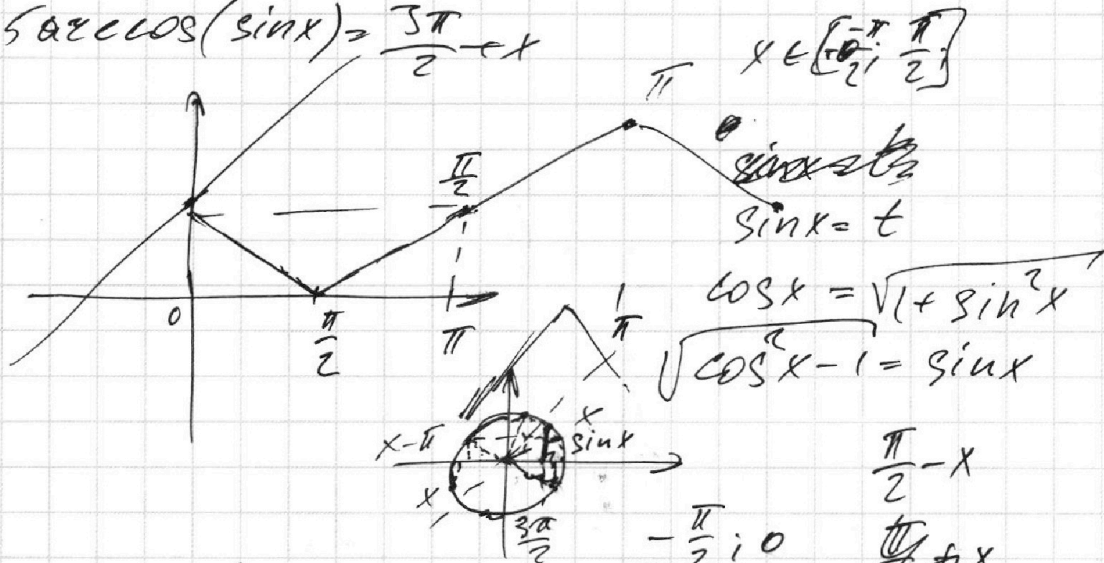
- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

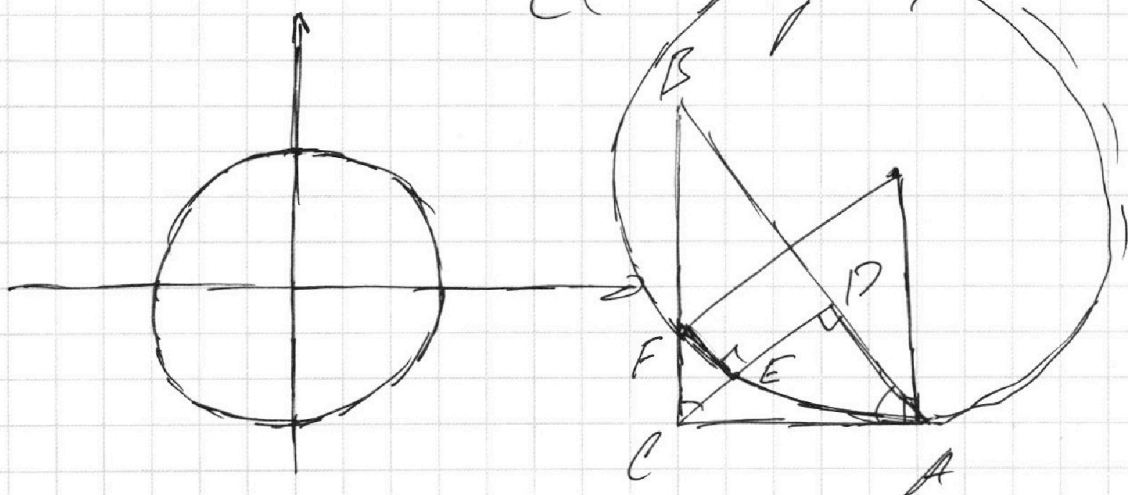


$$\arccos(\sin x) = \frac{5\pi}{2} - x$$



$$\frac{5\pi}{2} - (x - \pi) = \frac{5\pi}{2} - x$$

$$\begin{cases} x + 3ay - 3b = 0 \\ (x^2 + 14x + 49 + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \\ (x + 7)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$



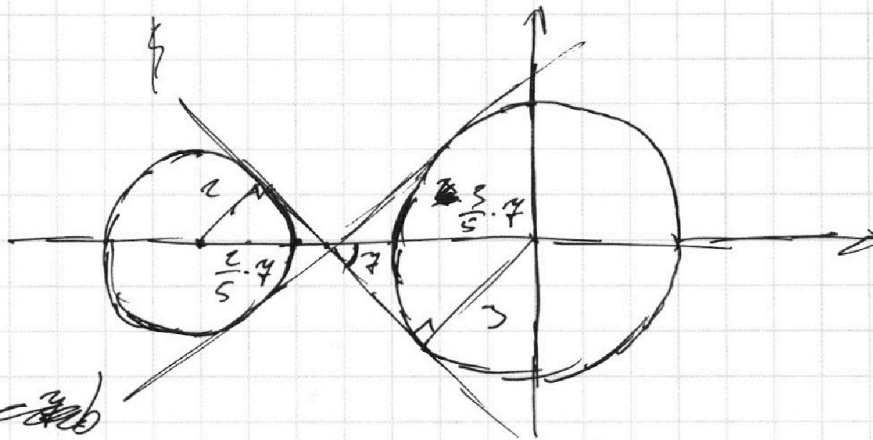
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~а~~ ~~а~~

$$x - 3y = -3ay$$

$$y = \frac{1}{-3a}x + \frac{3y}{3a}$$

$$\begin{array}{r} x/4 \\ +56 \\ \hline 14 \\ \hline 96 \end{array} \quad \begin{array}{r} 196 \\ 25 - 4 \\ \hline 96 \\ 25 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 32}{25}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2^5}{25}} = \frac{\sqrt{6} \cdot 4}{5}$$

$$\frac{1}{3a} < \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$2\sqrt{6} < 15a \quad a > \frac{2\sqrt{6}}{15}$$

~~$$2\sqrt{6} < -15a$$~~
~~$$a < -\frac{2\sqrt{6}}{15}$$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

✓1

$$abc = 2^{14} \cdot 3^{17} \cdot 5^{45} \cdot 11$$

~~$$abc = 2^6 \cdot 3^9 \cdot 5^{29} \cdot 11$$~~

$$(abc)^2 : 2^{54} \cdot 3^{45} \cdot 5^{95}$$

$$(abc)^3 : 2^{34} \cdot 3^{44} \cdot 5^{96}$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{58}$$

$$abc : 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{45}$$

$$a = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^{21}$$

$$b = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{10} \cdot 3^{11} \cdot 5^{22}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ 74 \\ \hline 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 17 \\ \hline 43 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 18 \\ 19 \\ \hline 32 \\ 45 \\ \hline 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 86 \\ 2 \\ \hline 38 \\ 16 \end{array}$$

$$x + y + z = 17$$

$$x + y = 4$$

$$y + z = 13$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 21 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 5 \\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 245 \\ 28 \\ \hline 63 \end{array} \quad \begin{array}{r} 17 \\ 49 \\ 7^3 \end{array}$$

~~abc = 2^{14} \cdot 3^{22} \cdot 5^{45}~~

✓5

$$\log_7(6x) + \log_7(y) = 0$$

$$t^4 - 2 \cdot \frac{1}{t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} - 4 \quad | \cdot t \quad 22t \leq 22$$

$$t^5 - 2 = \frac{3}{2} - 4t$$

$$t^5 + 4t - \frac{7}{2} = 0$$

$$\frac{12}{2} - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$z^4 + 6 \cdot \frac{1}{z} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{z} - 4$$

$$z^5 + 4z + \frac{11}{2} = 0$$

$$(t+z)(z^4 - z^3 \cdot t + z^2 \cdot t^2 - zt^3 + t^4) + 4(t+z) = 0$$

$$t+z=0$$

$$\log_7(6x) + \log_7(y) = 0$$

$$\log_7(6xy) = 0 \Rightarrow$$

$$2^4 - 2 \cdot t + 2t^2 - 2t^3 + t^4 + 4 = 0 \quad -2t(2+t^2)$$

$$6xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{6} \quad t^4 + z^4 = 2t^2 z^2$$

$$-2t(2+t^2)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

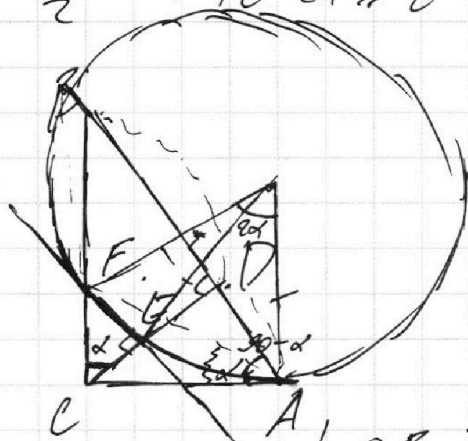
МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$z^4 - z^3t + z^2t^2 - zt^3 + t^4 + 4 = 0$$

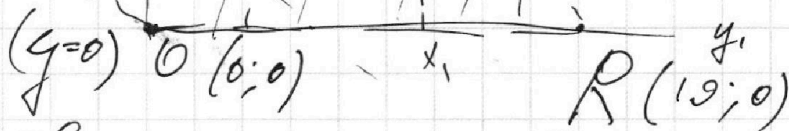
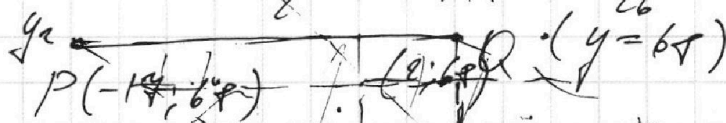
$$\left. \begin{aligned} \frac{z^4 + z^2t^2}{z^2t^2 + t^4} &\approx \frac{z^3t}{t^3z} \\ \frac{z^4 - z^3t + z^2t^2 - zt^3 + t^4}{z^2t^2 + t^4} &\approx \frac{z^3t - zt^3}{t^3z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} z^4 - z^3t + z^2t^2 - zt^3 + t^4 &\approx 0 \\ -11 + 4 > 0 &- (!) \end{aligned}$$



$$\frac{AB}{BD} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{3}{15}$$

$$\frac{1}{2} \cdot CB \cdot AD = \frac{3}{26}$$



$$\frac{x-0}{-17-0} = \frac{y-0}{69-0}$$

$$\frac{69}{17} = \frac{17}{69}$$

$$69x = -17y \Rightarrow y = -4x$$

$$y = -4(x-19) = -4x + 76$$

$y \in$

$$\begin{cases} y \geq -4x \\ y \leq -4x + 76 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 \geq -4x_1 \\ y_2 \geq -4x_2 \\ y_1 \leq -4x_1 + 76 \\ y_2 \leq -4x_2 + 76 \\ -4x_1 + 76 \geq -4x_2 \end{cases}$$

$$4(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 40 \quad y \in [0, 69]$$

$$y_2 - y_1 = -4(x_2 - x_1) + 40$$

$$69 - 19 = -4(x_2 - x_1) + 40$$

$$49 = -4(x_2 - x_1) + 40 \Rightarrow x_2 = x_1 + 7$$

$$x_2 - x_1 = 7$$