



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой BC в точке B , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке F , а катет AC – в точке E . Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{8xz} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4 \log_y 5 = \log_{yz} 0,2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-16; 80)$, $Q(2; 80)$ и $R(18; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BSC в точке N , $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab : 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$$

$$ac : 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$bc : 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

, тогда $abc \in \mathbb{N}$

Пусть: $ab = 2^8 \cdot 3^{14} \cdot 5^{12}$

$$bc = 2^{12} \cdot 3^{20} \cdot 5^{17}$$

$$ac = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{39}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{34} \cdot 3^{55} \cdot 5^{68}, \text{ но } 55 \not\div 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 b^2 c^2 = 2^{34} \cdot 3^{56} \cdot 5^{68} \Rightarrow abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$

Ответ: $abc = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$

Пояснения: мы берём 56, т.к. 54 не будет хватать и в какой-то
паре возникнет противоречие. Вед означать сумма степеней 3 ≥ 55 .

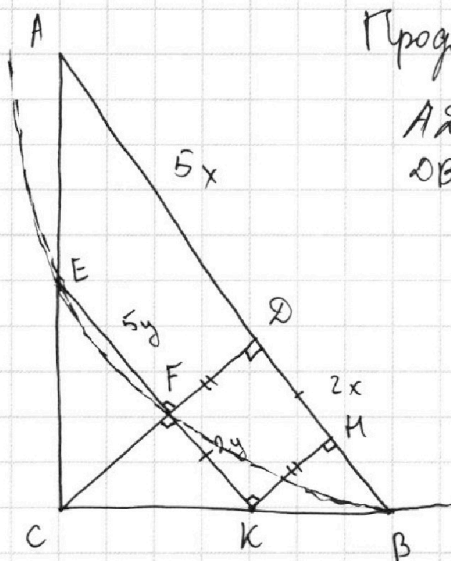
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продлим EF до EK

$$\begin{aligned} AD &= 5x \\ DB &= 2x \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{из условия } EF \parallel AB \Rightarrow \\ \Rightarrow EF = 5y; FK = 2y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow EF = 5y; FK = 2y$$

Проведём $KM \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow FDK$ - прямоугольник $\Rightarrow FD = KM$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} EF \cdot CF$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{CD \cdot AD}{CF \cdot EF} = \left(\frac{CF + KM}{CF} \right) \cdot \frac{x}{y} =$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD$$

$$= \left(1 + \frac{KM}{CF} \right) \frac{x}{y}$$

$$\text{Т.к. } \triangle CFK \sim \triangle CDB: \frac{DB}{FK} = \frac{x}{y} = \frac{CD}{CF} = \left(1 + \frac{KM}{CF} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \left(1 + \frac{KM}{CF} \right)^2$$

Т.к. K - ступень точки $\Rightarrow KF \cdot KE = KB^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{10y^2} = 14y^2 = KB^2 \Rightarrow \frac{KB}{y} = \sqrt{14}. \quad \frac{KM}{CF} = \frac{KB}{CK}$$

По формуле высоты $CF = \sqrt{10}y \Rightarrow CK = \sqrt{CF^2 + FK^2} = \sqrt{10y^2 + 4y^2} = \sqrt{14}y$

$$CK = y\sqrt{14} \Rightarrow \frac{KB}{CK} = \frac{KB}{\sqrt{14}y} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 1 \Leftrightarrow \Rightarrow \sqrt{10y^2 + 4y^2} = y\sqrt{14} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{KB}{CK} = 1 = \frac{KM}{CF} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = (1 + 1)^2 = 4 \quad \text{Ответ: } \frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 4.$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

 МФТИ



$$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{2x}{10} \rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{10} - \frac{2x}{10} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - 2x\right) = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$-5\pi \leq \pi - 2x \leq 5\pi$$

$$-6x \leq -2x \leq 4\pi$$

$$\boxed{-2\pi \leq x \leq 3\pi}$$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi m \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2}k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}m \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} k, m \in \mathbb{Z} \\ -2\pi \leq x \leq 3\pi \end{matrix}$$

⇓

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2}; 3\pi; -2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; "$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

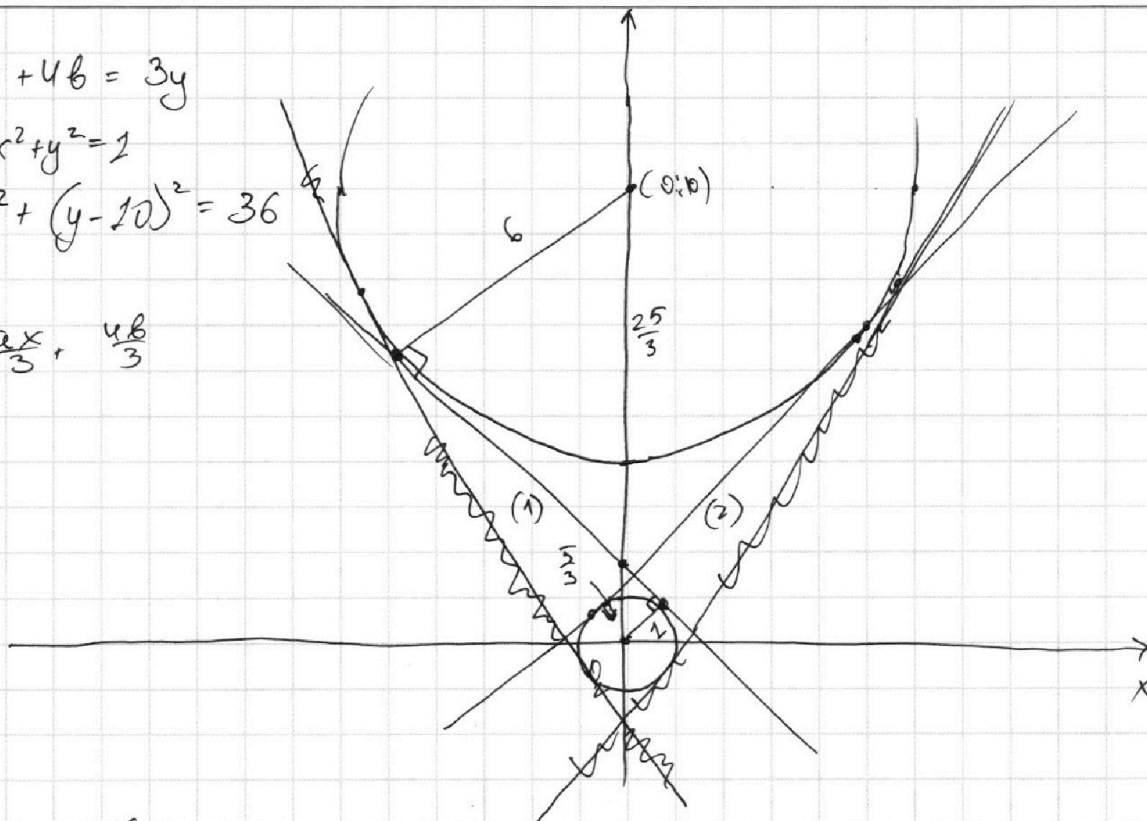


Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax + 4b = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 36 \end{cases}$$

$$y = \frac{ax}{3} + \frac{4b}{3}$$

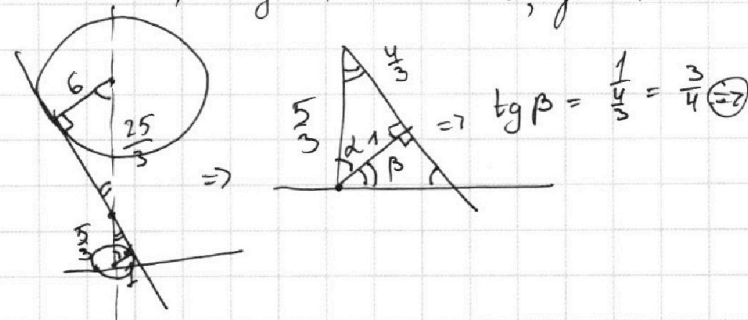


1) ^{внутреннее} ~~внешнее~~ общие касательные: это предельные положения

прямой, т.е. это значения $\frac{a}{3}$:

у прямых (1) и (2) ^{коэф. перед x} ~~коэф. перед x~~ ^{отличается только знаком.}

Пусть (1): ~~k~~ = k_1 , (2): ~~k~~ = k_2 , тогда $k_1 \leq \frac{a}{3} \leq k_2$, для таких $\frac{a}{3}$ всегда найдется b , \Rightarrow :



$$\Rightarrow k_2 = \frac{3}{4} \\ k_1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{3}{4} < \frac{a}{3} < \frac{3}{4} \\ -\frac{9}{4} < a < \frac{9}{4}$$

Ответ: $-\frac{9}{4} < a < \frac{9}{4}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуем: замена $t_x = \log_5 2x \neq 0$
 $x > 0$ $y > 0$ \rightarrow $t_y = \log_5 y \neq 0$, тогда:

$$t_x^4 - \frac{3}{t_x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t_x} - 3 \quad | \cdot t_x$$

$$t_y^4 + 4 \cdot t_y = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t_y} - 3 \quad | \cdot t_y \rightarrow$$

$$\Rightarrow t_x^5 + 3t_x = \frac{13}{3}$$

$$t_y^5 + 3t_y = -\frac{13}{3} \rightarrow (-t_y)^5 - 3t_y = \frac{13}{3}$$

Пусть $f(x) = x^5 + x$ $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0 \Rightarrow f(x) \nearrow$ на

всем $\mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, если $x_1 = x_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(t_x) = f(-t_y) \Rightarrow t_x = -t_y.$$

$$\log_5 2x = -\log_5 y \Rightarrow \log_5 2x = \log_5 \frac{1}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 2x - \log_5 \frac{1}{y} = 0$$

$$\log_5 2x \cdot y = 0 \quad \swarrow \text{т.к. } x > 0 \text{ и } y > 0.$$

$$2xy = 1$$

$$xy = \frac{1}{2}$$

Ответ: $xy = \frac{1}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Все $(\cdot)(\cdot)$ лежат в области d :

$$\begin{cases}
 (*) \\
 y \leq 80 \\
 y \geq 0 \\
 -5x \geq y \\
 -5x + 90 \leq y
 \end{cases}$$

$$5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1$$

Для всех прямых l_y d выполняется:

~~$$\begin{aligned}
 -5x \neq y \in d \\
 -5x \neq 1 = y \in d \\
 -5x + 2 = y \in d \\
 -5x + 3 = y \in d \\
 \dots \\
 -5x + 90 = y \in d
 \end{aligned}$$~~

при $y \in [0; 80]$
~~на промежутке~~

\Rightarrow

По нашему условию $(x_1; y_1) (x_2; y_2)$ - целые. Тогда все 17 значений y прямых $y = -5x + k$, где $k \div 5$, если $k \not\div 5$, то y таких прямых только 16 целых $(x; y)$ принадлежащих ей !!!

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \\
 y + 5x = 0 \\
 y + 5x - 1 = 0 \\
 y + 5x - 2 = 0 \\
 \dots \\
 y + 5x - 90 = 0
 \end{aligned}$$

выполняется для всех $(\cdot)(\cdot)$ лежащих на этих прямых
при условии ~~того~~ $(*)$, тогда

$$5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1$$

$$5x_2 + y_2 - 90 = 5x_1 + y_1 - 45$$

прямой l_y

если $k \div 5$

~~каждый~~
~~пар~~
пар (разность)
~~каждый~~

Для каждой пары: есть по 17 значений x , которые явл. целыми, следовательно

на каждой прямой вида $-5x + k = y$, есть 17 $(\cdot)(\cdot)$ с целыми координатами \Rightarrow
это выполняется и для другой прямой в паре, если $k \div 5$ то 16 значений,
пар где $k \div 5$ 10 шт. оставшихся 36 шт. ($5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1, k \div 5$)
Тогда всего вариантов: $17^2 \cdot 10 + 16^2 \cdot 36 =$

$$5x_2 + y_2 - 50 = 5x_1 + y_1 - 5$$

идут с периодом 5)

и встречи есть только друг с другом.

$= 12\ 106$ Ответ: 12 106



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Преобразуем: ~~сделав~~ замену $t_x = \log_5 2x$
 $t_y = \log_5 y$

~~$t_x^4 - 3 \frac{1}{t_x} = \frac{4}{3} t_x - 3$~~

$$t_x^4 - 3 \frac{1}{t_x} = \frac{4}{3} t_x - 3 \quad \text{и} \quad t_y^4 + 4 \frac{1}{t_y} = -\frac{1}{t_y} - 3.$$

Тогда: $t_x^4 - \frac{4}{t_x} = \frac{1}{3t_x} - 3$

$$t_y^4 + \frac{4}{t_y} + \frac{1}{3t_y} = -3 \Rightarrow$$

\Rightarrow Пусть $f(x) = x^4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{3x}$, тогда

$f(x) = x^4 + \frac{13}{3x}$ и при $x > 0$ $f(x)$ монотонно

$$\log_5 2x \cdot y = 1$$

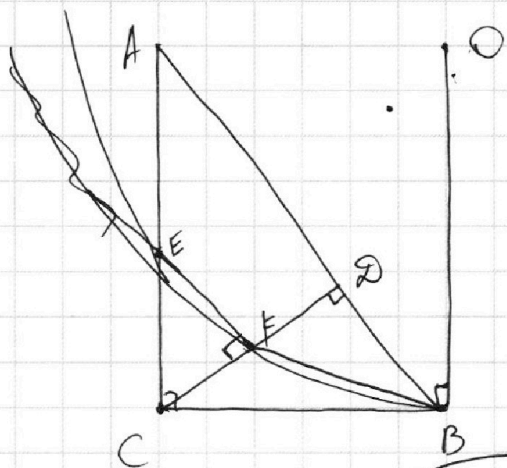
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

- 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



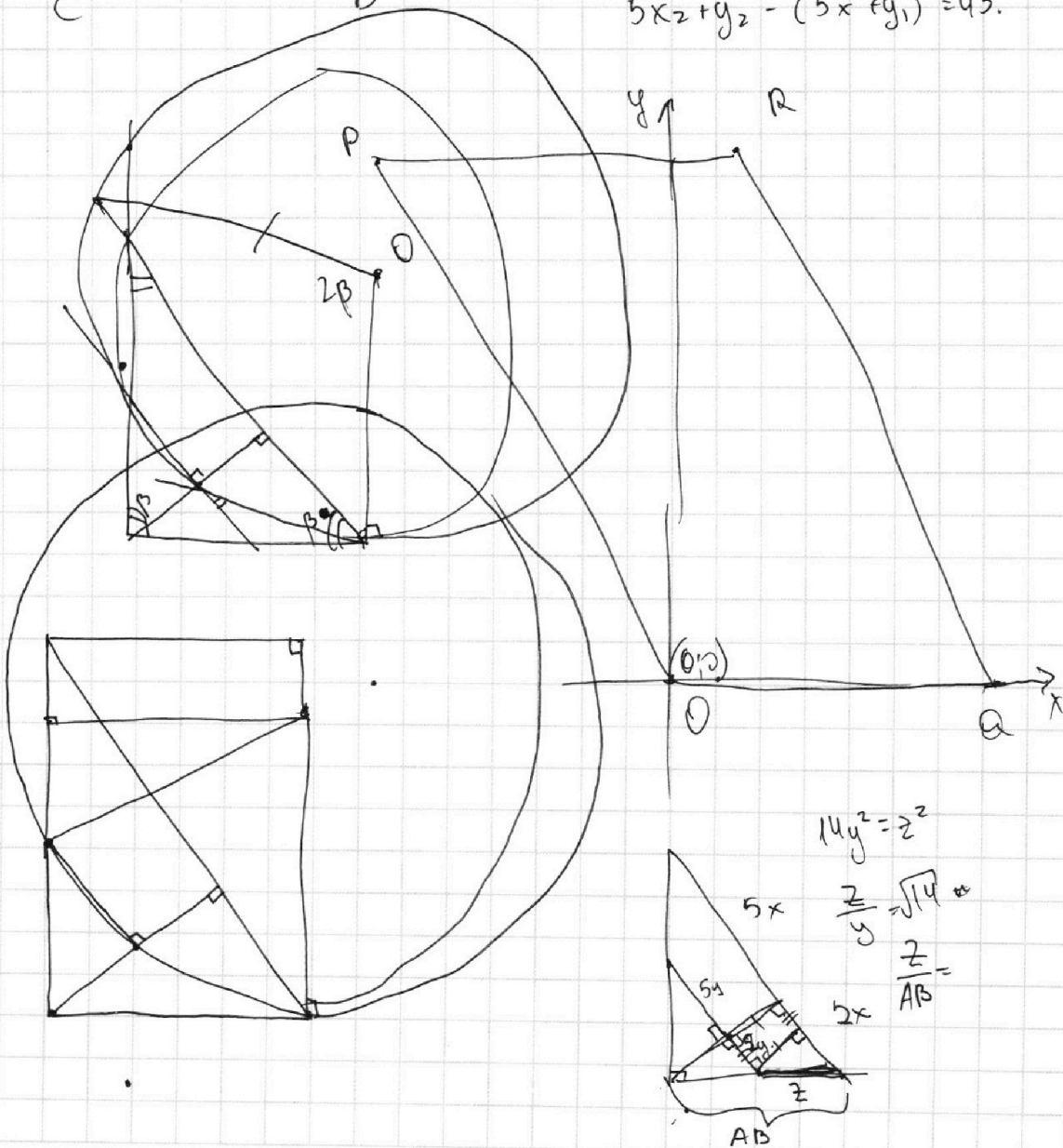
6. $5(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 45 = 9 \cdot 5.$

разность по $y_2 - y_1 = 5.$

\Rightarrow ось OX ~~и ось OY~~

$$5x_2 + y_2 - 5x_1 - y_1 = 45$$

$$5x_2 + y_2 - (5x_1 + y_1) = 45.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



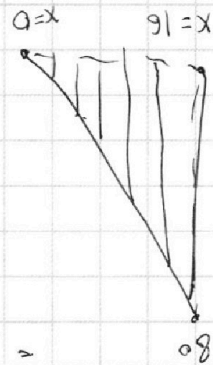
$$AD : DB = \frac{5}{2}$$

$$\frac{25}{9} - \frac{9}{9} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$2x = 25$$

$$x = \frac{25}{2}$$

$$= 0B + 0B = 81 \cdot 9$$



$$\frac{EC}{TO} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{IO}{IO}$$



$$CE \cdot CA = CF \cdot CD \quad ET =$$

$$\frac{RE}{CE} = \frac{CA}{CD} = \frac{CF}{CE}$$

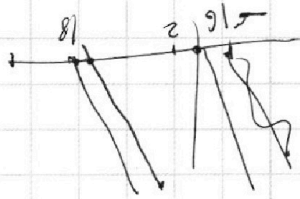
$$EF \cdot FE = TB^2$$

$$ET^2 \cdot \frac{2}{7} = TB^2$$

$$EF = \frac{5}{7} \cdot ET$$

$$TF = \frac{2}{7} \cdot ET \quad \frac{ET}{TB} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$81 + 81 \cdot 9 - 81 \cdot 9 - 81 \cdot 9 - C$$



5.

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 5^4 - 3$$

$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4(2x) = 4 \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 =$$

$$= \log_y \sqrt[3]{0,2} - 3$$

$$0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$$

$$-\frac{1}{3} \log_y 5 - 3$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

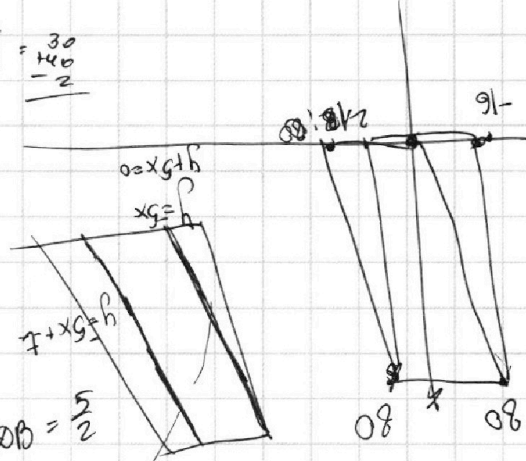
1. a b c

$$ab = 2^8 3^{14} 5^{12}$$

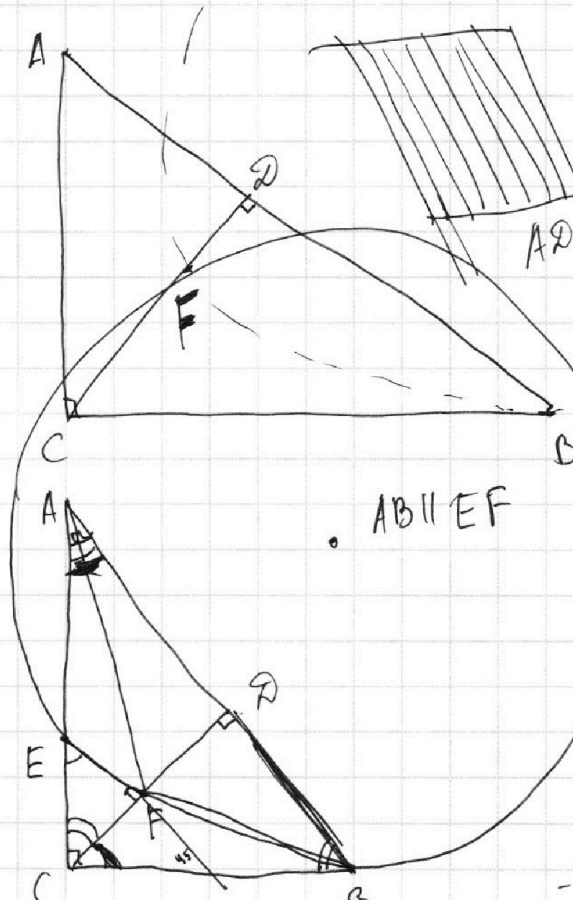
$$ac = 2^{14} 3^{21} 5^{39}$$

$$bc = 2^{12} 3^{20} 5^{17}$$

$$abc = \sqrt{2^{34} \cdot 3^{56} \cdot 5^{68}} = 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$$



2.

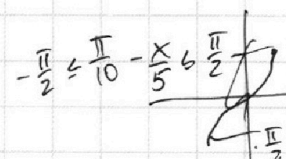


AB || EF

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{10} \\ & - \frac{6\pi}{10} \\ & - \pi \leq \pi - 2x \leq \\ & -5\pi \leq \pi - 2x \end{aligned}$$

$$\frac{5\pi}{10} - \frac{\pi}{10} = \frac{4\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}$$



3.

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}$$

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right)\right)$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{x}{5} + \frac{2\pi}{5} + 2\pi k \\ x = -\frac{x}{5} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 5x &= x + 2\pi + 10\pi k \\ 4x &= 2\pi + 10\pi k \\ 5x &= -x - \frac{2\pi}{5} + 10\pi m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x &= -2\pi + 10\pi k \\ \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} &= \\ -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} &= \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$$

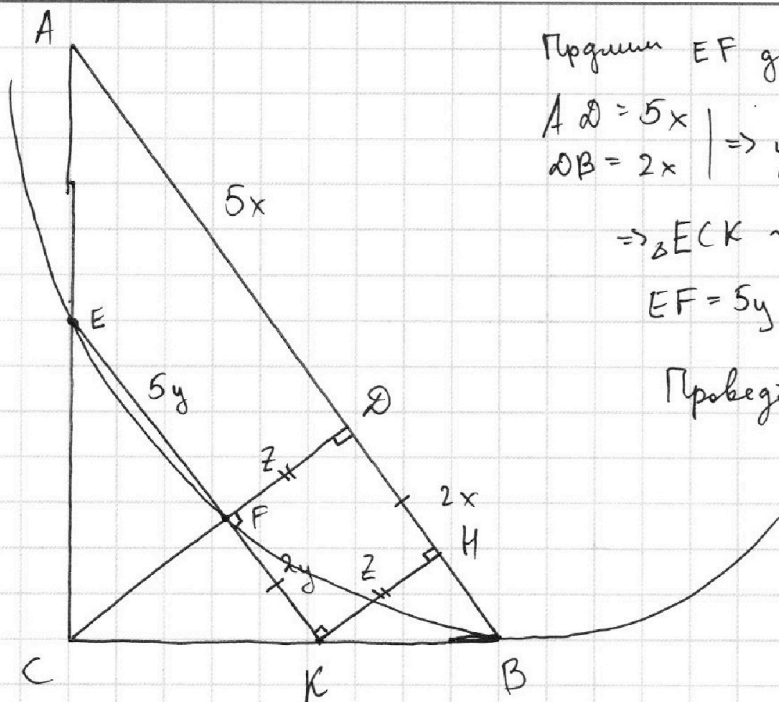
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Продлим EF до EK.

$$\begin{aligned} AD = 5x \\ DB = 2x \end{aligned} \Rightarrow \text{из условия} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ECK \sim \triangle ACB \Rightarrow$$

$$EF = 5y \quad FK = 2y \Rightarrow$$

Проведем KM \perp AB \Rightarrow

$$\Rightarrow \triangle CFK \sim \triangle KMB \text{ и } FDK - \square \Rightarrow FDK = KM \text{ из подобия:}$$

$$\frac{CD}{KM} = \frac{DB}{MB} \Rightarrow \frac{CF + KM}{KM} = \frac{DM + MB}{MB} \Rightarrow \frac{CF}{KM} = \frac{DM}{MB} = \frac{FK}{MB}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} EF \cdot CF \quad \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \frac{EF \cdot CF}{CD \cdot AD} = \frac{CF}{(CF + KM)} \cdot \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AD \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABC} S_{CEF}} = \frac{CF + KM}{CF} \cdot \frac{x}{y} = \left(1 + \frac{KM}{CF}\right) \cdot \frac{x}{y}$$

Из подобия $\triangle CFK \sim \triangle CDB$: $\frac{DB}{FK} = \frac{x}{y} = \frac{CD}{CF} = \frac{KM}{y}$

$$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \left(1 + \frac{KM}{CF}\right) = 1 + \frac{KM}{CF} \Rightarrow$$

Т.к K - середина точки $\Rightarrow KF \cdot KE = 10y^2 = KB^2 \Rightarrow \frac{KB}{y} = \sqrt{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{KM}{CF} = \frac{KB}{CK} \Rightarrow CF = y\sqrt{10} \Rightarrow CK = 2\sqrt{2}y \Rightarrow \frac{KB}{2\sqrt{2}y} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \frac{KB}{CK} = \frac{KM}{CF} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 1 + \sqrt{10} + \frac{25}{4} = \frac{29}{4} + \sqrt{10} \text{ Ответ: } \frac{29}{4} + \sqrt{10}$$



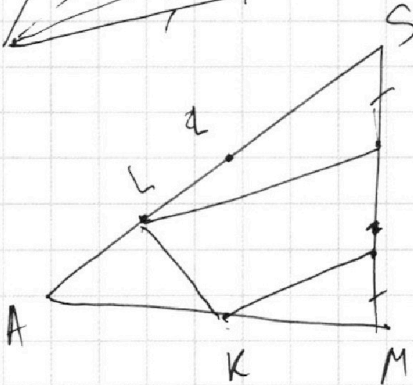
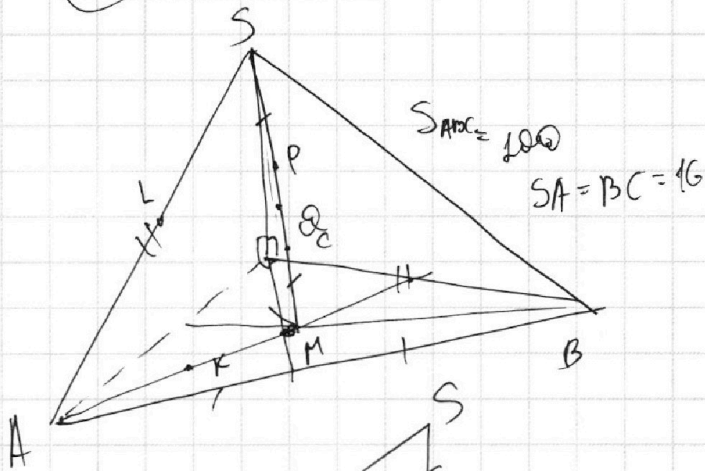
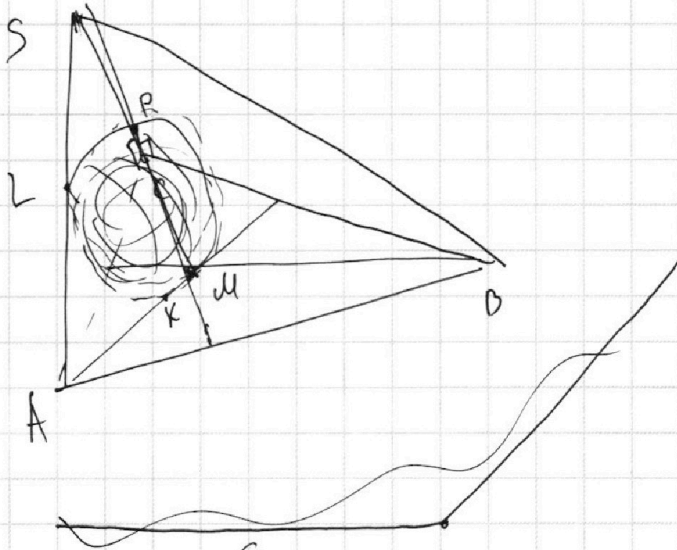
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\log_5^4(2x) - 3 \log_{2x} 5 = \log_{2x} 5 - 3$$

$$\log_5^4 y + 4 \log_y 5 = -\frac{1}{3} \log_y 5 - 3$$

$$t^4 - \frac{3}{t} = \frac{1}{t} - 3$$

$$t^5 - 3 = 1 - 3t$$

$$t^4 \cdot \frac{4}{t} = -\frac{1}{3t} - 3$$

$$t^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3t$$

$$t^5 + 4\frac{1}{3} - 3t = 0$$

$$t^5 - 3t - 4 = 0$$

$$t^5_x + t^5_y - 3(t_x + t_y) + \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{\log_5 2xy}{k \cdot y} + \frac{1}{3}$$

$$\log_5 2x = t_x$$

$$\log_5 y = t_y$$

$$(t_x + t_y) \cdot$$

$$1. \quad t_x^4 - \frac{3}{t_x} = \frac{1}{t_x} - 3 \quad \frac{1}{3} \log_y 5$$

$$2. \quad t_y^4 + 4 \cdot \frac{1}{t_y} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t_y} - 3$$

$$t_x^5 - 3 = 1 - 3t_x$$

$$t_y^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3t_y$$

$$+ t_x^5 + 3t_x - 4 = 0$$

$$t_y^5 + 3t_y + 4 + \frac{1}{3} = 0$$

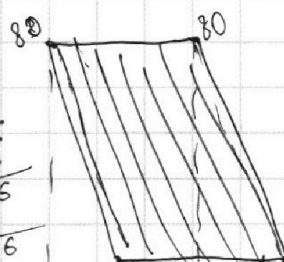
$$(t_x + t_y) \cdot \dots + 3(t_y + t_x) + \frac{1}{3} = 0$$

$$\log_5^4 2x + \log_5^4 y + 3 \cdot \log_5 2xy + \frac{1}{3} = 0$$

$$17 \cdot 17 \cdot 10 + 16 \cdot 16 \cdot 36$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 17 \\ \hline 17 \\ \times 17 \\ \hline 289 \end{array}$$



$$-5x + 1 = y$$

$$x = \frac{1-y}{5} \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{r} 9216 \\ + 2890 \\ \hline 12106 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - 20y + x^2 + y^2 - 20y + 100 = 36 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + (y - 10)^2 = 6^2 \end{cases} \\ ax + 3y + 4b = 0 \\ y = \frac{ax}{3} + \frac{4}{3}b \end{cases}$$

$$tx^5 \cdot ty^5 - 3tx^5 + 4tyx^5 - 12 = -\frac{1}{3} + tx + ty - 9txty$$

$$\frac{ax}{3} + \frac{4}{3}b$$

$$\frac{a}{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\frac{a}{3} = -3\sqrt{3} \quad a \in (-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$$

$$\frac{a}{3} = 0,6 \quad a \in \dots$$

$$\cos \phi = \dots$$

$$KB^2 = 10y^2 \Rightarrow KB = \sqrt{10y^2}$$

$$h = \sqrt{25y^2 - 4y^2} = \sqrt{21y^2}$$

$$10y^2 - 2y^2 = \dots$$

$$tx^5 - 3 \quad (-\frac{1}{3} - 3ty)$$

$$-\frac{tx^5}{3} - 3tx^5ty + 1 - 9ty$$

$$ty^5 - 3ty^5tx + 4$$

$$ty \cdot tx = -12tx \quad \frac{a}{h} = \frac{b}{8} = h = \sqrt{ab}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи.

решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Обозначим $t_x = \log_5 2x$ \Rightarrow при условии $x > 0$
 $t_y = \log_5 y$ $y > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_x^4 - 4 \cdot \frac{1}{t_x} = \frac{1}{3} t_x - 3 \\ t_y^4 + 4 \cdot \frac{1}{t_y} = -\frac{1}{3} t_y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_x^5 - 3 = 1 - 3t_x \\ t_y^5 + 4 = -\frac{1}{3} - 3t_y \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t_x^5 + 3t_x - 4 &= 0 \\ t_y^5 + 3t_y + 4\frac{1}{3} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow t_x^5 + t_y^5 + 3(t_x + t_y) + \frac{1}{3} = 0$$

$$(1) (t_x \cdot t_y)^5 - 3t_y^5 + 4t_x^5 - 12 = -\frac{1}{3} + t_x t_y^{-3} + 9t_x t_y$$

$$\begin{aligned} (t_x t_y)^5 - 9t_x t_y - 3t_y^5 + 4t_x^5 - t_x + 3t_y - 11\frac{2}{3} &= 0 \\ -4t_x^5 - 12t_x + 16 & \\ + 3t_y^5 + 9t_y + 12 & \end{aligned}$$

$$(t_x t_y)^5 - 9(t_x t_y) - 13t_x + 12t_y + 28 - 11\frac{2}{3} = 0$$

~~$f(y) = f(x)$~~ $f(2x) = \log_5 2x + 3 \log_5 2x$

$$f(xy) = 0 \quad f(2x) - 4 = f(2y) + 4 + \frac{1}{3}$$

$$0,2 = 5^{-1} - \frac{1}{3} \log_5 0,2 - 3 t_x^5 - 4 - \frac{1}{3} = -3 t_x^5$$

$$f(x) = f(y)$$

$$2x \cdot 5^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} - t_y^5 +$$

$$\log_5 2x = \log_5 y$$

~~$4x^3 - \frac{11}{3x}$~~

$$\frac{13}{1} \quad \frac{1}{x} x^{-1} = \ln x \quad \ln x$$

$$4x^3 + \frac{13}{3} \ln x = 0 \quad \frac{13}{3} \ln x$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Все точки с целыми коорд. лежат в области:

$$-y \begin{cases} y \geq 0 \\ -5x \geq y \\ -5x + 90 \leq y \\ y \leq 80 \end{cases}$$

также, что $5x_2 + y_2 - (5x_1 + y_1) = 45$

$\Rightarrow 5x_2 + y_2 = 5x_1 + y_1 + 45: A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$

$$5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1 - 45$$

$$5x_2 + y_2 - 90 = 5x_1 + y_1 - 90$$

для всех прямых из нашего участка выполняется следующее:

$-5x = y \in \alpha$ (при ограничении на y $0 \leq y \leq 80$)

$-5x + 1 = y \in \alpha$

$-5x + 2 = y \in \alpha$

...

$-5x + 90 = y$

$\Rightarrow \left. \begin{matrix} y + 5x = 0 \\ y + 5x - 2 = 0 \\ y + 5x - 3 = 0 \\ \dots \\ y + 5x - 90 = 0 \end{matrix} \right\} \in \alpha$

Значит, для всех:

$$5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1 - 45$$

...

$$5x_2 + y_2 - 90 = 5x_1 + y_1 - 90, \text{ это}$$

верно когда они лежат в α .

$$-5x + 0 = y \quad 5 \quad 10$$

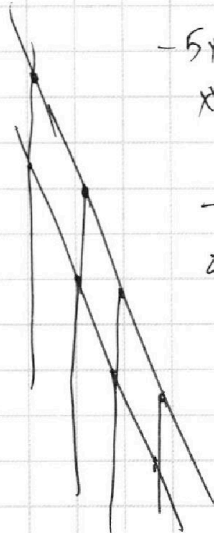
$$-5x + 1 = y \quad 6 \quad 11$$

$$\frac{80}{5} =$$

$$-5x + 89 = y$$

$$+80$$

17:0 18:0



$-5x + 89 = 0$ 10 п.

$x = \frac{89}{5}$ -90

$-5x + 89$ -45

$90 - 50$

35 п.

16

