



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5, \quad \text{и} \quad \log_{11}^4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№ 1.

Заметим, что в разложении чисел для минимизации произведения должны быть

только числа 2, 3 и 5 в некоторых степенях. Если встретится другое простое число, можно в разложении, например, числа a , можно, не нарушая условий задачи, выбрать число $\frac{a}{p}$ — таким образом произведение уменьшится.

Итак, пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1} \cdot 5^{\gamma_1}$
 $b = 2^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\gamma_2}$
 $c = 2^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3} \cdot 5^{\gamma_3}$

$$\begin{aligned} ab &= 2^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2} \quad \vdots \quad 2^6 \cdot 3^{13} \cdot 5^{11} \\ bc &= 2^{\alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_2 + \gamma_3} \quad \vdots \quad 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{13} \\ ac &= 2^{\alpha_1 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_3} \quad \vdots \quad 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 14 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 16 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 \geq 13 \\ \beta_2 + \beta_3 \geq 21 \\ \beta_1 + \beta_3 \geq 25 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 \geq 11 \\ \gamma_2 + \gamma_3 \geq 13 \\ \gamma_1 + \gamma_3 \geq 28 \end{cases}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} \cdot 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \cdot 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$$

abc будет наименьшим, когда простые множители, на которые это число разложено, входят в наименьших степенях. Из ранее записанных систем следует:

$$\begin{aligned} 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) &\geq 36 & 2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) &\geq 59 & 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) &\geq 52 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &\geq 18 & \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &\geq \frac{59}{2} = 29\frac{1}{2} & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &\geq 26. \end{aligned}$$

но $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \geq 0$

Поэтому наим. возм.

значение $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$

Заметим, что

$\gamma_1 + \gamma_3 \geq 28 \Rightarrow$

$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \geq 28$

Итак, $abc \geq 2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$ равно 30. Равенство достигается, например, для чисел $a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{12}$, $b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$, $c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$.

Ответ: $2^{18} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x. \quad \text{N3} \quad \text{9}\pi - 2x \quad (1)$$

$0 \leq \arccos(\sin x) \leq \pi$; $0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$
Значит, для равенства необходимо условие:

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi; \quad -9\pi \leq -2x \leq \pi;$$

$$-\frac{9\pi}{2} \leq -x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi.$$

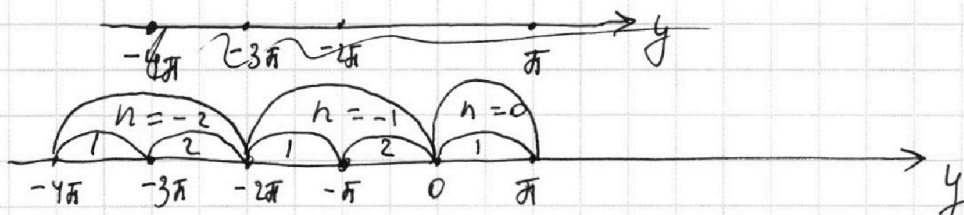
Сделаем замену: $y = \frac{\pi}{2} - x$.
Заметим, что $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos y$.
Значит, $\sin x = \cos y$.
 $x = \frac{\pi}{2} - y$; $9\pi - 2x = 9\pi - 2(\frac{\pi}{2} - y) =$
 $= 9\pi - \pi + 2y = 8\pi + 2y.$

$-4\pi \leq y \leq \pi$. Ур-е принимает вид:

$$10 \arccos(\cos y) = 8\pi + 2y.$$

Заметим теперь, что $\arccos(\cos y) = \begin{cases} y - 2\pi n, & y \in [2\pi n, \pi + 2\pi n) \\ 2\pi - y + 2\pi n, & y \in [\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n) \end{cases}, n \in \mathbb{Z}.$

В нашем случае $y \in [-4\pi; \pi]$. Посмотрим, на какие промежутки вида $[2\pi n; \pi + 2\pi n)$; $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ делится отрезок, в котором изменяется y .



В маленьких дугах, отмеченных на прямой показан, по какой формуле в данном промежутке считается $\arccos(\cos(y))$: 1 - если $\arccos(\cos y) = y - 2\pi n$; 2 - если

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\arccos(\cos y) = 2\pi - y + 2\pi n$. В больших дугах покажем, (2)
при каком n получится нужные значения.

Итак, теперь перейдем к решению ур-я. Рассмотрим
несколько случаев:

1) $y \in [-4\pi; -3\pi]$. $10 \arccos(\cos y) = 10(y + 4\pi)$;
 $10(y + 4\pi) = 8\pi + 2y$; $10y + 40\pi = 8\pi + 2y$; $8y = -32\pi$;
 $y = -4\pi$; -удовл. условию. Продолжим.

2) $y \in [-3\pi; -2\pi]$
 $10 \arccos(\cos y) = 10(2\pi - y + 4\pi) = 10(6\pi - y)$
 $10(6\pi - y) = 8\pi + 2y$; $60\pi - 10y = 8\pi + 2y$; $12y = 52\pi$
 $y = \frac{52\pi}{12} > 0$, но $y < -2\pi < 0$ - противоречие.

3) $y \in [-2\pi; -\pi]$
 $10(-2\pi - y) = 8\pi + 2y$; $-20\pi - 10y = 8\pi + 2y$
 $12y = -28\pi$; $y = -\frac{7}{3}\pi = -2\frac{1}{3}\pi \in [-3\pi; -2\pi]$ - удовл. усл.

3) $y \in [-\pi; 0]$; $10 \arccos(\cos y) = 10(y + 2\pi)$
 $10(y + 2\pi) = 8\pi + 2y$; $10y + 20\pi = 8\pi + 2y$; $8y = -12\pi$; $y = -\frac{3}{2}\pi$

4) $y \in [0; \pi]$; $10 \arccos(\cos y) = 10(2\pi - y + 2\pi) = -10y$.
 $-10y = 8\pi + 2y$; $12y = -8\pi$; $y = -\frac{2}{3}\pi$

5) $y \in [0; \pi]$; $10 \arccos(\cos y) = 10y$
 $10y = 8\pi + 2y$; $y = \pi$. Этот корень не удовл. промежутку
 $[0; \pi]$, но, в граничных точках если подставить
это число в ур-е, оно обратится в верное равенство.
Поэтому $y = \pi$ - корень.

Итак, $y = -4\pi; -\frac{7}{3}\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\frac{1}{3}\pi; \pi$. Сделаем
обратную замену и получим ответ:

$x = \frac{\pi}{2} - y$; $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \frac{7}{3}\pi = \frac{17}{6}\pi$;
 $x = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7\pi}{6}$; $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.
Ответ: $-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

2) $a \neq 0$. Т.к. наша прямая имеет с окружностью 4 общие точки для 4 решений системы, это возможно только в том случае, когда наша прямая пересекает каждую из окружностей в 2 точках (т.к. прямая и окр. пересекаются не более, чем в 2 точках).

Тогда обе системы

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 5x + 6ay - b = 0 \end{cases} \text{ и } (2) \begin{cases} x^2 + (y+9)^2 = 4 \\ 5x + 6ay - b = 0 \end{cases}$$

имеют 2 решения. равных решения.

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5} \end{cases} \quad \left(-\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}\right)^2 + y^2 = 25 \quad | : 25$$

$$\left(-\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}\right)^2 + y^2 = 25 \quad | : 25$$

$$36a^2y^2 - 12aby + b^2 + 25y^2 = 625$$

$$y^2(36a^2 + 25) - 12aby + (b^2 - 625) = 0$$

Заметим, что это квадратное ур-е должно иметь 2 реш-я. предположим, это оно ^{не более, чем 1} одно. Тогда

$$5x + 6ay - b = 0 \text{ имеет не более 1 решения} \Rightarrow$$

система имеет не более одного решения.

$$\text{Тогда } (12ab)^2 - 4(36a^2 + 25)(b^2 - 625) > 0 \quad | : 4$$

$$144a^2b^2 - 36a^2b^2 - 36a^2b^2 + 625 \cdot 36a^2 - 25b^2 + 25 \cdot 625 > 0$$

$$25b^2 < 36 \cdot 625a^2 - 25 \cdot 625 \quad | : 25$$

$$b^2 < 36 \cdot 25a^2 - 625.$$

обт

Итак, должно существовать такое b , что это нер-во верно. $\Rightarrow 36 \cdot 25a^2 - 625 > 0$

$$36a^2 > 25; \quad \begin{cases} a > \frac{5}{6} \\ a < -\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 + (y+9)^2 = 4 \\ x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5} \end{cases} \quad \left(-\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}\right)^2 + (y+9)^2 = 4 \quad | : 25$$

$$x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}$$

$$\left(-\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}\right)^2 + (y+9)^2 = 4 \quad | : 25$$

$$36a^2y^2 - 12aby + b^2 + 25y^2 + 225y + 2025 = 100$$

$$36 \cdot y^2(36a^2 + 25) + y(12ab + 450) + 1925 = 0$$

Предположим, это ур-е имеет ^{не более 1} один корень. т.е.

Тогда ур-е $x = -\frac{6a}{5}y + \frac{b}{5}$ имеет ~~один корень~~ ^{один корень} $\Rightarrow$ система имеет не более одного корня, как и система. А нужно 2

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№ 4.

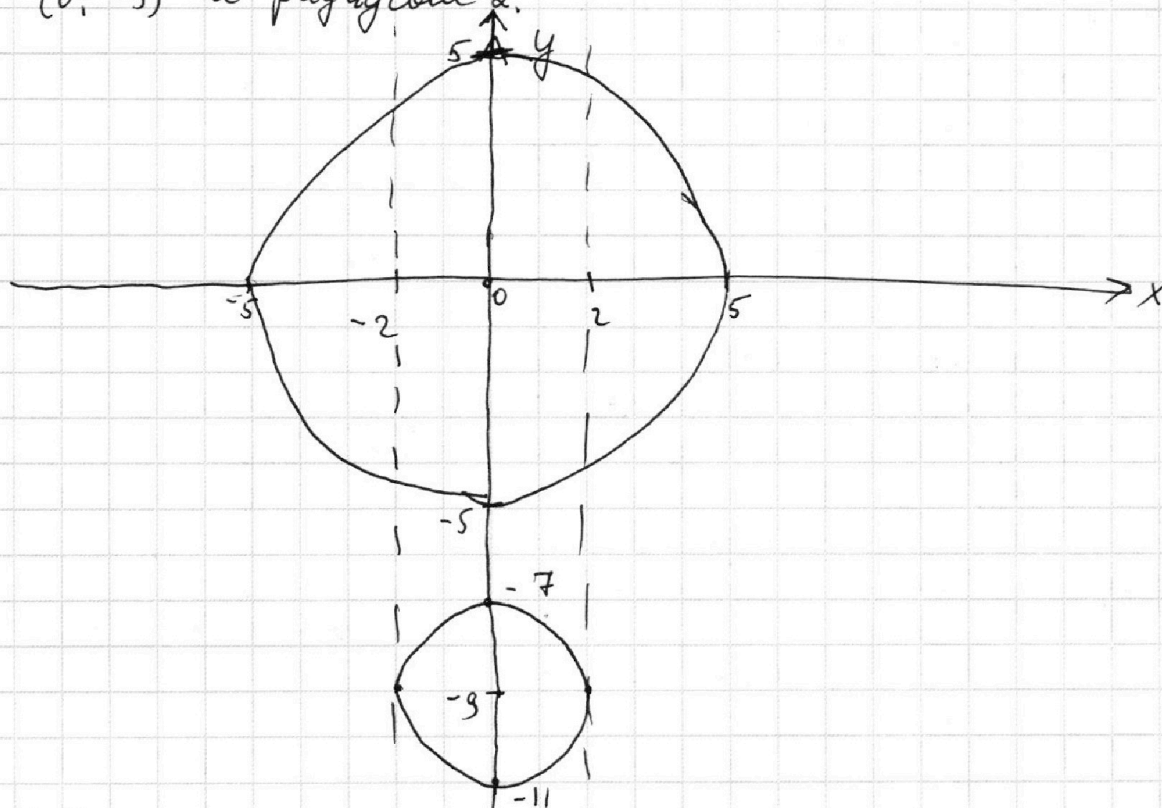
(1)

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0 \\ (x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \end{cases}$$

Пока займемся вторым ур-ем:

$$(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + y^2 + 18y + 77) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + (y+9)^2 = 4 \end{cases}$$

Оба ур-я совокупности задают окр.: первое - с центром $(0, 0)$ и радиусом 5, а второе - с центром $(0, -9)$ и радиусом 2.



Теперь становится ясно, что прямая $5x + 6ay - b = 0$ должна пересекать наши окружности в 4 точках - тогда система имеет 4 решения. Рассмотрим несколько случаев:

1) $a = 0$. $x = \frac{b}{5}$ - это прямая, параллельная оси Oy , она имеет с нашими окружностями 4 общие точки, когда

$$-2 < \frac{b}{5} < 2 \quad (\text{иначе } -2, \text{ или } 2, \text{ или } 0)$$

$-10 < b < 10$. Итак, для $a = 0$ $\exists b$ такое, что система имеет 4 решения.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

корня. Тогда $(-12ab + 450)^2 - 4(36a^2 + 25) \cdot 1925 > 0$ (3)

$$(-12ab + 450)^2 - 4(36a^2 + 25)(1925 + b^2) > 0 \quad | :4$$

$$(-6ab + 225)^2 - (36a^2 + 25)(b^2 + 1925) > 0$$

$$36a^2b^2 - 12 \cdot 225ab + 225^2 - 36a^2b^2 - 36 \cdot 1925a^2 - 25b^2 - 25 \cdot 1925 > 0$$

$$-12 \cdot 225ab + 225^2 - 36 \cdot 1925a^2 - 25b^2 - 25 \cdot 1925 > 0$$

$$-12 \cdot 9ab + 9 \cdot 225 - 36 \cdot 77a^2 - b^2 - 4925 > 0$$

$$36 \cdot 77a^2 + 12 \cdot 9ab + b^2 - 100 < 0$$

Должно существовать b , при котором это нер-во верно. Тогда квадратный трёхчлен относительно b должен иметь 2 корня, т.е. $36 \cdot 77 > 0$. Значит,

$$(12 \cdot 9b)^2 - 4 \cdot 36 \cdot 77(b^2 - 100) > 0 \quad | :16$$

$$(3 \cdot 9b)^2 - 9 \cdot 77(b^2 - 100) > 0 \quad | :9$$

$$81b^2 - 77b^2 + 7700 > 0 \quad \text{это нер-во}$$

$$(12 \cdot 9a)^2 + 4 \cdot 100 - 36 \cdot 77a^2 > 0 - \text{это верно}$$

$\forall a \neq 0$.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



②

NS.

$$1) \log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{x^3 121} \frac{1}{-5} \quad x \neq 0, x > 0, x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad | \cdot 3 \log_{11} x$$

$$3 \log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15 \log_{11} x$$

$$3 \log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x - 16 = 0$$

$$2) \log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$$

$$\log y \neq 2; y > 0$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{0,5y} 11} = \log_{0,125y^3} \frac{1}{-5} = \log_{0,125y^3} -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} 0,5y} - 5$$

$$3 \log_{11}^5 (0,5y) + 15 \log_{11} 0,5y + 16 = 0$$

$$23 \text{ Пусть } u = \log_{11} x; v = \log_{11} 0,5y.$$

$$\begin{cases} 3u^5 + 15u - 16 = 0 \\ 3v^5 + 15v + 16 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(u^5 + v^5) + 15(u + v) = 0 : 3 \\ 3(u^5 - v^5) + 15(u - v) = 0 \end{cases}$$

$$(u^5 + v^5) + 5(u + v) = 0$$

$$(u + v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 + 5) = 0$$

$$1) u = -v; u + v = 0.$$

$$\log_{11} x + \log_{11} 0,5y = 0$$

$$\log_{11} 0,5xy = 0; 0,5xy = 11; xy = 22.$$

$$2) u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4 + 5 = 0$$

$$u^4 + v^4 + 5 - uv(u^2 - uv + v^2) = 0$$

$$3(u^5 - v^5) + 15(u - v) - 32 = 0$$

Предположим, ~~е~~ относительно u есть хотя бы

$$p\text{-м } p\text{-но } f(u) = u^5 + 5u + v^5 + v; f'(u) = 5u^4 + 5 > 0$$

$f(u) \nearrow \Rightarrow$ не более 1 решения относительно u .

Это решение $u = -v$. В этом случае показано, что $xy = 22$.

Ответ: 22.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

(11)

№5. $x > 0, x \neq 1$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_x 11 = \log_x 3 \cdot \frac{1}{121} - 5. \text{ Преобразуем это выражение.}$$

$$\log_{11}^4 x - \frac{6}{\log_{11} x} = -\frac{2}{3} \log_{11} 3 \cdot \frac{1}{\log_{11} x} - 5 \quad | \cdot 3 \log_{11} x,$$

$x \neq 1 \Rightarrow \log_{11} x \neq 0$

$$3 \log_{11}^5 x - 18 = -2 - 15 \log_{11} x$$

$$\log_{11}^5 x + 15 \log_{11} x - 16 = 0. \text{ Заметим, что } \log_{11} x = 1 \text{ — корень.}$$

Пусть $\log_{11} x = t$; $t^5 + 15t - 16 = 0$.

Заметим, что $t = 1$ — корень. Заметим, что других корней быть не может, т.к. $f(t) = t^5 + 15t - 16$ — возрастающая ф-я. Покажем это: $f'(t) = 5t^4 + 15 > 0 \Rightarrow f(t)$ — возрастает. Итак, $\log_{11} x = 1$; $x = 11$.

Займемся вторым выражением:

$y > 0, y \neq 2$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y} 3 \cdot \frac{1}{11^{13}} - 5.$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \frac{1}{\log_{11} 0,5y} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11} (0,5y)} - 5.$$

Пусть $\log_{11} 0,5y = u$, $u \neq 0$, т.к. $y \neq 2 \Rightarrow 0,5y \neq 1 \Rightarrow \log_{11} 0,5y \neq 0$.

$$u^4 + \frac{1}{u} = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{u} - 5 \quad | \cdot 3u$$

$$3u^5 + 3 = -13 - 15u; \quad 3u^5 + 15u + 16 = 0;$$

Пусть $f(u) = 3u^5 + 15u + 16$; $f'(u) = 15u^4 + 15 > 0 \quad \forall u \Rightarrow f(u) \nearrow \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow 3u^5 + 15u + 16 = 0$ имеет не более 1 корня.

$$3u^5 + 15u + 16 = 0$$

$$t^5 + 15t - 16 = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



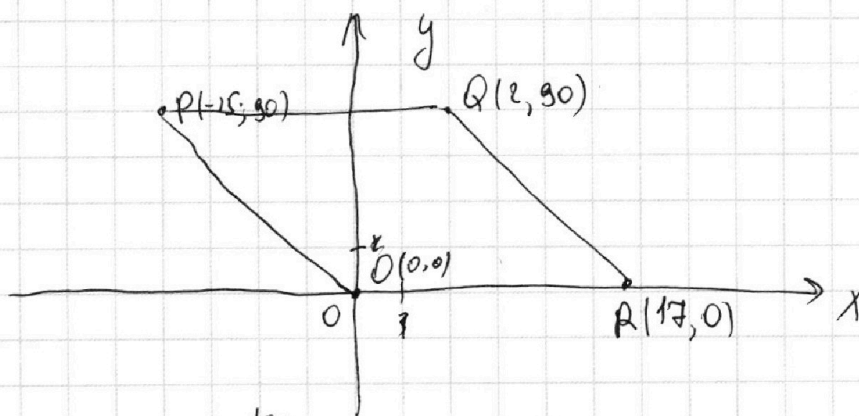
$$6(x_2 - x_1) + y_2 - y_1 = 48 \quad \sim 6.$$

В Пусть $x_2 - x_1 = x$; $y_2 - y_1 = y$.

$6x + y = 48$. Из этого следует, что все точки, удовл. условию, лежат на прямой $6x + y = 48$.

Заметим, что все ^{пары} точки, которые удовлетворяют условию, лежат на прямой $6x + y = 48$.

Заметим, что все ^{пары} точки $X(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ такие, что $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ лежат на прямой $6x + y = 48$. $y = -6x + 48$



Т.к. ^{пары} точки лежат внутри параллелограмма, их координаты удовлетворяют условию:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 30 \\ y \geq -6x + 48 \\ y \leq -6x + 102 \end{cases}$$

Пусть точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ такие, что $6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$

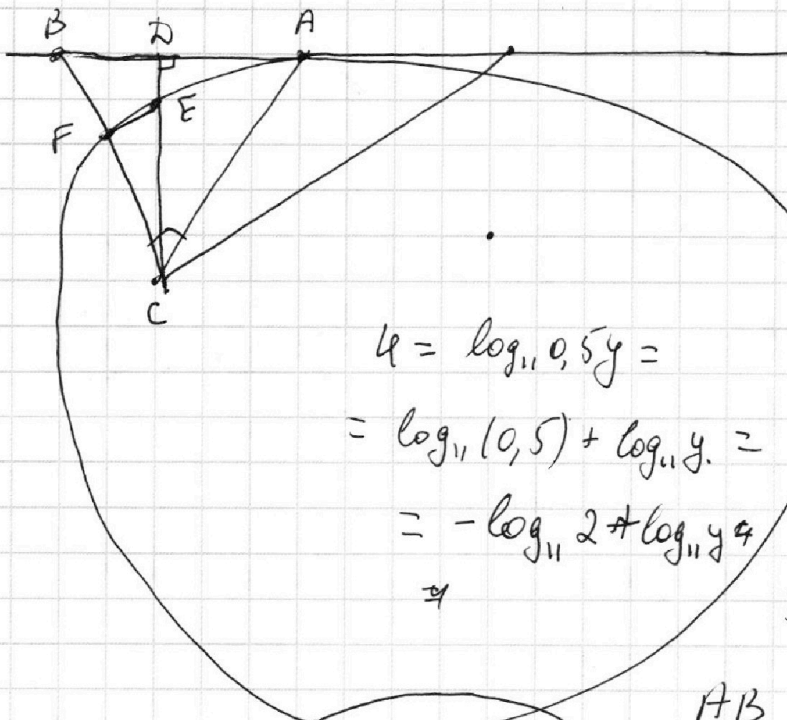
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$u = \log_{11} 0,5y =$$

$$= \log_{11} (0,5) + \log_{11} y =$$

$$= -\log_{11} 2 + \log_{11} y$$

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x =$$

$$= \log_{11} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x =$$

$$= -\frac{2}{3} \log_{11} (11 - 5) \cdot 3$$

$$u^4 + \frac{1}{u} = -\frac{13}{3u} - 5/3u$$

$$3u^5 + 15u + 16 = 0$$

$$3 \log_{11}^5 \frac{y}{2} + 15 \log_{11} \frac{y}{2} + 16 = 0$$

$$\frac{AB}{BD} = 1,4$$

$$BD = x$$

$$AC^2 = CF \cdot CK$$

$$\frac{CK}{AD} = \frac{1}{11}$$

$$3 \log_{11}^4 x - 16 \log_{11} x + 15 = 0$$

$$\log_{0,5y} 11 = \frac{1}{\log_{11,0,5y}}$$

$$\frac{AD \cdot CD}{CE \cdot EF}$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5$$

$$\log_{(0,5y)^3} (11^{-13}) - 5 = -\frac{13}{3} \cdot \frac{1}{\log_{11,0,5y}} - 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

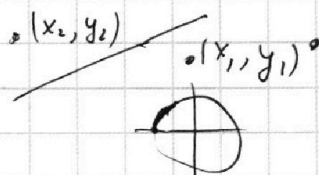
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3.



$$10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$$

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{9\pi - 2x}{10} \leq \pi \\ \sin x = \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right); \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq 9\pi - 2x \leq 10\pi \\ -9\pi &\leq -2x \leq 10\pi - 9\pi \\ \frac{9\pi - 10}{2} &\leq x \leq \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{9\pi - 2x}{10}\right) &= \cos\left(\frac{10\pi - \pi - 2x}{10}\right) = \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi - 2x}{10}\right) = -\cos\frac{\pi - 2x}{10}. \end{aligned}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi - 2x}{10}\right)$$

$$\frac{9\pi - 10}{2} - 2\pi n$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(\pi - x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned}$$

$$\sin x = \cos\frac{9\pi - 2x}{10}$$

$$\begin{aligned} -\frac{9\pi}{2} &\leq -x \leq \frac{\pi}{2} \\ -4\pi &\leq \frac{\pi}{2} - x \leq \pi \end{aligned}$$

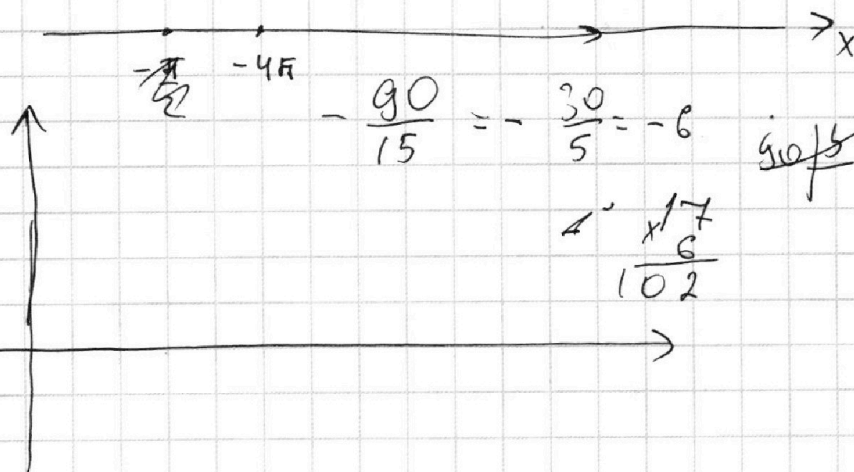
$$0 \leq 10 \arccos(\sin x) \leq 10\pi$$

$$0 \leq 9\pi - 2x \leq 10\pi$$

$$\begin{aligned} -9\pi &\leq -2x \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq x \leq \frac{9\pi}{2} \end{aligned}$$

$$10 \arccos(\sin x) = 10 \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) =$$

$$\begin{aligned} \log_4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 &= \log_{0,125y^3} (11^{-13}) - 5 \\ \log_4(0,5y) + \log_{0,5y} 11 &= -\frac{13}{3} \log_{0,5} 11 - 5 \\ 3 \log_4(0,5y) &= -16 \log_{0,5} 11 + 5 = 0 \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

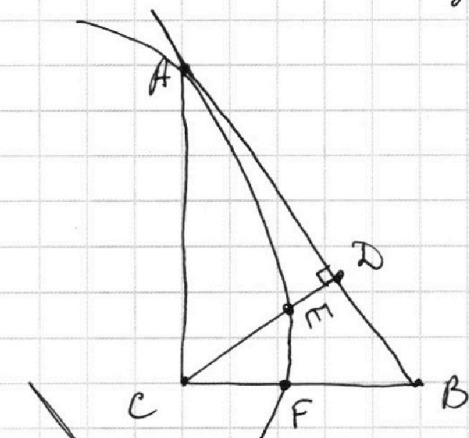
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

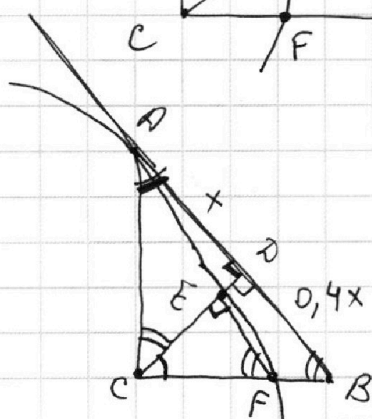
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~2.



$$AB \parallel EF$$

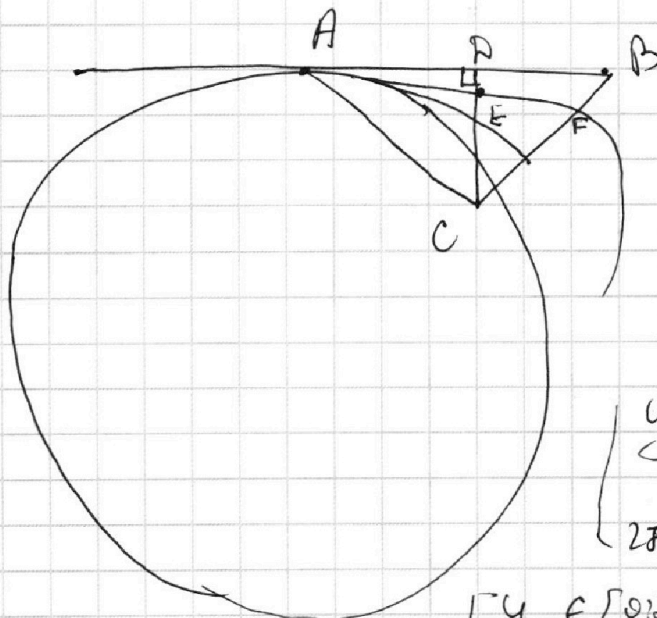
$$\frac{AB}{AD} = 1,4 \quad \frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = ?$$



$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot EF \cdot \sin \angle CEF$$

$$1: y - 2\pi h$$

$$2: 2\pi - y + 2\pi h$$



$$\begin{cases} y - 2\pi h \\ [2\pi h; \pi + 2\pi h] \\ 2\pi - y + 2\pi h \end{cases}$$

$$\arccos(\cos y) = \begin{cases} y \in [0; \pi] \\ 2\pi - y \in [\pi; 2\pi] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3\pi &\leq y \leq -2\pi \\ -\pi &\leq 2\pi - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi &\leq -y \leq 3\pi \\ 4\pi &\leq 2\pi - y \leq 6\pi \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



нр.

$$ab: 2^6 3^{13} 5^{11}; \quad bc: 2^{14} 3^{21} 5^{13}; \quad ac: 2^{16} 3^{25} 5^{28}$$

$abc \rightarrow \min.$

$$\begin{aligned} a &= 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1} \\ b &= 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2} \\ c &= 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3} \end{aligned}$$

$$abc = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} 3^{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} 5^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \leq 6$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 6$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 14$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 16$$

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 36$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 18$$

$$\alpha_3 = 12$$

$$\alpha_1 = 4$$

$$\alpha_2 = 2$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 21 \\ \hline 25 \\ 59 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 13 \\ \hline 24 \\ 52 \end{array}$$

$$23 \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 29 \\ \hline 28 \\ 58 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 24 \\ \hline 25 \\ 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 | 2 \\ - 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$4 + 2 + 12 = 16$$

$$2 + 5 + 17 = 31$$

$$a = 2^4 \cdot 3^9 \cdot 5^{14}$$

$$b = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^0$$

$$c = 2^{12} \cdot 3^{16} \cdot 5^{14}$$

$$abc = 2^{16} \cdot 3^{30} \cdot 5^{28}$$

$$ab = 2^6 \cdot 3^{14} \cdot 5^{14}$$

$$bc = 2^{14} \cdot 3^{21} \cdot 5^{14}$$

$$ac = 2^{16} \cdot 3^{25} \cdot 5^{28}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ + 9 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\log_{11} (0,5y) =$$

$$= (\log_{11} 0,5 + \log_{11} y)$$

$$xy = ?$$

$$\log_{11}^4 x - 6 \log_{11} x = \log_{11} \frac{1}{121} - 5$$

$$\log_{11}^4 (0,5y) + \log_{0,5y} 11 = \log_{0,125} y^3 (11^{-13}) - 5$$

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

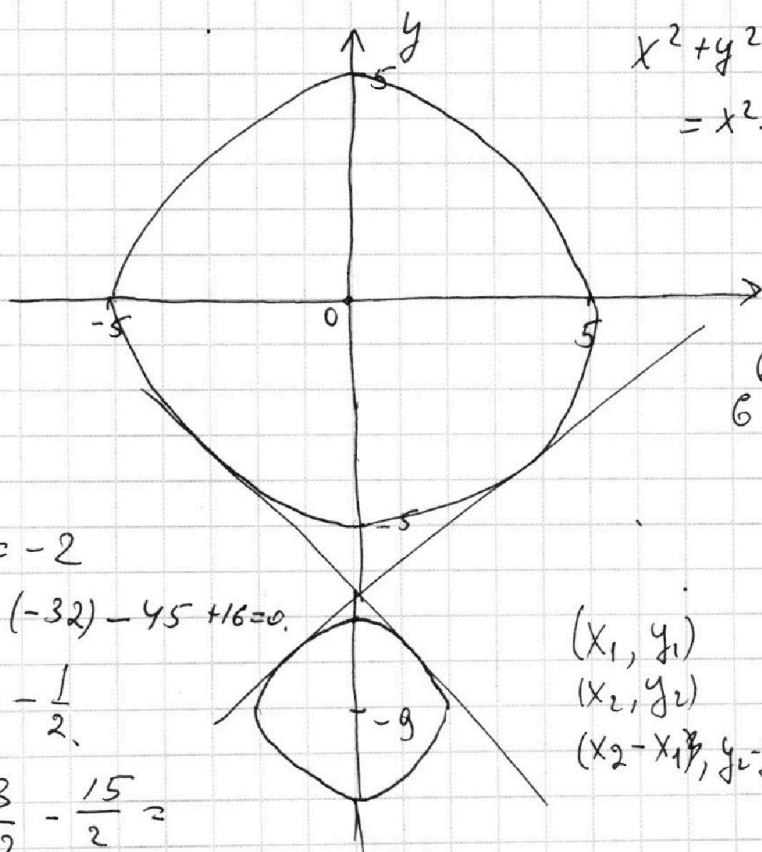
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~~345~~ $5x + 6ay - b = 0$

$a = 0$
 $x = \frac{b}{5}$



$x^2 + y^2 + 18y + 77 =$
 $= x^2 + (y + 9)^2 - 4$

$6(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 48$
 $6(x_2 + x_1) + (y_2 + y_1) = 48$

$a = -2$

$3 \cdot (-32) - 45 + 16 = 0$

$u = -\frac{1}{2}$

$-\frac{3}{32} - \frac{15}{2} =$

$= -\frac{\quad}{32}$

$y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$

$y = kx + k$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ \times 15 \\ \hline 80 \\ 16 \\ \hline 240 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1925 / 25 \\ -175 \\ \hline 175 \end{array}$$

25

$15 = 5 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ \times 5 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 450 / 2 \\ -4 \\ \hline -5 \\ -4 \\ \hline 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 25 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 25 \\ \times 75 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 9 \\ \hline 2025 \end{array}$$