



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 14



1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-5x+6}-\sqrt{3x^2+x+1}=5-6x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам

$$5x-y=3z \quad \text{и} \quad \frac{8}{x}+\frac{1}{y}=\frac{15}{z}.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2-y^2-z^2}{y^2+3z^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже ~~велосипедиста~~ ~~мотоциклиста~~. Найдите расстояние между A и B .

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$a, b, c \in \mathbb{N} \quad \begin{aligned} ab &: 3^{14} \cdot 7^{13}; \\ bc &: 3^{19} \cdot 7^{17}; \\ ac &: 3^{23} \cdot 7^{42}; \end{aligned}$$

Заметим, что для достижения мин. значения abc , в разложении чисел a ; b ; c на простые множ-ли не должны содержаться другие простые числа, кроме 3 и 7, иначе abc будет не минимальным.

$$\exists a = 3^m \cdot 7^n; \quad \text{где } m, n, R, t, p, s \in \mathbb{Z}; \text{ больше, либо равные } 0.$$
$$b = 3^R \cdot 7^t;$$
$$c = 3^p \cdot 7^s;$$

Тогда $abc = 3^{m+R+p} \cdot 7^{n+t+s} - \text{min. ?}$

Найти $\min(m+R+p)$; $\min(n+t+s)$ - ?

$$\exists R < 5 \Rightarrow m > 9; p > 14;$$

$$\text{тогда } m+p > 23 \quad ; 23$$

$$\Rightarrow m+p \geq 46$$

$$\Rightarrow m+p+R \geq 46 > 28 \ominus$$

$$m+R : 14;$$

$$R+p : 19;$$

$$m+p : 23;$$

$$n+t : 13;$$

$$t+s : 17;$$

$$n+s : 42;$$

$$\exists R > 5 \quad \text{~~тогда } m < 9; p < 14~~$$

$$\text{Но тогда } p < 14, \text{ иначе } R+p > 19, \text{ т.е. } R+p \geq 38 > 28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R+p+m \geq 38 \quad \ominus \quad \text{Т.к. есть пример на } R+p+m$$

" 28.

$$\text{Значит если } R > 5; p < 14 \Rightarrow m < 9, \text{ иначе}$$

$$m+R \geq 15, \text{ т.е. } m+p+R > 28 \quad \ominus$$

Пример на минимальное $m+p+R = 28$:

$$R = 5;$$

$$m = 9;$$

$$p = 14;$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:



- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

51.

Значит $\min(m+p+r) = 28$.

Пример на $\min(s+n+t) = 51$; $t=9$; $n=17$; $s=25$;

$\supset s < 25 \Rightarrow$

$n > 17 \Rightarrow n+t \geq 26$, т.к. $n+t : 13$.

~~иначе $s+t < 34$, но т.к. $s+t : 17$~~

Т.к. $n+t : 13$

~~$s \leq 17$; $\Rightarrow n \geq 25$~~

$n > 17 \Rightarrow n+t \geq 26$

$s+t : 17 \Rightarrow$ Если $s+t \geq 34$, $n > 17 \Rightarrow s+t+n \geq 34+18 > 51$ \ominus

$\ominus s+n+t \geq 17+35 > 51 \leftarrow$ Если $s+t=17 \Rightarrow s \leq 17$ \ominus
 $\Rightarrow n \geq 25$

$\supset s > 25 \Rightarrow n < 19$, иначе $s+n > 42 : 42$, т.е. $s+n \geq 84$

$\Rightarrow t+s \geq 34 : 17$.

т.е. $s+n+t \geq 84$ \ominus

$\Rightarrow n+t+s \geq 18+34=52 > 51$ \ominus

$n < 19$

$\Rightarrow \underline{\min(s+n+t) = 51}$. $\Rightarrow abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^5$;

Ответ: $abc_{\min} = 3^{28} \cdot 7^5$;

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



√5

$$x, y, z \neq 0;$$

$$(1) 5x - y = 3z; \Rightarrow y = 5x - 3z;$$

$$(2) \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z} \quad / *xyz$$

$$8zy + xz = 15xy;$$

$$uz (1) \quad 8z(5x - 3z) + xz = 15(5x - 3z)x;$$

$$40zx - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45zx;$$

$$75x^2 - 86xz + 24z^2 = 0;$$

$$D = 86^2 z^2 - 4 \cdot 24 \cdot 75 z^2 = 196z^2 = 14^2 z^2;$$

$$x_1 = \frac{86z + 14z}{150} = \frac{2}{3}z;$$

$$x_2 = \frac{86z - 14z}{150} = \frac{72}{150}z = \frac{12}{25}z;$$

$$(1en) \quad x = \frac{2}{3}z; \quad uz (1) \quad y = 5x - 3z = \frac{10}{3}z - 3z = \frac{1}{3}z;$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{\frac{25 \cdot 4}{9}z^2 - \frac{1}{9}z^2 - z^2}{\frac{1}{9}z^2 + 3z^2} = \frac{100 - 1 - 9}{9} = \frac{28}{9}$$

$$= \frac{90}{28} = \frac{45}{14} = 3 \frac{3}{14};$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{5}$

(2cn)

$$x = \frac{12}{25} z;$$

$$y = 5x - 3z$$

$$y = \frac{60}{25} z - \frac{75}{25} z = -\frac{15}{25} z = -\frac{3}{5} z;$$

$$(*) \frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{\frac{144}{25} z^2 - \frac{9}{25} z^2 - \frac{25}{25} z^2}{\frac{9}{25} z^2 + \frac{75}{25} z^2} =$$

$$= \frac{110}{84} = \frac{55}{42} = 1 \frac{13}{42} < 3 \frac{3}{14};$$

$$\Rightarrow \text{Мин. значение } (*) = 1 \frac{13}{42};$$

Ответ: $1 \frac{13}{42}$.

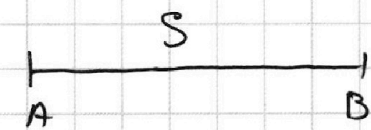
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{6}$
 x - скорость вел-та (км/ч)
 y - скорость мот-та (км/ч)
 S - расстояние от А до В (км)
 $x, y > 0; S > 0.$

$$(1) Sx + xy = Sy;$$

$$\text{п.к. } \frac{S}{y} + 1 = \frac{S}{x};$$

$$\frac{S}{y} \cdot x + 49 = \frac{S}{x} y; \Rightarrow (2) Sx^2 + 49xy = Sy^2;$$

$$\frac{S}{x+7} = \frac{S}{y+7} + 0,6; \Rightarrow (3) Sy + 7S = Sx + 7S + 0,6xy + 4,2(x+y) + 29,4;$$

$$\text{из (1) } 49Sx + 49xy = 49Sy; \Rightarrow 49S(y-x) = S(y-x) \cdot (x+y);$$

$$\text{из (2) } Sx^2 + 49xy = Sy^2;$$

$$\Rightarrow 49S = S(x+y) \Rightarrow x+y = 49; \text{ тогда } y = 49-x;$$

$$\text{Тогда из (3) } Sy = Sx + 0,6xy + 4,2 \cdot 49 + 29,4;$$

$$S(49-x) = Sx + 0,6x(49-x) + 235,2;$$

$$49S - Sx = Sx + 29,4x - 0,6x^2 + 235,2;$$

$$\rightarrow 2Sx = 0,6x^2 - 29,4x + 49S - 235,2;$$

$$\text{из (1); } \left\{ \begin{array}{l} Sx + x(49-x) = S(49-x); \\ Sx + 49x - x^2 = 49S - Sx; \end{array} \right.$$

$$Sx + 49x - x^2 = 49S - Sx;$$

$$\rightarrow 2Sx = x^2 + 49S - 49x;$$

$$\text{Тогда } \left\{ \begin{array}{l} 0,6x^2 - 29,4x - 235,2 = x^2 - 49x; \\ 0,4x^2 - 78,4x + 235,2 = 0; \quad / \cdot 10 \\ \quad \quad \quad -19,6x \end{array} \right.$$

$$0,4x^2 - 78,4x + 235,2 = 0; \quad / \cdot 10$$

$$4x^2 - 196x + 2352 = 0; \quad / : 2$$

$$2x^2 - 98x + 1176 = 0;$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

\sqrt{D}

$$2x^2 - 98x + 1176 = 0;$$

$$D = 98^2 - 8 \cdot 1176 = 196 = 14^2;$$

$$x_{1,2} = \frac{98 \pm 14}{4}; \quad x_1 = 28; \quad \Rightarrow \quad y_1 = 49 - 28 = 21;$$
$$x_2 = 21; \quad y_2 = 28;$$

Тогда из

$$(1) \quad 28S + 588 = 21S \quad \text{при } x, \text{ и } y_1$$

$$7S = -588 \Rightarrow S < 0 \text{ - Противоречие,}$$

тогда $x = 21; y = 28 \text{ (км/ч)}$;

$$21S + 588 = 28S;$$

$$588 = 7S;$$

$$S = 84 \text{ (км)};$$

Ответ: $S = 84 \text{ км}$.

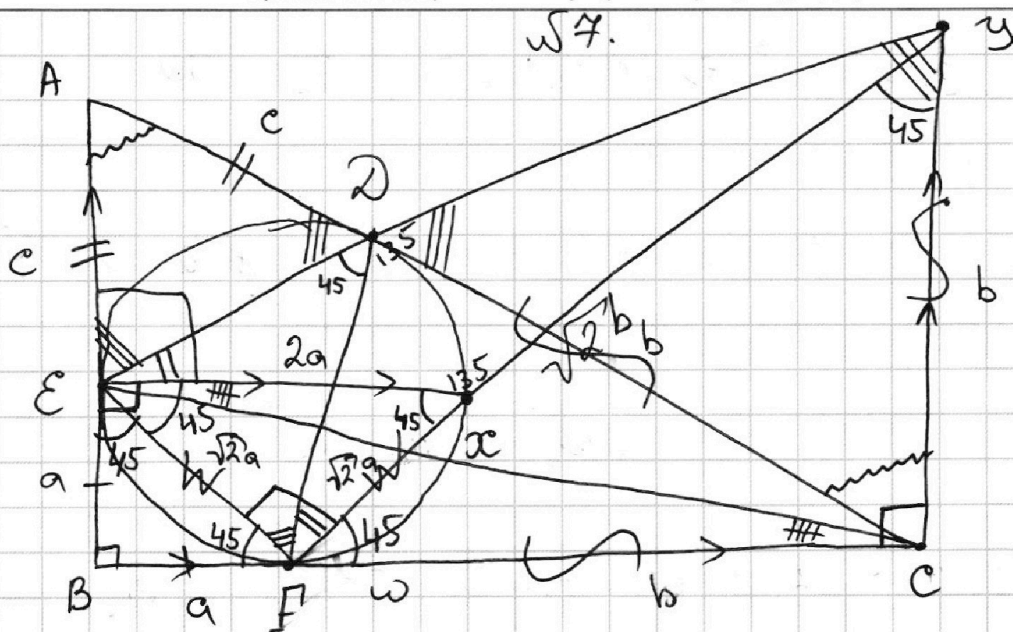
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$EX = \sqrt{2}XY;$$

$$\frac{AD}{DC} = ? \quad \frac{c}{b} = ?$$

П.к. BE и BF - касат. отрезки к ω .

$\Rightarrow BE = BF \Rightarrow \triangle EBF$ - прямоугол. и р/д.

$\Rightarrow \angle EBF = \angle EFB = \angle EDF = \angle EXF = 45^\circ$.

Т.к. AB и BC - касат.-ые к ω .

и углы ошп. на EF.

П.к. $\angle DEX = \angle DFX$ (ошп.-ся на DX) $\Rightarrow \triangle EXY \sim \triangle FDY$.
и $\angle FDY = \angle EXY = 135^\circ$

$$\Rightarrow \frac{EX}{XY} = \frac{FD}{DY} = \sqrt{2}; \quad \underline{FD = \sqrt{2}DY.}$$

Т.к. $AB \perp BC$ и $YC \perp BC \Rightarrow AB \parallel YC$.

Т.к. $AE = AD$; $FC = CD$; $\angle AEU = \angle EUC$ ($AB \parallel YC$);

$\angle ADE = \angle CDY$ (верт) $\Rightarrow \triangle EAD$; $\triangle DCY$; $\triangle FCD$; $\triangle FCY$

- равнобедренные $\Rightarrow FC = CD = CY$.

Тогда $\triangle FCY$ - прямоугол. и р/д. $\Rightarrow \angle CFY = \angle FYC = \angle FEX = 45^\circ$ (ошп. на FX);

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $\angle BEH = 90^\circ \Rightarrow EH \perp AB$; $BC \perp AB$.
 $\Rightarrow EH \parallel BC$.

Тогда $\angle EFH = 180 - 90 = 90^\circ \Rightarrow \triangle EFH$ - прям. и р/д.
 $\Rightarrow EF = FH$;

$\angle EFD = \angle ADE$, т.к. опр-ся на \overline{DE} .

Заметим, что $\triangle EAD \sim \triangle DCY \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{ED}{DY}$;

т.е. $\frac{ED}{DY} = \frac{AD}{CY}$; $\frac{ED}{DY} = \frac{c}{b}$;

Д-тб: $EC = c$, тогда CD - бис-са в $\triangle ECY$

$\Rightarrow \frac{ED}{DY} = \frac{c}{b}$;

Для $\triangle ABC$ по Т. Пифагора:

$$a^2 + 2ac + c^2 + a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2bc + b^2$$

$$a^2 + ac + ab = bc;$$

$$ec^2 = a^2 + a^2 + 2ab + b^2;$$

$$\text{Д-тб: } c^2 = 2a^2 + 2ab + b^2;$$

$$EX^2 = EF^2 + FH^2 = 2EF^2 = 2(a^2 + a^2) = 4a^2$$

$$EX = 2a \Rightarrow XY = \sqrt{2} \cdot 2a$$



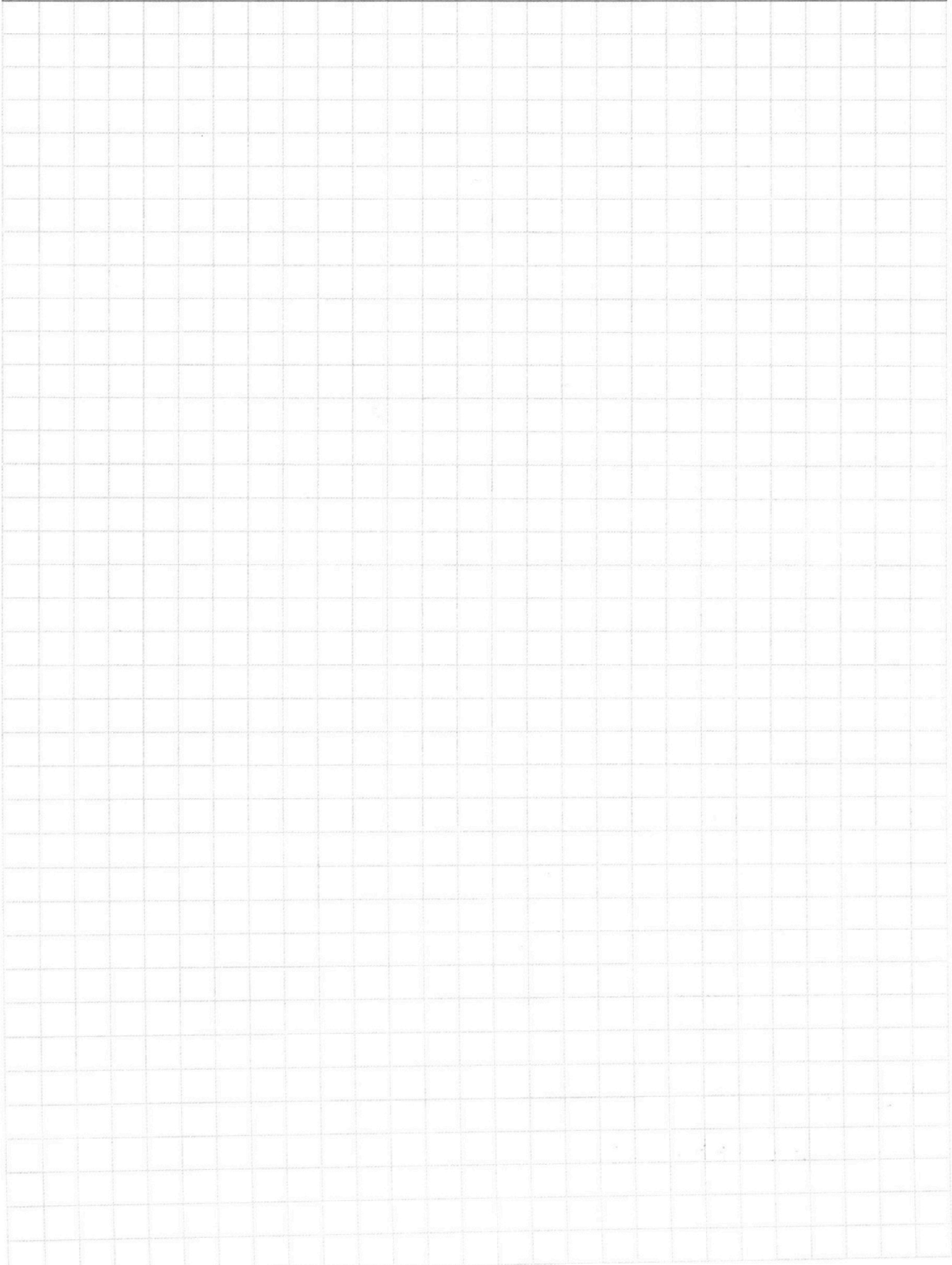
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$

~~$ab = 13$~~

$ab : 3^{14} 7^{13}$

~~abc - 3 знака ?~~

$a+b$

$bc : 3^{19} 7^{17}$

~~$abc : 3^{23} 7^{42}$~~

$a^2 - 9ab + b^2 ;$

$ac : 3^{23} 7^{42}$

$(a; b) = 1.$

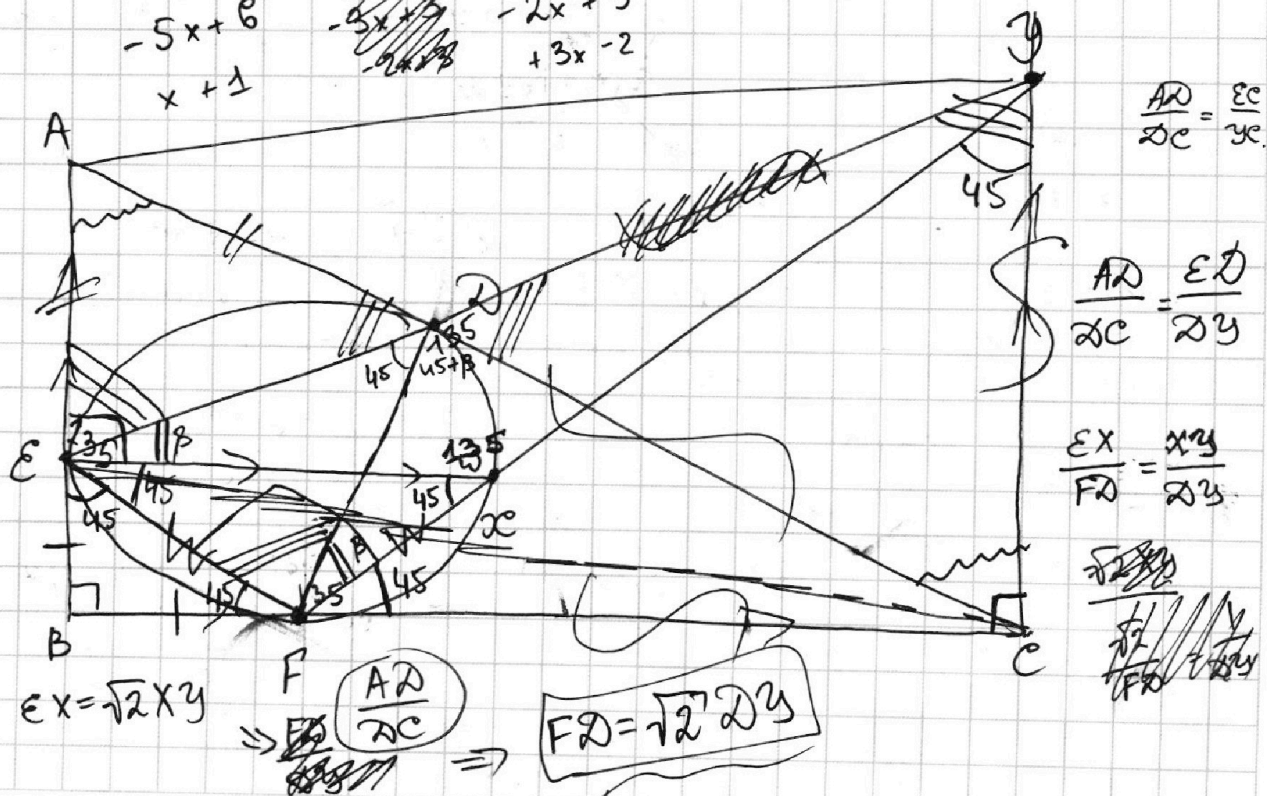
МАНУС ?

$\sqrt{3x^2 - 5x + 6} - \sqrt{3x^2 + x + 1} = 5 - 6x;$

$3x^2 - 5x + 6 - 2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} + 3x^2 + x + 1 = 25 - 12x + 36x^2;$

$2\sqrt{(3x^2 - 5x + 6)(3x^2 + x + 1)} = -30x^2 + 56x - 18;$

~~$-5x + 6$~~
 ~~$x + 1$~~
 ~~$-5x + 6$~~
 ~~$-2x + 3$~~
 ~~$+3x - 2$~~



$EX = \sqrt{2} \cdot XY$

$\Rightarrow F \left(\frac{AD}{DC} \right)$

$\Rightarrow \boxed{FD = \sqrt{2} \cdot DY}$

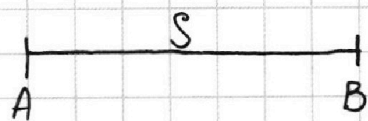
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

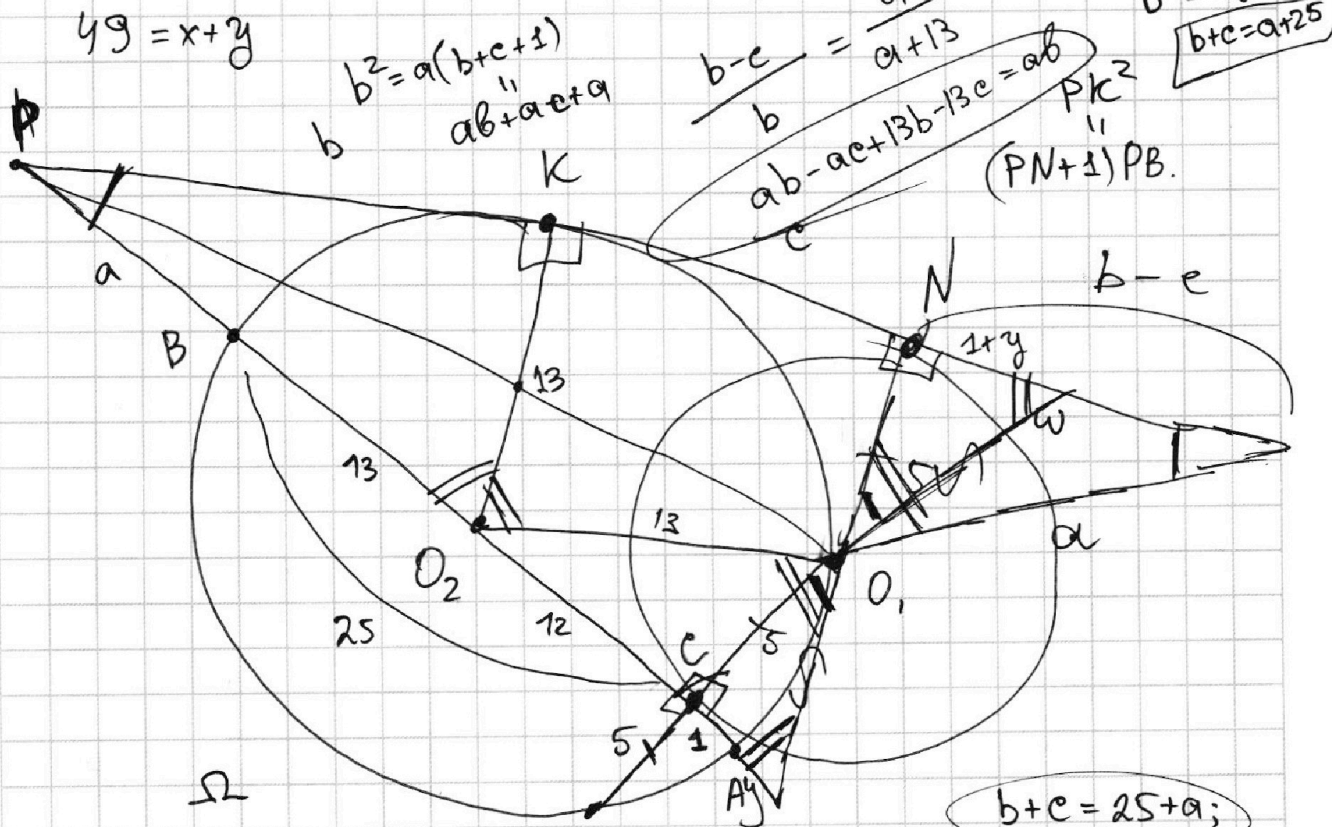
- 1 2 3 4 5 6 7

МОФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$\sqrt{6}$
 v_B - скорость велосипедиста. (км/ч)
 v_M - скорость мотоциклиста. (км/ч)
 S - расстояние от А до В (км)



$49 = x + y$

$b^2 = a(b+c+1)$
 $ab + ac + a$

$\frac{b-c}{b} = \frac{a}{a+13}$

$b^2 = a(26+a)$
 $b+c = a+25$

$ab - ac + 13b - 13c = ab$
 $(PN+1)PB$

Ω
 $x, y, z \neq 0$

$5x - y = 3z$

$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$

$8zy + xz = 15xy$

$25x^2 - 10xy + y^2 = 9z^2$

$25x^2 - y^2 - z^2 = 8z^2 + 10xy - 2y^2$

Нашли.
 $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$

$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$

$b+c = 25+a$

$a(26+a) = b^2$

$26a + a^2 = b^2$

$a(26+a) = b^2$

$b = \sqrt{a(26+a)}$

$\sqrt{a(26+a)} + c = 25+a$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



~~8/11/11~~

$$S_x + xy = S_y$$

$$S_x^2 + 49xy = S_y^2$$

$$S_y + 7S = S_x + 7S + 0,6xy + 4,2x + 4,2y + 29,4$$

~~$S_y = 49S_x^2 = 1842867$~~
 ~~$y = 49x + 29,4$~~

$$49S_y - 49S_x = S_y^2 - S_x^2$$

$$49(y-x) = (y-x)(x+y)$$

$$49 = x+y$$

$$49 = x+y$$

$$y = 49 - x$$

$$D = 98^2 - 8 \cdot 1176$$

$$S_y = S_x + 0,6xy + 4,2 \cdot 49 + 29,4$$

$$S_y = S_x + 0,6xy + 235,2$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ \times 98 \\ \hline 784 \\ 882 \\ \hline 9604 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1176 \\ \times 8 \\ \hline 9408 \end{array}$$

$$9408$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 588 \\ \times 7 \\ \hline 4116 \end{array}$$

$$S(49-x) = S_x + 0,6x(49-x) + 235,2$$

$$49S - S_x = S_x + 29,4x - 0,6x^2 + 235,2$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 28 \\ \hline 168 \\ 420 \\ \hline 588 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 98+14 \\ \cdot 112 \\ \hline 10976 \end{array}$$

$$49S = 2S_x + 28,8x$$

$$4S = x - 20,2$$

$$4S_x = x^2 - 20,2x$$

$$2S_x + 49S = 28,8x$$

$$2S_x - 49S = x^2 - 49x$$

$$S_x + x(49-x) = S(49-x)$$

$$S_x + 49x - x^2 = 49S - S_x$$

$$2S_x = x^2 + 49S - 49x$$

$$2S_x = 28,8x - 49S$$



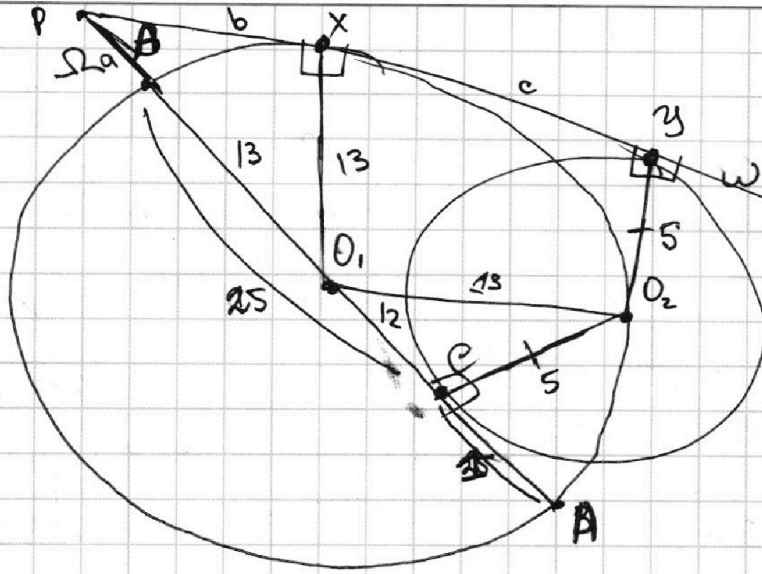
На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$R_{O_1} = \frac{25}{2} = 13$$

$$PC = PY.$$

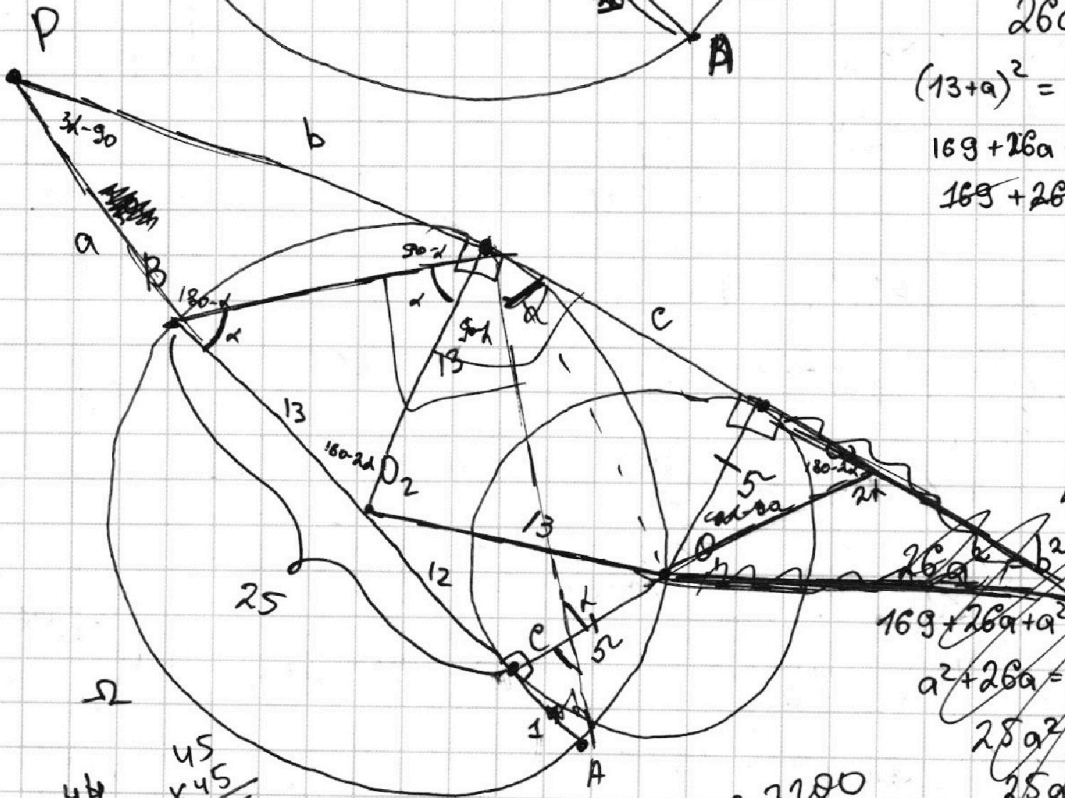
$$26a = b^2$$

$$(13+a)^2 = b^2 + 169$$

$$169 + 26a + a^2 = b^2 + 169$$

$$169 + 26a + a^2 = 26a + 169$$

$$a = 0$$



$$a, b > 0$$

$$169 + 26a + a^2 = 169 + b^2;$$

$$a^2 + 26a = 26a^2$$

$$25a^2 = 26a$$

$$25a = 26$$

$$a = 1.04$$

$$a(26+a) = b^2$$

$$26a + a^2 = b^2$$

$$a^2 + 26a + 169 = b^2 + 169$$

$$a^2 + 26a = b^2$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 44 \\ \hline 176 \\ 1800 \\ \hline 1936 \end{array}$$

$$4.24 = 96$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times 75 \\ \hline 480 \\ 672 \\ \hline 7200 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times 96 \\ \hline 576 \\ 864 \\ \hline 9216 \end{array}$$

$$9216 - 7200 = 2016$$

$$25 + a = b + c$$

$$a^2 + 26a + 169 = b^2 + 169$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{S}{v_M} + 1 = \frac{S}{v_B}$$

$$\frac{S}{v_M} \cdot v_B + 49 = \frac{S}{v_B} \cdot v_M$$

$$\frac{S}{v_B + 7} = \frac{S}{v_M + 7} + \frac{36}{60} \stackrel{0,6}{;}$$

$$49 \cdot 0,6 = \frac{v^2 \cdot 6}{10} = \frac{49 \cdot 6}{20 + 5,4}$$

$$\frac{49}{20} \cdot \frac{6}{2} = \frac{4,9 \cdot 6}{20 + 5,4}$$

S-?

$$S \cdot v_B + v_B \cdot v_M = S \cdot v_M$$

$$S v_B^2 + 49 v_M \cdot v_B = S \cdot v_M^2$$

$$S v_M + 7S = S v_B + 7S$$

$$+ 0,6 v_M \cdot v_B$$

$$+ 4,2 v_M + 4,2 v_B$$

$$+ 29,4$$

$$S v_M = S v_B + 0,6 v_M v_B + 4,2 v_M$$

$$+ 4,2 v_B + 29,4$$

$$49 v_M v_B = 49 S v_M - 49 S v_B$$

$$49 v_M v_B = S v_M^2 - S v_B^2$$

$$49 S v_M + S v_B^2 = 49 S v_B + S v_M^2$$

$$49 S (v_M - v_B) = S (v_M - v_B) (v_M + v_B)$$

$$49 = v_M + v_B$$

$$v_B = 49 - v_M$$

$$\begin{array}{r} 2352 \overline{) 1176} \\ \underline{915} \\ 14 \\ \underline{12} \end{array}$$

~~$$49 S - S v_M + 49 S$$~~

$$S(49 - v_M) + (49 - v_M) v_M = S v_M$$

$$49 S - S v_M + 49 v_M - v_M^2 = S v_M$$

$$49 S = v_M^2 + 2 S v_M - 49 v_M$$

$$49 \cdot 4 = 196$$

$$v_M^2 + v_M(2S - 49) - 49S; \quad (2S - 7)(2S + 7)$$

$$v_{M,2} = \frac{49 - 2S \pm \sqrt{4S^2 - 196S + 49^2 + 196S}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 0,44^2 \\ \underline{1176} \\ 220 \\ \underline{152} \\ -196 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$a, b, c \in \mathbb{N}$.

abc - мин.

$ab : 3^{14} 7^{13};$

$bc : 3^{19} 7^{17};$

$ac : 3^{23} 7^{42};$

$a = 3^m \cdot 7^n$

$b = 3^R \cdot 7^t$

$c = 3^P \cdot 7^S$

$abc = 3^{m+R+P} \cdot 7^{n+t+S}$

Тогда чтобы abc было мин нужно чтобы

$ab = 3^{14} \cdot 7^{13}$

$bc = 3^{19} \cdot 7^{17}$

$ac = 3^{23} \cdot 7^{42}$

$m+R = 14;$

$R+P = 19;$

$m+P = 23;$

$n+t = 13$

$t+S = 17$

$n+S = 42$

$2(t+n+S) = 72$

$t+n+S = 36$

$2(m+R+P) = 56$

$m+R+P = 28$

~~$a = 3 \cdot 7$~~
 ~~$b = 3^{13} \cdot 7^{12}$~~
 ~~$c = 3^{22} \cdot 7^{41}$~~

~~$R > 5$~~
 ~~$n > 7$~~
 ~~$t > 12$~~
 ~~$m > 9$~~
 ~~$P > 14$~~
 ~~$m+P > 23$~~

Тогда ~~$R > 5$~~ но тогда ~~$P < 14$~~ ~~$m < 9$~~ ~~$m+P < 23$~~

$m+R : 14$
 $R+P : 19$
 $m+P : 23$

~~$9 \cdot 5$~~
 ~~$5 \cdot 14$~~
 ~~$6 \cdot 14$~~

$\exists R < S$

$\min(m+R+P) = 28$

Тогда $m > 9$

$P > 14$

Тогда $abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$ Противоречие.

Тогда $abc = 3^{28} \cdot 7^{36}$

$abc = 3^{m+R+P} \cdot 7^{n+t+S}$

$3^{28} \cdot 7^{36}$

$m+R : 14$

$R+P : 19$

$m+P : 23$

$m=9$
 $R=5$
 $P=14$

$\exists R < S \Rightarrow m > 9$

$\Rightarrow P > 14$

Тогда $m+P > 23$

$m+P \geq 48$

$S_{\min} = 24$

$n+t : 13$
 $t+S : 17$
 $n+S : 42$

$\min(n+t+S) = ?$

$17+25+9 = 51$

$t=9$

$n=17$

$S=25$

$R > 5$

$m > 7$

$P > 16$

$m+P > 23$

$n > 17$

$t > 9$

$n+t > 28 \Rightarrow n+t \geq 39$

Ответ:

$28 \quad 51$
 $3 \quad 7$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x, y, z \neq 0$$

Наши. знае.

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = ?$$

$$5x - y = 3z; \quad y = 5x - 3z$$

$$\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z};$$

$$144 - 34$$

$$8zy + xz = 15xy;$$

$$\frac{110}{84}$$

$$8z(5x - 3z) + xz = 15x(5x - 3z);$$

$$40xz - 24z^2 + xz = 75x^2 - 45xz;$$

$$75x^2 + 24z^2 - 96xz = 0$$

$$75x^2 - 96xz + 24z^2 = 0;$$

~~$$24z^2 - 96xz$$~~

~~$$D = 96^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24$$~~

$$D = 96^2 - 4 \cdot 75 \cdot 24 = 196z^2 = 14^2 z^2$$

$$x_1 = \frac{86z - 14z}{150} = \frac{72z}{150} = \frac{36z}{75} = \frac{12z}{25}$$

$$x_2 = \frac{100z}{150} = \frac{2}{3}z;$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 7200 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 86 \\ \times 86 \\ \hline 516 \\ 688 \\ \hline 7396 \end{array}$$

(len) $x = \frac{12}{25}z$

$$y = 5x - 3z = \frac{60}{25}z - 3z = 2\frac{10}{25}z - 3z = -\frac{15}{25}z = -\frac{3}{5}z$$

$$\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2} = \frac{25 \cdot \frac{144}{625}z^2 - \frac{9}{25}z^2 - z^2}{\frac{9}{25}z^2 + 3z^2} = \frac{144 - 9 - 25}{25} \cdot \frac{z^2}{z^2 \cdot \frac{9}{25}}$$

14
28
42