



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

9 КЛАСС. Вариант 13



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}.$$

При каком наибольшем m могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на m ?

3. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-3x+4}-\sqrt{2x^2+x+3}=1-4x.$$

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω , диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC=1$ и $BC=16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω .

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x , y , z удовлетворяют равенствам

$$3x+2y=z \quad \text{и} \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}.$$

Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B , а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже велосипедиста. Найдите расстояние между A и B .
7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA , AB , BC в точках D , E , F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC , проходящую через вершину C , в точке Y ; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω . Известно, что $EX=2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD:DC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

1) Значит что:

$$abc : ac \Rightarrow abc : 7^{38}$$

2) Также $(abc)^2 = (ab)(bc)(ac) : 3^{(11+21+18)}$ т.е. $(abc)^2 : 3^{50}$, а

значит что $abc : 3^{25}$

3) $abc : 7^{38}$ и $abc : 3^{25}$ и т.к. $\text{НОД}(7^{38}, 3^{25}) = 1 \Rightarrow abc : 7^{38} 3^{25}$,

и значит $abc \geq 7^{38} \cdot 3^{25}$

Пример: $a = 3^7 7^{22}$
 $b = 3^4$
 $c = 3^{16} 7^{16}$

Ответ: $7^{38} \cdot 3^{25}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

~2

задача // Дробь $\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$ - некое сокращение на

$$\text{НОД}(a+b; a^2-8ab+b^2) = \text{НОД}(a+b; a^2-8ab+b^2 - (a+b)^2) =$$

$$= \text{НОД}(a+b; 10ab) \text{ заметим что раз } \frac{a}{b} \text{ - несократимая}$$

длина то $\text{НОД}(a; b) = 1 \Rightarrow$ нет такого натурального
числа $p > 1$, что $a:p$ и $b:p \Rightarrow$ нет такого ^{натурального} числа

$p > 1$ что $a:p$ и $(a+b):p$ или $b:p$ и $(a+b):p$, а

$$\text{значит } \text{НОД}(a+b; 10ab) = \text{НОД}(a+b; 10) \leq 10 \text{ значит}$$

максимальное $m = 10$ Пример:

$$a = 7 \quad \left(\frac{7}{3} \text{ - несократима} \right)$$

$$b = 3$$

$$\text{а } \frac{7+3}{49-160+9} = \frac{10}{-110} = -\frac{1}{11} \quad (\text{большая дробь не сократима})$$

Ответ: при $m = 10$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



N3

Обозначим

$$A = 2x^2 - 3x + 4$$

$$B = 2x^2 + x + 3 \text{ тогда заметим что:}$$

$$A - B = 1 - 4x, \text{ тогда:}$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B = (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})$$

$$\begin{cases} \sqrt{A} - \sqrt{B} = 0, \\ \sqrt{B} + \sqrt{A} = 1; \end{cases}$$

$$\text{I случай: } \sqrt{A} = \sqrt{B} \Rightarrow A = B \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow 1 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\text{II случай: } \sqrt{B} + \sqrt{A} = 1 \quad | - 2\sqrt{B}$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = 1 - 2\sqrt{B} = A - B = 1 - 4x$$

$$2\sqrt{B} = 4x$$

$$\sqrt{B} = 2x$$

$$B = 4x^2$$

$$x + 3 = 2x^2$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

~~Решим~~ Заметим что это значит что:

$$\begin{cases} x = -1, \\ x = \frac{3}{2}; \end{cases}$$

~~Вывод:~~ Примечание: заметим, что x и y A и B - координаты
при $x^2 > 0$, а $D < 0 \Rightarrow A > 0$ и $B > 0$ при любых x

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = -1, \\ x = \frac{3}{2}, \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№5

$$1) \begin{cases} z = 3x + 2y, \\ 3x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{z}; \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x+2y} \quad | \cdot (3x+2y)xy$$

$$3(3x+2y)y + (3x+2y)x = 2xy$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2yx = 2xy \quad | :3$$

$$3xy + 2y^2 + x^2 = 0$$

Если рассмотреть это равенство, как квадратное
уравнение относительно x , то тогда:

$$x_1 = -y$$

$$x_2 = -2y$$

$$\text{Тогда есть 2 случая: 1) } y=y; x=-y; z=-3y+2y=-y \\ \text{2) } y=y; x=-2y; z=-6y+2y=-4y$$

$$\text{1) } \frac{3x^2 - 4y^2 - z^2}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y^2 - 4y^2 - y^2}{y^2 - 6y^2} = \frac{-2}{-5} = 0,4$$

$$\text{2) } \frac{3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{-8y^2}{-2y^2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

~~Ответ:~~

$$\text{Пример: } y=1; x=-2; z=-4$$

$$\text{Ответ: 4. (т.к. } 4 > 0,4)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



26

Пусть S - расстояние от А до В (6 км)
 V_M - скорость мотоциклиста (6 км/час)
 V_B - скорость велосипедиста (6 км/час)

1) Тогда из первого условия:

$$\frac{S}{V_B} + 2 = \frac{S}{V_M} \quad \frac{S}{V_B} - \frac{S}{V_M} = 2$$

$$S = \frac{2}{\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_M}} = \frac{2 V_M V_B}{V_M - V_B}$$

2) Из второго:

$$\frac{S}{V_B} \cdot V_M - \frac{S}{V_M} \cdot V_B = 96$$

$$\frac{2 V_M^2 - 2 V_B^2}{V_M - V_B} = 96$$

$$2(V_M + V_B) = 96$$

$$V_M + V_B = 48$$

3) Из третьего:

$$\frac{S}{V_B + 6} - \frac{S}{V_M + 6} = 1,25 \Rightarrow S = \frac{5(V_M + 6)(V_B + 6)}{V_M - V_B}$$

4) Тогда:

$$\frac{2 V_M V_B}{V_M - V_B} = S = \frac{5(V_M + 6)(V_B + 6)}{V_M - V_B}$$

$$8 V_M V_B = 5 V_M V_B + 30 V_B + 30 V_M + 180 : 3$$

$$V_M V_B = 10(V_B + V_M + 6)$$

$$V_M V_B = 10 \cdot 58 = 580$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



№6 (выполнено)

5) Мы знаем $\begin{cases} v_A + v_B = 48, \\ v_A v_B = 540 \end{cases}$ найдем $v_A > v_B$ (Иногда приходится
на слухи признавать разницу
величинности)

~~ну а тогда это уравнение так решат: v_A~~

ну а тогда v_A и v_B - это больше и меньше (ответов)
поэтому уравнение:

$$x^2 - 48x + 540 = 0$$

$$\text{А это } \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = 18 \end{cases}$$

$$\text{А значит } \begin{cases} v_A = 30 \\ v_B = 18 \end{cases}$$

$$\text{тогда } S = \frac{2 \cdot 540}{12} = \frac{540}{6} = 90 \text{ (км)}$$

Ответ: 90 км.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

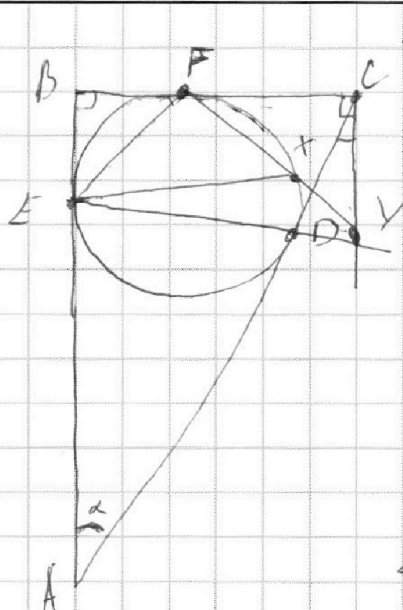
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Решение:



Дано: $\angle B = 90^\circ$
 $EX = 2\sqrt{2}XY$

Найти: $AD:DC$

Заметим что $AB \perp BC \perp CY$, значит

$AB \parallel CY \Rightarrow \angle BED = \angle DCY = \alpha$

2) $\triangle EDA \sim \triangle DCY$ по двум углам:
($\angle BED = \angle DCY$; $\angle EDA = \angle CDY$), тогда:

$AD:DC = ED:DY$, а также

$\frac{AE}{AD} = \frac{CD}{CY}$ но по $EA = AD$, то

$CY = CD = FC$

3) Значит: $CY = FC \Rightarrow \triangle FCY$ - равнобедренный треугольник
значит $\Rightarrow \angle CFY = 45^\circ$

4) $BF = BE \Rightarrow \triangle BFE$ равнобедренный треугольник $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BFE = 45^\circ$

5) $\angle EFY = 180^\circ - \angle CFY - \angle BFE = 90^\circ$

6) $\widehat{EP} = 2 \cdot \angle AFE = 10^\circ \Rightarrow \angle PKE = \frac{\widehat{EP}}{2} = 45^\circ \Rightarrow \angle FEX = 45^\circ$

7) $\angle FEX = \angle PKE \Rightarrow FE = FX$ а также $2FE^2 = EX^2$ (по
теореме Пифагора) $\Rightarrow 2FE^2 = EX^2 \Rightarrow FE = EX$

8) По теореме Пифагора для $\triangle EFY$: $EY = \sqrt{EF^2 + FY^2} =$
 $= \sqrt{3XY^2} = \sqrt{3}XY$

9) Заметим что $\angle XDY = \angle EPX$ (т.к. $EPXD$ - вписанный)

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



10) По теореме $\Delta EPY \sim \Delta DKY \Rightarrow \frac{EY}{XY} = \frac{PY}{DY} \Rightarrow DY = \frac{PY \cdot XY}{EY} = \frac{3XY^2}{\sqrt{3}XY} =$
 $= \frac{3}{\sqrt{3}} XY$

11) тогда $ED = \left(\sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{3}}\right) XY$

12) Значит $ED:DY = \frac{\sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{\sqrt{3}}} = \frac{13-3}{3} = \frac{10}{3} = 10:3$

Ответ: $AD:DC = 10:3$

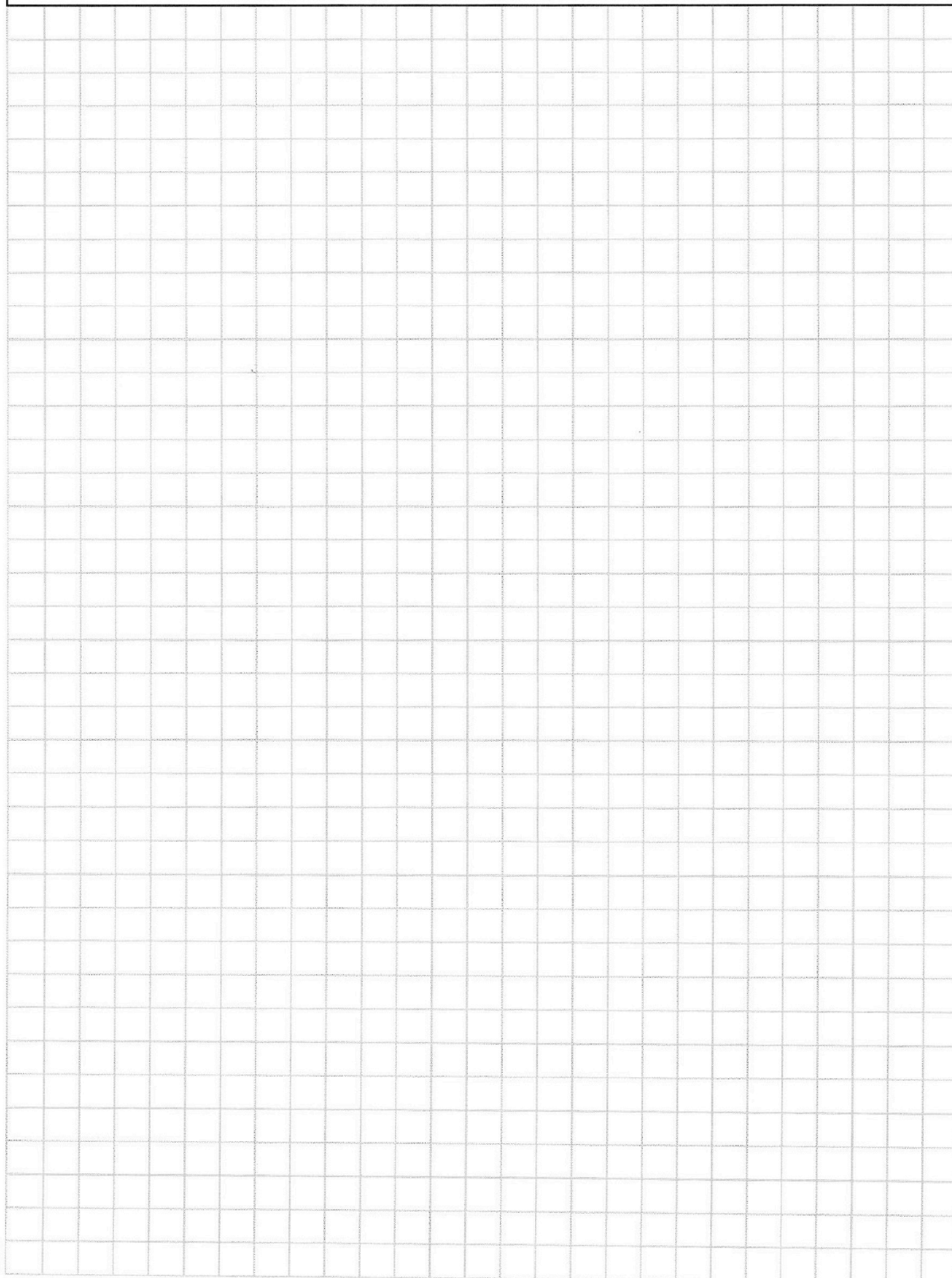
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

 МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Черновик

$$\frac{S}{V_H} \cdot \left(\frac{S}{V_H} + 2 \right) V_H - \left(\frac{S}{V_B} - 2 \right) V_B = 96$$

$$2V_H - 2V_B = 36$$

$$V_H - V_B = 18$$

$$\frac{S}{V_H} + 2 = \frac{S}{V_B} \rightarrow S \left(\frac{1}{V_H} - \frac{1}{V_B} \right) = -2$$

$$S = \frac{2}{\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_H}} = \frac{2V_B V_H}{V_H - V_B} = \frac{V_B V_H}{18}$$

$$S = \frac{125}{\frac{1}{V_B+6} - \frac{1}{V_H+6}} = \frac{5 \cdot (V_H-6)(V_B+6)}{48} = \frac{5V_H V_B}{48}$$

$$V_B V_H = 288$$

$$(V_B+6)(V_H+6) = 8V_B + V_H$$

$$30V_H + 30V_B + 180 = 8V_B + V_H$$

$$10(V_H + 2V_B + 6) = V_B V_H$$

$$10(V_H + V_B + 48) = V_B(V_B + 6)$$

$$20V_B + 540 = V_B^2 + 68V_B$$

$$V_B^2 + 48V_B - 540 = 0$$

$$D = 2304 + 2160$$

$$D = 2944$$

$$\frac{-48 \pm \sqrt{2944}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm \sqrt{256 \cdot 11}}{2} = \frac{-48 \pm 16\sqrt{11}}{2} = -24 \pm 8\sqrt{11}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 28 \\ \hline 124 \\ 56 \\ \hline 284 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 16 \\ \hline 716 \end{array}$$

$$10V_H + 30V_B$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 56 \\ \hline 2800 \\ 2800 \\ \hline 2800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2160 \\ \times 16 \\ \hline 34560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2944 \\ \times 16 \\ \hline 47104 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



27

Черновик

$$(a-b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2$$

$$(a^2 + 2ab + b^2) = 10ab$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 10ab$$

$$a:b = 10$$

$$9x^2 + 4y^2 = z^2$$

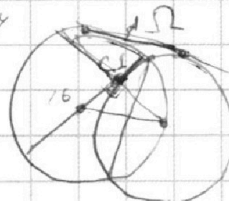
$$49 - 168 + 9$$

$$\frac{7}{3}$$

$$5x^2 - 2^2 + 2xy$$

$$16 - 64$$

$$1 + 2x$$



$$(a-b)^2$$

$$3x^2 + 4y^2 = z^2$$

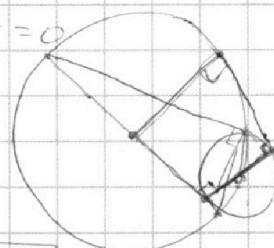
$$(x+2y)(x+4y) = 16$$

$$3 + 2 + 3 + 6 = 14$$

$$P = 9 - 16$$

$$1 + \frac{1}{4} = 0$$

$$2xy + x^2 + 4y^2 = 0$$



$$x+y=11$$

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = A - B$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x-y = (x-1)(x+1)$$

$$\begin{cases} x=4 \\ xy=4 \end{cases}$$

$$A+B = \sqrt{A+B} = A-B$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B}$$

$$\frac{9}{2}$$

$$\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

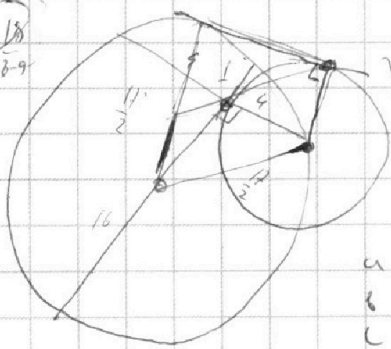
$$4(a+b) = 16$$

$$a_2 + b_2 = 16$$

$$b_2 + c_2 = 38$$

$$b_2 + c_2 = 16$$

$$2 \cdot 38 = 76$$



$$\begin{aligned} a &= 37 \\ b &= 34 \\ c &= 34 \end{aligned}$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$$325 \cdot 7^{18}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$3x + 2y = 7$$

$$\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$\frac{3y + x}{xy} = \frac{2}{3x+2y}$$

$$3(3x+2y)y + x(3x+2y) = 2xy$$

$$9xy + 6y^2 + 3x^2 + 2yx = 2xy$$

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = 0$$

$$D_x = 9y^2 - 4y^2 = 5y^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-3y \pm y}{2} = -y$$

$$\textcircled{1} y; x = -2y; z = -4y$$

$$y; x = -y; z = -y$$

$$-3yx - 4y^2 - z^2$$

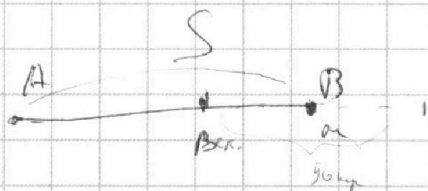
$$4y^2 + z^2 + 4yz - 4z$$

$$1) \frac{3 \cdot 4y^2 - 4y^2 - 16y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{12 - 18}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$2) \frac{3y^2 - 4y^2 - 4^2}{3^2 - 6y^2} = \frac{3 - 5}{-5} = \frac{-2}{-5} = 0,4$$

$$S = 2v_B$$

$$\frac{S}{v_B} \cdot v_A - \frac{S}{v_n} \cdot v_0 = 96$$



$$t = t_0 - 2t \quad S \left(\frac{v_A^2}{t} - \frac{v_0^2}{t} \right)$$

$$\frac{v_B}{v_A}$$

$$\left(\frac{S}{v_A} + 2 \right) \cdot v_B = S$$

$$\left(\frac{S}{v_A + 6} + 2 \right) \cdot (v_A + 6) = S$$

$$1,5 = 60$$

$$1,5 = 6$$

$$15 \cdot 3 = 45$$