



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 10



1. [4 балла] Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab$  делится на  $2^{15}7^{11}$ ,  $bc$  делится на  $2^{17}7^{18}$ ,  $ac$  делится на  $2^{23}7^{39}$ . Найдите наименьшее возможное значение произведения  $abc$ .
2. [4 балла] Известно, что дробь  $\frac{a}{b}$  несократима ( $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ ). На доске записана дробь

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2}$$

При каком наибольшем  $m$  могло оказаться, что числитель и знаменатель дроби можно сократить на  $m$ ?

3. [4 балла] Центр окружности  $\omega$  лежит на окружности  $\Omega$ , хорда  $AB$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $C$  так, что  $AC : CB = 17 : 7$ . Найдите длину  $AB$ , если известно, что радиусы  $\omega$  и  $\Omega$  равны 7 и 13 соответственно.
4. [5 баллов] Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x.$$

5. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $P(-13; 26)$ ,  $Q(3; 26)$  и  $R(16; 0)$ . Найдите количество пар точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что  $2x_2 - 2x_1 + y_2 - y_1 = 14$ .
6. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых найдётся значение параметра  $b$ , при котором система

$$\begin{cases} ax + y - 8b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + (y - 12)^2 - 16) \leq 0 \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.

7. [6 баллов] Треугольник  $ABC$  вписан в окружность. Пусть  $M$  – середина той дуги  $AB$  описанной окружности, которая не содержит точку  $C$ ;  $N$  – середина той дуги  $AC$  описанной окружности, которая не содержит точку  $B$ . Найдите расстояние от вершины  $A$  до центра окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если расстояния от точек  $M$  и  $N$  до сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно равны 5 и 2,5.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

Т.к.  $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ ;  $bc: 2^{17} \cdot 7^{18}$ ;  $ac: 2^{23} \cdot 7^{35}$ ;  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ,

то можно записать:

$$\begin{cases} ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \\ bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \\ ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{35} \end{cases} \quad \text{тогда:}$$

$$abc = \sqrt{k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \cdot m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18} \cdot n \cdot 2^{23} \cdot 7^{35}} = \sqrt{2kmn} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39}$$

если  $ab: 2^{15} \cdot 7^{11}$ , то  $abc: ab$ , то  $abc: 2^{15} \cdot 7^{11}$ , аналогично

$abc: 2^{17} \cdot 7^{18}$  и  $abc: 2^{23} \cdot 7^{35}$ , т.е.  $\sqrt{2kmn} \cdot 2^{27} \cdot 7^{39} : 2^{15} \cdot 7^{11}$ ,

значит если  $\sqrt{2kmn} \neq 7^5 \cdot x$ , то  $abc \neq 2^{27} \cdot 7^{39}$ ,  
т.е.  $\sqrt{2kmn} = 7^5 \cdot x$ , где  $x$  не делится на 7.

т.к.  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , то  $abc \in \mathbb{N}$ , т.е.

$\sqrt{2kmn} \in \mathbb{N}$ , т.е.  $\begin{cases} k: 2 \\ m: 2 \\ n: 2 \end{cases}$ , значит  $\sqrt{2kmn} = 7^5 \cdot 2 \cdot y$ , где

$y \in \mathbb{N}$ , тогда

Умно  $abc = 2^{27} \cdot 7^{39} \cdot 7^5 \cdot 2 \cdot y = 2^{26} \cdot 7^{39} \cdot y \leq 2^{28} \cdot 7^{39}$ , т.е.

$abc = 2^{28} \cdot 7^{39}$  найдем все значения  $abc$  равно  $2^{28} \cdot 7^{39}$

Ответ:  $2^{28} \cdot 7^{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №2.

$\frac{a}{b}$  - не сократится по условию.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{a^2+2ab+b^2-2ab-7ab} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab}$$

1) если  $a+b:m$ , то  $(a+b)^2:m$ , значит тогда

дробь можно было сократить как на  $m$  так и на  $m^2$

$(a+b)^2-9ab:m$ , т.к.  $(a+b)^2:m$ , то  $9ab$  должно делиться на  $m$ .

2) если  $a:m$ , то тогда  $\frac{a+b}{m}$ , т.е.  $b:m$  если  $b$

делится одно из чисел, значит делится и второе - то есть  $b$  делится на  $m$ , то и другое число должно делиться на  $m$

это число,  $b$  делится на  $m$  тогда  $\frac{a}{b}$  - сократится на  $m$ , т.е.  $a:m$ .

Аналогично  $b:m$

3) если  $9:m$ , то т.к.  $9ab:m$ , значит  $ab:m$ ,

попробуем  $\begin{cases} a+b:n \\ ab:m \end{cases}$ , т.е. можно записать:  $\begin{cases} a+b=kn \\ a \cdot b = km \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ \frac{mk}{b} + b = m \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{m \cdot k}{b} \\ nk + b^2 = \frac{m \cdot n \cdot b}{n} \end{cases}$$

т.е.  $b:\sqrt{m}$ , а значит  $\sqrt{m}$  ~~так~~  $\Rightarrow m_{\max} = 9$

Ответ: 9

$\frac{a+b}{\sqrt{m} \cdot \sqrt{m}}$ , то  $a:\sqrt{m}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

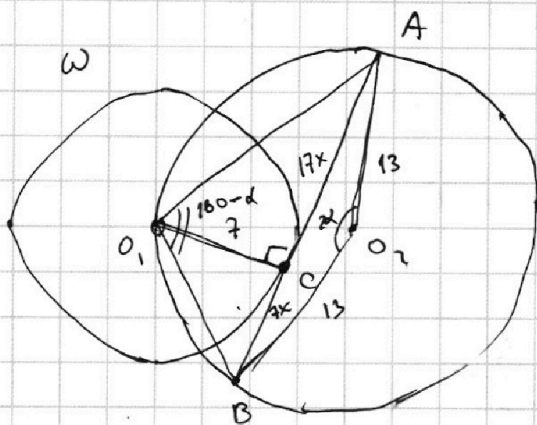
1   
  2   
  3   
  4   
  5   
  6   
  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №3



Дано:

- $\omega, \Omega$  - окружности
- $O_1$  - центр  $\omega$
- $O_2$  - центр  $\Omega$
- $O_1 \in \Omega$
- $AB$  - хорда  $\Omega$
- $AB$   $\cap$   $\omega = C$
- $OC : CB = 17 : 7$
- $R_1 = 7$
- $R_2 = 13$

Найти:  $\alpha$

Решение:

1. Так как  $AB$  - хорда окружности  $\omega$ , то  $O_1C \perp AB$  как радиус, проведенный к хорде перпендикулярно.
2. Пусть  $\angle AO_2B = 2\alpha$ , тогда  $\angle BO_2A = 2\alpha$ ,  $\angle AOB = 360^\circ - 2\alpha$ , значит  $\angle AO_1B = 180^\circ - 2\alpha$  или  $180^\circ - \alpha$ , окружности  $\omega$  и  $\Omega$  касаются в точке  $C$ .
3. Пусть  $x$  - радиус  $\omega$ , тогда  $OC = 17x$ ,  $CB = 7x$
4. По т. Пифагора из  $\triangle O_1CA$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):  $O_1A^2 = O_1C^2 + CA^2$   
По т. Пифагора из  $\triangle O_1CB$  ( $\angle C = 90^\circ$ ):  $O_1B^2 = O_1C^2 + CB^2$
5.  $S_{\triangle O_1AB} = \frac{1}{2} O_1C \cdot AB = \frac{1}{2} O_1A \cdot O_1B \cdot \sin \angle O_1A$   
значит  $O_1C \cdot AB = O_1A \cdot O_1B \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{O_1C \cdot AB}{O_1A \cdot O_1B}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



6. По т. косинусов  $\triangle O_1O_2D$ :

$$AO^2 = AO_1^2 + DO_2^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot DO_2 \cdot \cos 2\alpha$$

$$AO^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot (1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$AO^2 = 2 \cdot 13^2 (1 - 1 + 2 \sin^2 \alpha)$$

$$AO^2 = 2 \cdot 13^2 \sin^2 \alpha$$

$$AO^2 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot \frac{O_1D^2 \cdot AD^2}{O_1B^2 \cdot OA^2}$$

$$1 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot \frac{7^2}{(7^2 + 17x)^2 (7^2 + 17x^2)}$$

$$(17x^2 + 7^2)(17x^2 + 7^2) = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$17^2 x^4 + 17^2 x^2 \cdot 7^2 + 7^2 \cdot 7^2 x^2 + 7^2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 13^2 \cdot 7^2$$

$$289x^4 + (17^2 + 7^2)x^2 = 2^2 \cdot 13^2 - 7^2$$

$$289x^4 + 328x^2 - 627 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -\frac{627}{289} \end{cases} \emptyset$$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ , т.к.  $x$  - коэффициент при  $AO_1$ .

$$7) AB = 17x + 7x = 24x = 24 \cdot 1 = 24$$

Ответ: 24.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №4.

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} = 1 - 9x$$

$$3x^2 + 3x + 1 = 9, \text{ тогда } 3x^2 - 6x + 2 = 3x^2 + 3x + 1 - 9x + 1 =$$

$$= 1 - 9x$$

$$1 - 9x = b$$

Умножим на  $b$ :  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} = b$ .

$\sqrt{a+b} = \sqrt{a+b}$ , возведем в квадрат с помощью формулы

$$a+b = a + 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$b = 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$\begin{cases} b=0 \\ 1 = 2\sqrt{a+b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ \sqrt{a} = \sqrt{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{a} \\ \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{9} = 2\sqrt{a} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{a} \\ \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = 1 - \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{a} \\ |\sqrt{a} - 1| = 1 - \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b = 1 - 2\sqrt{a} \\ 0 \leq a \leq 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ a \geq 0 \\ b = 1 - 2\sqrt{a} \\ 0 \leq a \leq 1 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Пробуем.

$$\begin{cases} b=0; & a \neq 0 \\ a \geq 0 \end{cases} \quad \sqrt{a} - \sqrt{a} = 0 \quad - \text{верно.}$$

$$\begin{cases} b = 1 - 2\sqrt{a} \\ 0 \leq a \leq 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} \sqrt{a - 2\sqrt{a} + 1} &= 1 - \sqrt{a} \\ \sqrt{(\sqrt{a} - 1)^2} &= 1 - \sqrt{a} \\ |\sqrt{a} - 1| &= 1 - \sqrt{a} \\ 1 - \sqrt{a} &= 1 - \sqrt{a} \quad - \text{верно} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=-1 \end{cases}; \quad \sqrt{2} - \sqrt{1} = 1 \quad - \text{не верно.}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 1 - 9x \geq 0 \\ a \neq 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - 9x = 1 - 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \\ 0 \leq 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 3x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad - \text{верно} \\ \begin{cases} 9x = 2\sqrt{3x^2 + 3x + 1} \quad (*) \\ 0 \leq 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$(*) \quad \begin{cases} 9x \geq 0 \\ 81x^2 = 4(3x^2 + 3x + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 69x^2 = 12x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 69x^2 - 12x + 4 = 0, \quad D < 0 \quad \emptyset \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ 0 \leq 3x^2 + 3x + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

Ответ:  $\frac{1}{9}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1   
  2   
  3   
  4   
  5   
 6   
 7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



Задача №6.

$$\begin{cases} ax+y-8b=0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+(y-12)^2-16) \leq 0 \quad (*) \end{cases}$$

Изобразим  ~~$ax+y-8b=0$~~   ~~$x^2+y^2=1$~~ .

(\*) Трапеция:  $x^2+y^2=1$  — оуп ( $O_1; 0$ );  $R_1=1$   
 $x^2+(y-12)^2=16$  — оуп ( $O_2; 12$ );  $R_2=4$

1) Прямая ~~верно~~ только

или точки ~~или на границе~~ ~~или внутри~~ ~~или~~

внутри  $\checkmark$  большей или

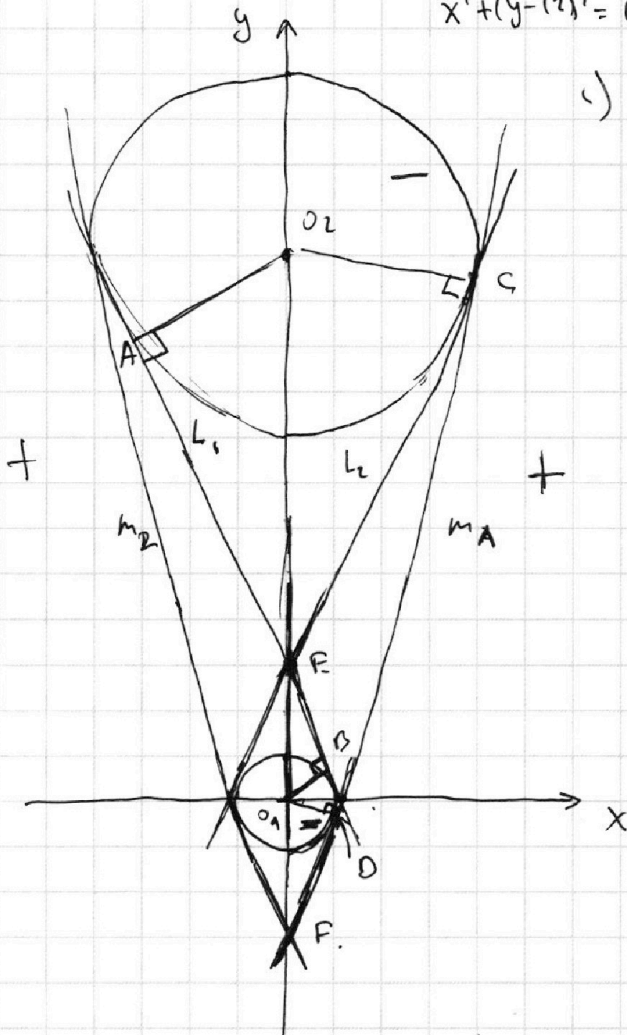
меньшей окружности, тогда

система будет иметь

ровно 2 решения  $\checkmark$  ~~только~~ ~~тогда~~ ~~когда~~

прямая  $ax+y-8b=0$  будет

касаться обеих окружностей.



2) Пусть общие касательные к и оупы окружностей

пересекат только центр между оупами оуп в  
 точке E. ( $E \in O_1O_2$ )



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

МФТИ

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

3) Тогда ось  $l$  касат. окруж. из центра  $O_2$  касательной

горизонт  $L_1$ :  $L_1 \cap \text{Окр}(O_2, R_2) = A$ , тогда  
 $L_1 \cap \text{Окр}(O_1, R_1) = B$

$O_2A \perp L_1$  и  $O_1B \perp L_1$  или радиусы, проведенные к  
точке касания

4)  $\triangle O_2AE \sim \triangle O_1BE$  по двум углам, т.к.

$\angle A = \angle B = 90^\circ$  и  $\angle AEO_2 = \angle BEO_1$  как вертикальные,

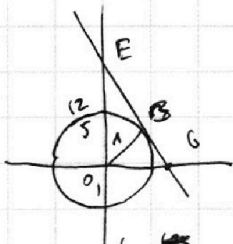
тогда  $\frac{O_1E}{O_1B} = \frac{O_2E}{O_2A} \Rightarrow \frac{4}{1} \Rightarrow O_2E = 4O_1E$  и

$O_2E + O_1E = 12$ , т.к.  $O_1E + 4O_1E = 12 \Rightarrow O_1E = \frac{12}{5}$ ,

т.к.  $E(0; \frac{12}{5})$

5)  $E \in l$ , т.к.  $a \cdot 0 + \frac{12}{5} - 8b = 0 \Rightarrow b = \frac{12}{5 \cdot 8} = \frac{3}{5} = 0,6$ .

6) Пусть  $L_1 \cap O_x = G$ , тогда.



По т. Пифагора  $EG^2 = O_1G^2 + O_1E^2$

$\triangle O_1EG \sim \triangle O_2EG \Rightarrow \frac{O_1E}{O_1G} = \frac{O_2E}{O_2G} \Rightarrow \frac{12/5}{O_1G} = \frac{4}{O_2G} \Rightarrow O_2G = \frac{2}{3} O_1G$

$O_1E^2 + O_1G^2 = O_2E^2 + O_2G^2 \Rightarrow \frac{12^2}{5^2} + O_1G^2 = \frac{16^2}{5^2} + O_2G^2 \Rightarrow \frac{144}{25} + O_1G^2 = \frac{256}{25} + O_2G^2$

т.к.  $O_2G = \frac{2}{3} O_1G \Rightarrow \frac{144}{25} + O_1G^2 = \frac{256}{25} + \frac{4}{9} O_1G^2 \Rightarrow \frac{144}{25} - \frac{256}{25} = \frac{4}{9} O_1G^2 - O_1G^2 \Rightarrow \frac{-112}{25} = -\frac{5}{9} O_1G^2 \Rightarrow O_1G^2 = \frac{112 \cdot 9}{25 \cdot 5} = \frac{1008}{125} \Rightarrow O_1G = \sqrt{\frac{1008}{125}} = \frac{\sqrt{1008}}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{144 \cdot 7}}{\sqrt{5 \cdot 5 \cdot 5}} = \frac{12\sqrt{7}}{5\sqrt{5}}$

2)  $G \in l$ , значит  $a \cdot \frac{12}{\sqrt{143}} + 0 - 8 \cdot \frac{12}{10} = 0 \Rightarrow a = \frac{12 \cdot 12}{5} \cdot \frac{\sqrt{143}}{\sqrt{143}} = \frac{144}{5}$

8) Эти касательные вторую касат  $L_2$  как  
по двум т.к.  $L_1$  и  $L_2$  - симметр. озн. Оу



На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

а) значит  $a$  в этом случае будет равно  $\frac{\sqrt{143}}{5}$

г) Расм. касательна  $m_1$  и  $m_2$ , которые пересекаются в центре  $O_1$ , радиусы, соединяющие центры окружностей, т.е.  $m_1, m_2 \perp F$ ;  $F \notin O_1 O_2$

тогда  $m_1$

10) Аналогично с касат.  $b_1$  и  $b_2$  расм. Тогда касательная  $m_1$ :

угол  $m_1 \cap O_1 O_2 = \alpha$ ,  $m_1 \cap O_1 O_2 = \beta$ .

н)  $\triangle F O_1 C \sim \triangle F O_1 D$  по двум углам, т.к.

$\angle C = \angle D = 90^\circ$  т.к. радиусы, проведенные к касательной перпендикулярны касательной

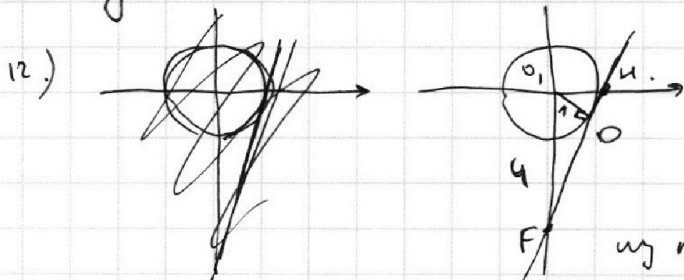
тогда  $\angle F$  - общий, тогда:

$$\frac{O_2 F}{O_1 F} = \frac{O_2 C}{O_1 D} = \frac{4}{1} \Rightarrow O_2 F = 4 O_1 F$$

Также  $O_2 F - O_1 F = 12$ , значит  $4 O_1 F - O_1 F = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1 F = 4$ , т.е.  $F(0; 4)$ ;  $F \in m_1$ , значит

$$0 \cdot x + 4 - 8b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$



угол  $m_2 \cap O_1 O_2 = \alpha$ ,

тогда по т. Пифагора

$$F O_1^2 = O_1 F^2 + O_1 H^2$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:



1  2  3  4  5  6  7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{So } FO_{1K} = \frac{1}{2} O_1 \overset{\wedge}{D} \cdot F_{1K} = \frac{1}{2} O_1 F \cdot O_{1K}, \text{ т.е. } F_{1K} = O_1 F \cdot O_{1K}$$

Получаем:  $O_1 F^2 \cdot O_{1K}^2 = O_1 F^2 + O_{1K}^2$

$$4^2 \cdot O_{1K}^2 = 4^2 + O_{1K}^2 \Rightarrow (4^2 - 1) O_{1K}^2 = 4^2 \Rightarrow O_{1K} = \sqrt{\frac{4^2}{4^2 - 1}} = \frac{4}{\sqrt{15}}, \text{ т.е.}$$

$K(0; \frac{4}{\sqrt{15}})$

13)  $K \in m_1$ , значит:  $a \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} + 0 - 8 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \Rightarrow a = \sqrt{15}$ .

14) Рассматриваем каска псевдоуглов  $m_2$  или осевыми  
сплюснутыми  $L_1$  и  $L_2$ , то  $a = -\sqrt{15}$

Ответ:  $a = \pm \frac{\sqrt{143}}{5}$ ;  $a = \pm \sqrt{15}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,  
решение которой представлено на странице:

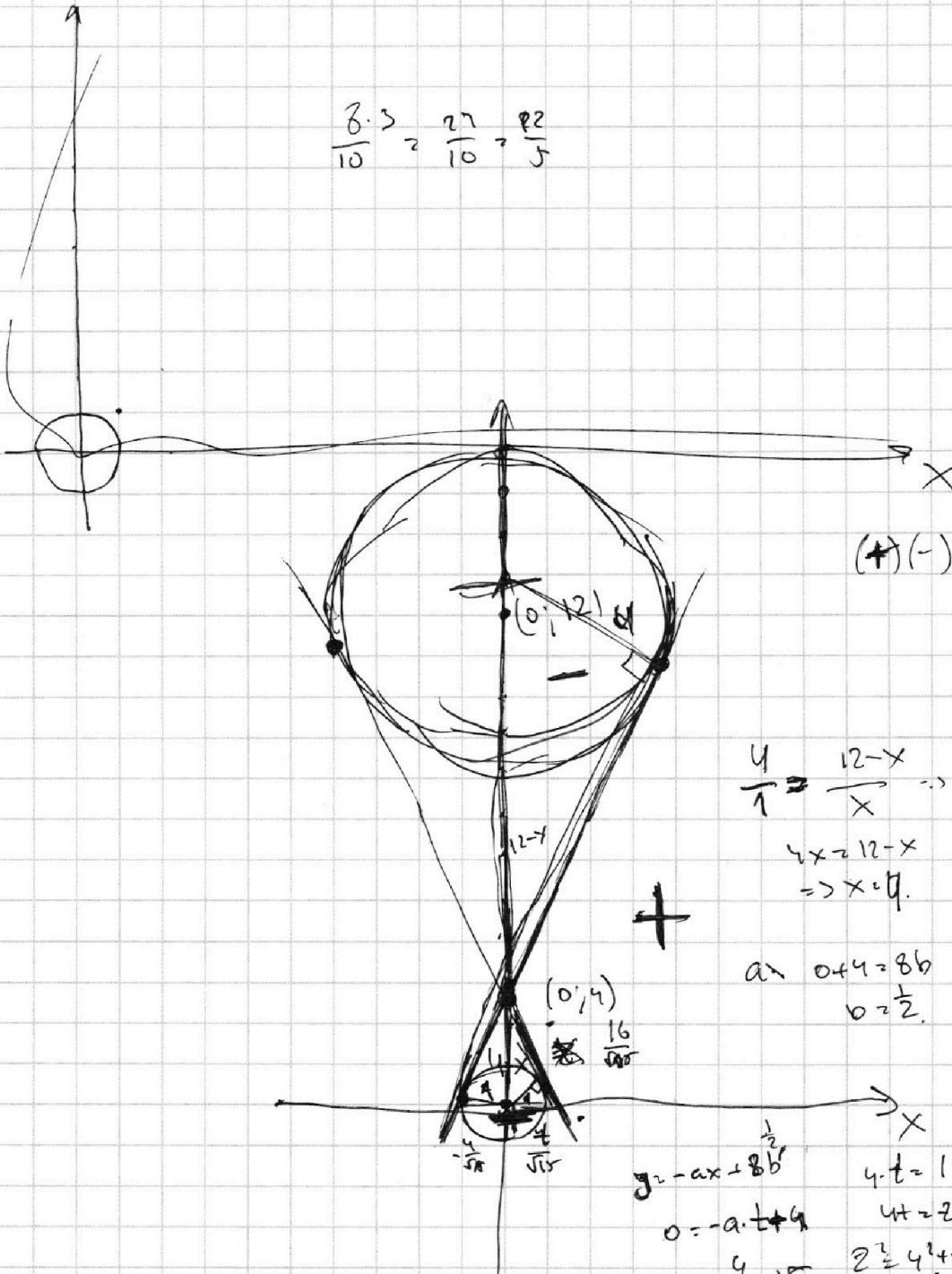
1     2     3     4     5     6     7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,  
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{8 \cdot 3}{10} = \frac{27}{10} = \frac{82}{5}$$



(+)(-)

$$\frac{4}{1} = \frac{12-x}{x} \Rightarrow$$

$$4x = 12 - x \Rightarrow x = 4.$$

$$a \Rightarrow 0 + 4 = 8b \Rightarrow b = \frac{1}{2}.$$

+

(0, 4)  
16  
4

$$g = -ax + 8b^2$$

$$0 = -a \cdot t + 4$$

$$a = \frac{4}{t} = \pm \sqrt{5}$$

$$4 \cdot t = 1 \cdot \frac{4}{t}$$

$$4t = 2$$

$$2 = 4^2 + t^2$$

$$(4t)^2 + t^2 = 0$$

$$16t^2 = 4^2 + t^2$$

$$15t^2 = 4^2$$

$$t^2 = \frac{4}{15}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7

**МФТИ**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$3x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(1-9x) = b$$

$$3x^2 - 6x + 2 = t - 3x + 1 = t + (1-9x)$$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a+b = a + 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} = b$$

$$b = 2\sqrt{ab} + b^2$$

$$2\sqrt{a} + b = 0$$

(0; 0)

(16; 0)

(0; 0)

(16; 0)

P (-13; 26)

Q (3; 26)

$$\Rightarrow b = -2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a}} = \sqrt{a} - 2\sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-2\sqrt{a}} = -\sqrt{a}$$

$$a-2\sqrt{a} = a = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

$$b^2 + 2\sqrt{ab} - b = 0$$

$$b + 2\sqrt{a} - 1 = 0$$

$$16 + 13 = 29$$

$$20^2 + 29^2 \geq 14^2$$

$$2|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 14$$

$$-1 \leq x_2 - x_1 \leq 16$$

$$2 \leq y_2 - y_1 \leq 26$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 1 \\ y_2 - y_1 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 3 \\ y_2 - y_1 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 2 \\ y_2 - y_1 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 4 \\ y_2 - y_1 = 6 \end{cases}$$

$$a - 2\sqrt{a} + 1 = 0$$

$$(\sqrt{a} - 1)^2 = 0$$

$$\frac{81}{162}$$

$$\begin{array}{r} -10 \\ 162 \\ -54 \\ \hline 108 \\ +108 \\ \hline 111 \end{array}$$

$$\sqrt{a-1} = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-1} = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a-1} = \sqrt{a-1} = 1 - \sqrt{a}$$

$$\sqrt{a} = 1$$

$$\sqrt{a} \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{30}{81} - \frac{6}{9} + 2} - \sqrt{\frac{3}{81} + \frac{3}{9} + 1} = 0$$

$$\frac{3}{81} - \frac{54}{81} + \frac{162}{81}$$

$$161 + 27 + 3 = 191$$

$$\frac{81}{108} + \frac{27}{108}$$



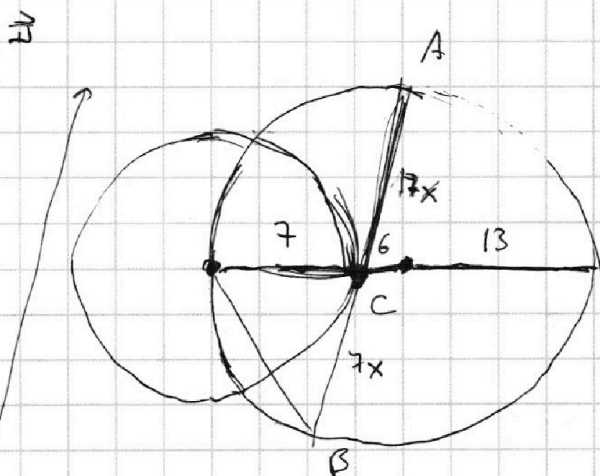
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется! Порча QR-кода недопустима!



$$D: \begin{cases} 17x^2 + 4 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 169 \cdot 169 \\ 17x \cdot 7x = x \cdot 19 \\ 17x^2 = 19 \\ x = \sqrt{\frac{19}{77}} \\ 24x = 24 \sqrt{\frac{19}{77}} \end{cases}$$

$$(289 + 49)(49 + 49) = 2 \cdot 49 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 65$$

$$17^2 + 7^2 + 17 + 7 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 7^2 = 2 \cdot 7 \cdot 19^2$$

$$(17^2 + 7^2) + (17 + 7) \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 7^2 = 2 \cdot 7 \cdot 19^2$$

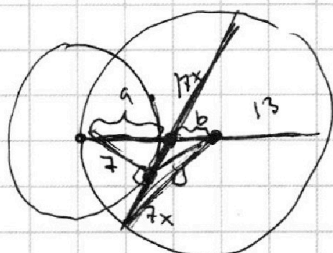
$$392 + 2 + 168 + 2 \cdot 49 \cdot 169 = 2 \cdot 7 \cdot 19^2$$

$$169 + 2 + 49 \cdot 169 = 2 \cdot 7 \cdot 19^2$$

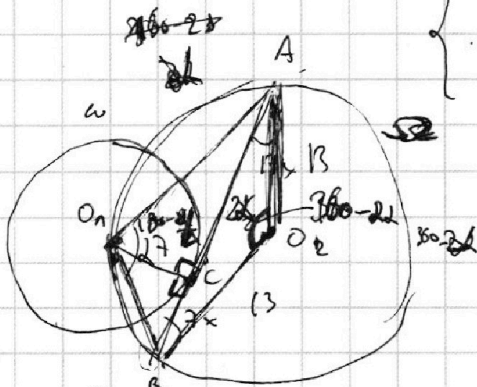
$$(7x + y)(17x - 5)$$

$$(7x + y) \cdot 17x = a(13 + b)$$

$$a = \sqrt{7^2 + 7^2}$$



$$\begin{cases} 17 \cdot 7x^2 + 10xy - y^2 = a(13 + b) \\ a + b = 13 \\ a^2 = 7^2 + 7^2 \end{cases}$$



$$17x + 7x = 24x$$

$$\begin{cases} (17x)^2 + 7^2 = AO_1^2 \\ (7x)^2 + 7^2 = AO_2^2 \end{cases}$$

$$AB^2 = AO_1^2 + AO_2^2 - 2 \cdot AO_1 \cdot AO_2 \cdot \cos(180 - \alpha)$$

$$AB^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\cos(180 - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$24x \cdot 7 = \sqrt{17x^2 + 7^2} \cdot \sqrt{7x^2 + 7^2} \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{24x \cdot 7}{\sqrt{(17x^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)}}$$

$$(24x)^2 = \left( 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos 2\alpha + 2 \cdot 13^2 \sin^2 \alpha \right)$$

$$1 = \frac{2 \cdot 13^2 \sin^2 \alpha}{(17x^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)}$$

$$2 \cdot 13^2 \sin^2 \alpha = \frac{2 \cdot 13^2 \sin^2 \alpha}{(17x^2 + 7^2)(7x^2 + 7^2)}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

$$ab = k \cdot 2^{15} \cdot 7^{11} \quad ; a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$bc = m \cdot 2^{17} \cdot 7^{18}$$

$$ac = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$2^{27} \cdot 7^{34}$$

$$abc = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{15+17+23} \cdot 7^{11+18+39}} = \sqrt{k \cdot m \cdot n \cdot 2^{55} \cdot 7^{68}} = 2^{27} \cdot 7^{34} \sqrt{kmn}$$

$$c = \frac{m \cdot n \cdot 2^{17+18+23} \cdot 7^{27+39}}{n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}} = \sqrt{\frac{m \cdot n}{k} \cdot 2^{25} \cdot 7^{46}} = \sqrt{\frac{m \cdot n \cdot 2^{12} \cdot 7^{23}}{k} \cdot 7^5 \cdot 2^4}$$

$$abc : ac \rightarrow abc : n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39} \quad ; \quad 2^{27} \cdot 7^{34} \cdot \sqrt{kmn} : n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$abc = 2^{28} \cdot 7^{39} \cdot X = 2^{28} \cdot 7^{39}$$

$$c = \frac{2^{28} \cdot 7^{39}}{2^{23} \cdot 7^{39}} = \frac{2^5}{k}$$

$$b = \frac{2^{28} \cdot 7^{39}}{2^{25} \cdot 7^{46}} = \frac{2^3 \cdot 7^{46}}{k \cdot m} = n \cdot 2^{23} \cdot 7^{39}$$

$$a = \frac{2^{28} \cdot 7^{18}}{m}$$

$\frac{a}{b}$  - др. - сократимся.

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{\frac{a^2-7ab+b^2}{m}}$$

$a=2^m$  ;  $b=7^m$  ;  $a=7^m$  ;  $b=2^m$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2-9ab} = \frac{4}{u^2-9v}$$

$a+b=4$   
 $ab=9$

$$8-2=4.$$

$$\frac{2+u}{2-u \cdot 7 \cdot n + mn} = \frac{u}{2-2+u} = \frac{u}{2+u} = \frac{u}{u}$$

$$5-3=2.$$

$$\frac{h+h}{h-h \cdot h \cdot h + h} = \frac{2}{h-h+h} = \frac{2}{h}$$

$$7ab : a+b$$

$$\frac{(a+b)^2-9ab}{a+b} = a+b - \frac{9ab}{a+b} =$$

$$\frac{a+b}{a^2-7ab+b^2} =$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$1 = \frac{2^2 - 7^2 - 13^2}{(10x^2 + 7x^2 + 7^2)(17x^2 + 2^2)}$$

$$x = 1$$

$$(209 + 49)(7^2 + 2^2) = 338 \cdot 98 = 2$$

$$\begin{array}{r} + 48 \\ + 48 \\ \hline 96 \\ \times 2 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$(209x^2 + 49)(7^2x^2 + 2^2) = 17^2 \cdot 7^2 \cdot x^4 - x^2 + 17^2 \cdot 7^2 \cdot x^2 + 7^2 \cdot 2^2 \cdot x^2 + 2^2 \cdot 7^2 = 17^2 \cdot 7^2 \cdot x^4 + (17^2 + 7^2) \cdot 7^2 \cdot x^2 + 2 \cdot 7^2 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2$$

$$289(x^2)^2 + 338x^2 + 2 = 2 \cdot 13^2$$

$$\frac{a+b}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)^2 - 2ab}$$

$$a+b \equiv m$$

$$(a+b)^2 \geq 2ab$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$$

$$\frac{a+b}{(a+b+3\sqrt{ab})(a+b+3\sqrt{ab})} = \frac{a+b}{a+b}$$

$$\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a} \cdot b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

a - num  
b - num.  
a - num.  
b - num.

$$\frac{2}{2^2 - n} = \frac{2}{2 - n} = \frac{2}{n} = k$$

g

g

u/d

same  $a+b \equiv m$ , to  $(a+b)^2 \equiv x$   
 $\rightarrow a \equiv x$  and  $b \equiv x$  where  $b$  given.  $\equiv x$ , i.e.  $\frac{a}{b}$  - const.

$$(a+b)^2 \equiv m$$

$$-2ab \equiv m \quad \text{where}$$

same  $g \equiv m$ , to  $a \cdot b \equiv m$ , i.e.  $a \cdot b \equiv m$   
 $a \cdot b \equiv m$

$$a \cdot b \equiv m \cdot k$$

$$a \cdot b \equiv m \cdot n$$

$$a = \frac{m \cdot k}{b}$$

$$\frac{m \cdot k}{b} + b \equiv m \cdot n$$

$$m \cdot k + b^2 = b \cdot m \cdot n$$

$$b^2 \equiv m$$

$$a \cdot b \equiv m$$

$$b \equiv \sqrt{m}$$

$$a + \sqrt{m} \cdot x = m \cdot y$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1  2  3  4  5  6  7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

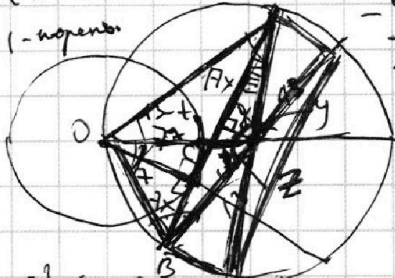


$$7t^2 + (17+7^2)t = 2^2 - 13^2 - 7^2$$

$$285t^2 + 378t - 627 = 0$$

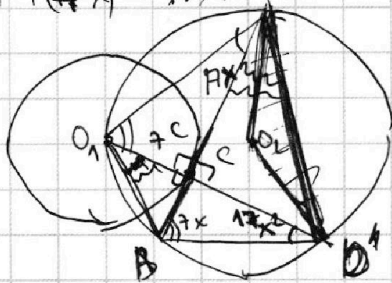
$$\frac{285}{7}t^2 + \frac{378}{7}t - \frac{627}{7} = 0$$

$t = 1$  - корень.



$$AO^2 = 7^2 + (17x)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos \gamma$$

$$AO^2 = 7^2 + (17x)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos \gamma$$



$$(17x)^2 - (7x)^2 = \cos \gamma - \cos \gamma = 0$$

$$17x \cdot A_x = A \cdot a$$

$$a = 17x$$

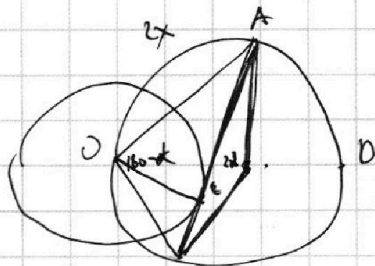
$$\frac{7x}{7} = x$$

$$\frac{17x}{17} = x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} - \sqrt{3x^2 + 9x + 1} = 4 - 9x$$

$$\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 9x = \sqrt{3x^2 + 9x + 1} + 4$$

$$3x^2 - 6x + 2 + 18x\sqrt{3x^2 - 6x + 2} + 81x^2 = 3x^2 + 9x + 1 + 4\sqrt{3x^2 + 9x + 1} + 16$$



$$AB^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cdot \cos 2\alpha$$

Ans:

$$AB \cdot OC = AO \cdot OB \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{AB \cdot OC}{AO \cdot OB} \Rightarrow$$

=>

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \frac{AB^2 \cdot OC^2}{AO^2 \cdot OB^2}$$

$$AO^2 = 2 \cdot 13^2 \left( 1 - 1 + 2 \frac{AB^2 \cdot OC^2}{AO^2 \cdot OB^2} \right) = 1 = \frac{2^2 - 13^2 \cdot 7^2}{((17x)^2 + 7^2)(17x^2 + 7^2)}$$

$$17^2 x^4 + (17^2 + 7^2)x^2 + 7^2 = 2^2 - 13^2 \cdot 7^2$$