



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [4 балла] Натуральные числа a , b , c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc .
2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC . Окружность, касающаяся прямой AC в точке A , пересекает высоту CD , проведённую к гипотенузе, в точке E , а катет BC – в точке F . Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1,3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF .
3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся значение параметра b , при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ (x^2 + 14x + y^2 + 45)(x^2 + y^2 - 9) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4, \quad \text{и} \quad \log_7^4 y + 6 \log_y 7 = \log_{y^2} (7^5) - 4.$$

Найдите все возможные значения произведения xy .

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0; 0)$, $P(-17; 68)$, $Q(2; 68)$ и $R(19; 0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K , лежащей на отрезке AM . Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q . Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.
 - а) Найдите произведение длин медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 .
 - б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N , $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1.

Пусть x_1, y_1, z_1 - степеней брожения 2, 3 и 5 в а ссепе
свеклы, аналогично определим x_2, y_2, z_2 и x_3, y_3, z_3 для
б и с. Т.к. нужно найти минимальное произведение abc,
будем считать, что а, б и с даются только на 2, 3 и 5.
Тогда, по условию имеем следующие 3 системы нера-
венств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_2 + x_3 \geq 13 \\ x_3 + x_1 \geq 14 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 11 \\ y_2 + y_3 \geq 15 \\ y_3 + y_1 \geq 17 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 + z_2 \geq 14 \\ z_2 + z_3 \geq 18 \\ z_3 + z_1 \geq 43 \end{cases}$$

Сложим неравенства в каждой системе и поделим на 2,
получим:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 17 \quad y_1 + y_2 + y_3 \geq \frac{43}{2} \quad z_1 + z_2 + z_3 \geq \frac{75}{2}$$

Т.к. числа целые, то

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 17 \quad y_1 + y_2 + y_3 \geq 22 \quad z_1 + z_2 + z_3 \geq 38$$

Приведем пример подходящих по условию чисел:

$$x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 10; \quad y_1 = 6, y_2 = 5, y_3 = 11;$$

Но заметим, что $z_1 + z_2 + z_3 \geq z_3 + z_1 \geq 43$, поэтому

$$z_1 = 14, z_2 = 0, z_3 = 29.$$

Таким образом, минимальное значение abc равно

$$2^{x_1 + x_2 + x_3} \cdot 3^{y_1 + y_2 + y_3} \cdot 5^{z_1 + z_2 + z_3} = 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

$$\text{Ответ: } 2^{17} \cdot 3^{22} \cdot 5^{43}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

 МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Отношение площади $\triangle CEF$ и $\triangle ACD$ равно квадрату их соответственной стороны, и он равен:

$$K = \frac{CE}{AD} = \frac{\sqrt{30}c}{26} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$K^2 = \frac{30}{36} \text{ — это и есть их отношение площадей.}$$

Ответ: $\frac{30}{36}$.

$$K = \frac{AD}{CE} = \frac{\frac{3}{13}c}{\frac{\sqrt{30}c}{26}} = \frac{6}{\sqrt{30}}$$

$$K^2 = \frac{36}{30} \text{ — это и есть отношение площадей}$$

из $\triangle ACD$ и площади $\triangle CEF$.

Ответ: $\frac{36}{30}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

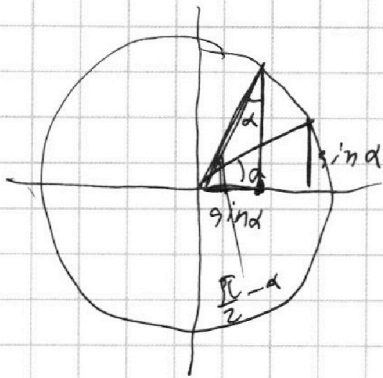
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№3



Заметим, что $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$,
как видно из рисунка, тогда

$$5 \arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{3\pi}{2} + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 6x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

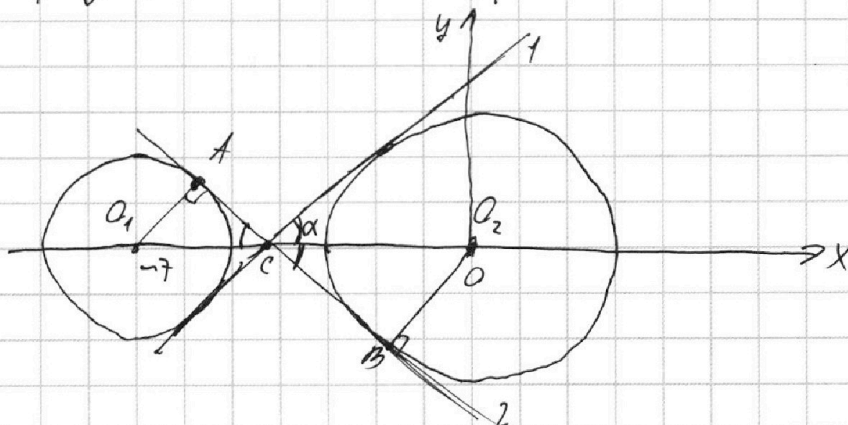
Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

14
 $x^2 + y^2 - 9 = 0$ — это график окружности радиуса 3 с центром в точке $(0; 0)$.
 $x^2 + 14x + y^2 + 45 = (x+7)^2 + y^2 - 4 = 0$ — график окружности радиуса 2 с центром в точке $(-7; 0)$.



$x + 3ay - 7b = 0$ — это график прямой, где коэффициент a отвечает за угол наклона, а b — за сдвиг вверх и вниз.

Проведем касательные к приведенным окружностям. Заметим, что если касательная к первой касательной, или касательная ко второй, или другая прямая пересекает эти окружности не более, чем в двух точках в сумме.

$x + 3ay - 7b = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{3a} + \frac{7b}{3a}$, тогда, если K — коэффициент наклона первой касательной, то $K > -\frac{1}{3a} > -K$, т.к. угол наклона второй в силу симметрии равен $-K$.

См. обозначения точек на рисунке. В $\triangle O_1AC$ и $\triangle O_2BC$, по прямой AC и $\angle O_1CA = \angle O_2CB$, тогда $O_1C / CO_2 = O_1A / O_2B = \frac{2}{3} \Rightarrow O_2C = \frac{3}{5} \cdot O_1O_2 = \frac{3}{5} \cdot 7 = 4,2$

$$CB = \sqrt{O_2C^2 - O_2B^2} = \sqrt{4,2^2 - 2^2} = \sqrt{14,4 - 4} = \sqrt{10,4} = 1,2\sqrt{6} \quad \text{но м. Касательная}$$

$$\operatorname{tg} \angle OCB = OB / CB = \frac{2}{1,2\sqrt{6}} = \frac{1}{0,6\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{12}$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{12} > -\frac{1}{3a} > -\frac{5\sqrt{6}}{12} \Leftrightarrow -\frac{5\sqrt{6}}{12} > 3a > \frac{5\sqrt{6}}{12} \Leftrightarrow -\frac{5\sqrt{6}}{4} > a > \frac{5\sqrt{6}}{4}$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{5\sqrt{6}}{4}; \frac{5\sqrt{6}}{4}\right)$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

15

$$\log_{36x^2} 343 = \frac{1}{2} \log_{6x} 343 = \frac{5}{2} \log_{6x} 7 = \log_{6x} \sqrt{343}$$

$$\log_7^4(6x) = \log_{6x} \sqrt{343} + \log_{6x} 49 - 4 = \log_{6x} 49\sqrt{343} - 4$$

$$\log_{36x^2} 343 = \frac{1}{2} \log_{6x} 343 = \log_{6x} 7^{\frac{3}{2}}$$

~~\log_7~~

$$\log_{36x^2} 343 = 3 \log_{36x^2} 7 = \frac{3}{\log_7(36x^2)} = \frac{3}{2 \log_7(6x)}$$

$$\log_{6x} 7 = \frac{1}{\log_7(6x)}$$

$$\log_7^4(6x) - 2 \log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_7^4(6x) = \frac{3}{2 \log_7(6x)} - \frac{2}{\log_7(6x)} - 4 = -\frac{1}{2 \log_7(6x)} - 4$$

Пусть ~~$a = \log_7^4(6x)$~~ $a = \log_7(6x)$, тогда

$$a^4 = -\frac{1}{2a} - 4 \Leftrightarrow a^5 = -4a - \frac{1}{2}$$

Замечим, что a^5 - монотонно возрастающая функция, а $-4a - \frac{1}{2}$ - монотонно убывающая, поэтому это уравнение имеет не более одного решения.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,

решение которой представлено на странице:

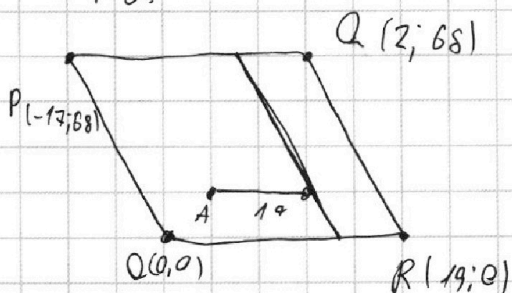


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№6.



Пусть $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$,
 тогда $4\Delta x - \Delta y = 40 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \Delta y = 40 - 4\Delta x \quad (1)$

Заметим, что у стороны PQ параллельна той же прямой как линия, то есть -4, а тогда,

если выбрать точку A, то все точки B, которые можно заметить в паре, лежат на прямой, параллельной PQ, всего их 18. Тогда нужно найти кол-во точек A, для которых существует такая прямая.

Несложно понять, что если $\Delta y = 0$, то $\Delta x = 10$, ~~то~~ на определенной высоте y всего $20 - 10 = 10$ последующих точек, на данной высоте, ~~тогда~~ с высотой x, парные точки B не будут лежать в паре.

Тогда точку A

~~Тогда координату x точки A можно выбрать 10 способами, координату y - 18 способами~~

Тогда координату x точки A можно выбрать 10 способами, координату y - 18 способами, и для каждой точки выбрать пару 18 способами, т.е. всего $10 \cdot 18^2$ способов выбрать пару A, B.

Но мы учли только случаи, для которых прямая, на которой лежит точка B, перпендикулярна в единичных точках, но также есть еще 3 группы прямых, ~~они~~ в каждой точке не кол-во прямых, которые пересекают параллель в неединичных точках, поэтому общий кол-во способов выбрать пару AB равно $4 \cdot 10 \cdot 18^2$

Ответ: $4 \cdot 10 \cdot 18^2$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

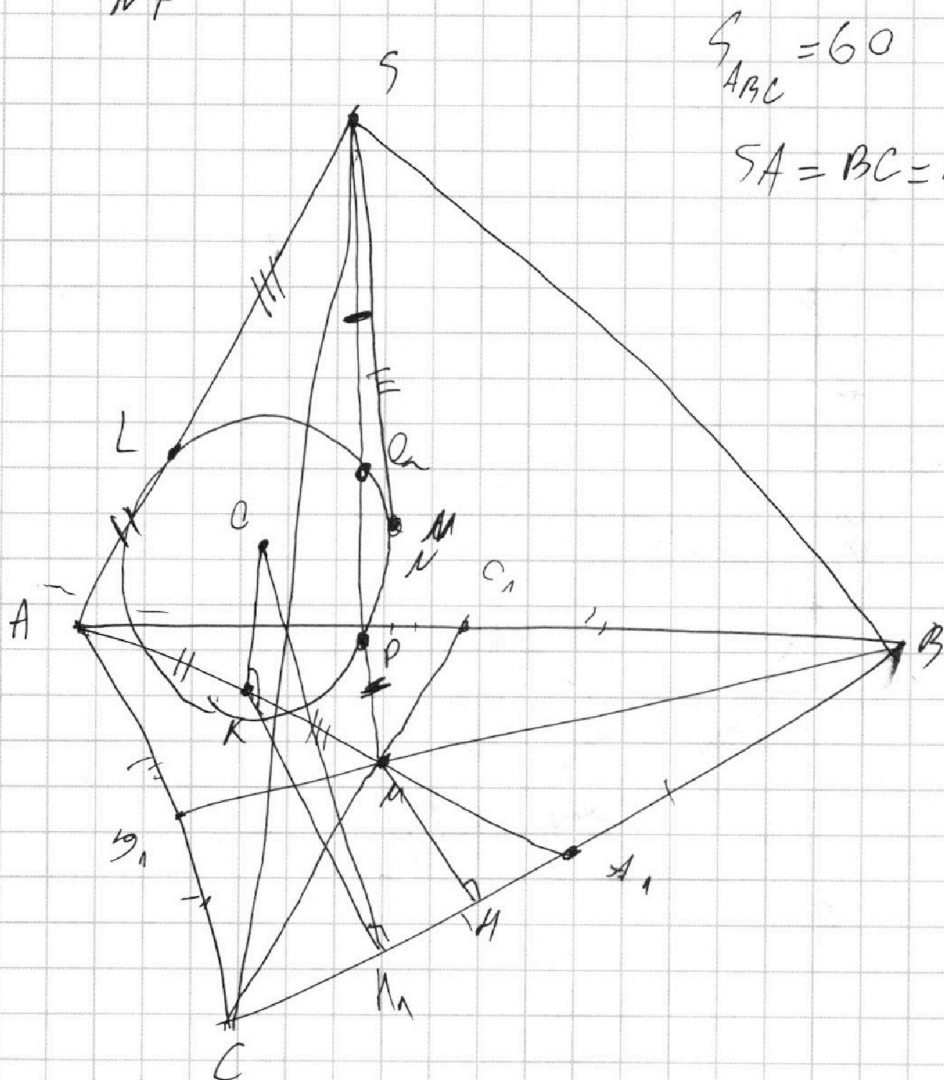
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

N7



$$\angle_{ABC} = 60$$

$$SA = BC = 10$$

По Стереону точки M и K симметричны относительно сферы Ω равна
 $MK^2 = MP \cdot PQ$. Стереон точки S сим. Ω равна
 $SL^2 = SQ \cdot SP$, но по условию, $SP = MQ$ и, $SQ = SM - MQ =$
 $= SM - SP = MP$, а значит, $SL = MK$. Также $AK = AL$, т.е.
 AL и AK - касательные к Ω . Получили, что $AL = AS = 10$.
 Опустим высоту MN в $\triangle ABC$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:



1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

По свойству медианы, $S_{AMC} = S_{AMB} = S_{BMA} \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_{AMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = 20.$

$$S_{AMC} = \frac{MN \cdot BC}{2} \Rightarrow MN = \frac{2S_{AMC}}{BC} = 4.$$

Т.к. точка пересечения медиан делит их в отношении
2:1, то $MA_1 = \frac{AM}{2} = 5.$

По т. Пифагора, $A_1N = \sqrt{MA_1^2 - MN^2} = 3$, тогда

$$CN = CA_1 - A_1N = \text{не учитывая обозначения, } CN = CA_1 - A_1N =$$
$$= \frac{BC}{2} - A_1N = 5 - 3 = 2 \text{ и } BN = BC - CN = 8.$$

По т. Пифагора, $MC = \sqrt{MN^2 + CN^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$; $MB = \sqrt{BN^2 + MN^2} =$
 $= \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$

$$AA_1 = \frac{3}{2} AM = 15; \quad BB_1 = \frac{3}{2} BM = 6\sqrt{5}; \quad CC_1 = \frac{3}{2} CM = 3\sqrt{5}.$$

$$AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 1350.$$

б) $SK = SL = MK = 3$, тогда $AK = AL = AS - SL = 7.$

Соединим перпендикуляр KN_1 из точки K на BC .
Пусть O — центр Ω , тогда угловый угол KN_1O и
будет равен двугранному углу при ребре BC , но определится

Т.к. $KN_1 \parallel MN$, то $\triangle MNA_1 \sim \triangle KN_1A_1$, а тогда $\frac{KN_1}{MN} = \frac{KA_1}{MA_1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow KN_1 = \frac{KA_1 \cdot MN}{MA_1} = \frac{4 \cdot (15 - 7)}{5} = \frac{32}{5}$

$$\operatorname{tg} \angle CN_1K = \frac{OK}{KN_1} = \frac{4}{32/5} = \frac{5}{8}$$

тогда двугранный угол при ребре BC равен $2 \arctg \frac{5}{8}$.

Ответ: а) 1350; б) $2 \arctg \frac{5}{8}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

- 1 2 3 4 5 6 7

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$x^2 + y^2 = 3^2$$

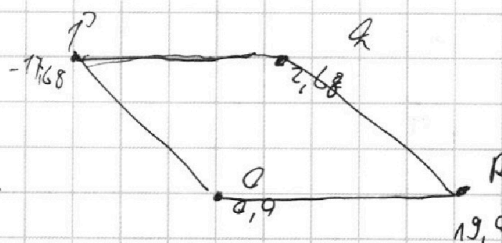
$$(x+7)^2 + y^2 = 2^2$$

$$\frac{3 \cdot 7}{10} \quad \frac{8 \cdot 9}{10}$$

$$1,2 \cdot 7,2 =$$

$$= \frac{25 \cdot 3^3}{10}$$

$$\begin{array}{r} 7,2 \\ \times 1,2 \\ \hline 144 \\ 72 \\ \hline 8,64 \end{array}$$



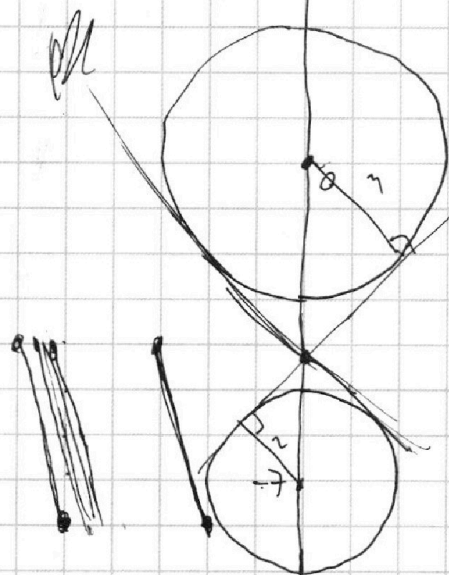
$$\frac{4}{10} \quad \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$4\Delta x + 4y = 40$$

$$x_1, y_1$$

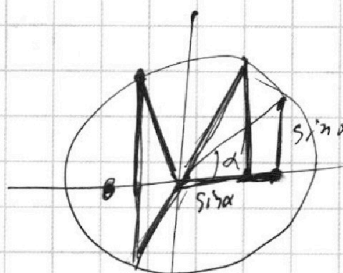
$$x_2 \Delta x; y_2 \Delta y$$

$$4y = 40 - 4\Delta x$$



$$5 \arccos(\cos(\theta, \sin x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{3\pi/2 + x}{5}\right)$$



$$\frac{4\pi}{6}$$

$$5 \left| 2\pi k + \frac{\pi}{2} - x \right| = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$5 \left| 2\pi k + x - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{3\pi}{2} + x$$

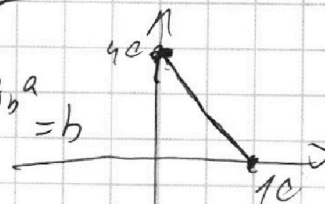
$$\arccos(\cos(\theta, \sin x)) = \frac{3\pi}{2} + x$$

$$2\pi k \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$10\pi k + \frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = 6x$$

$$\frac{10\pi k + \pi}{6} = x$$

$$b \cdot \log_a b - \log_b a = b$$



$$10\pi k - \frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -4x$$

$$\frac{10\pi k - 4\pi}{-4} = x = \frac{4\pi - 10\pi k}{4}$$

$$\log_a b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_b a$$

$$b^{\log_b a} = a$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



$$y_3 = 11$$

$$y_2 = 5$$

$$y_1 = 6$$

$$z_3 = 24$$

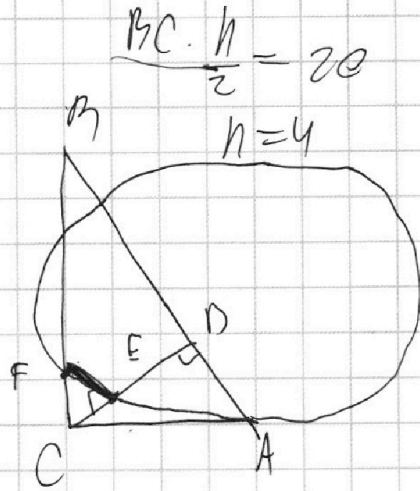
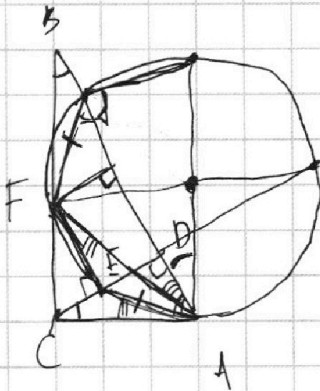
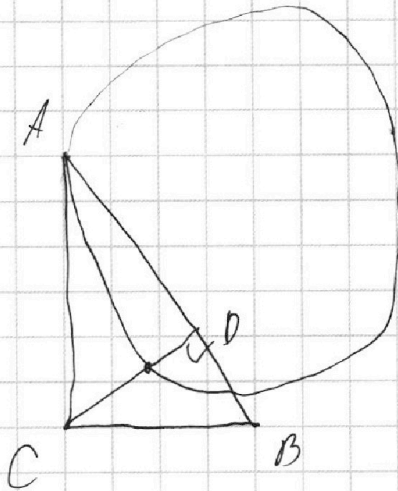
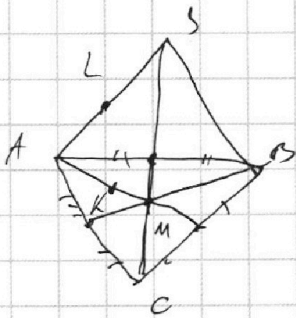
~~z_2 = 0~~

$$z_1 = 43 - 24 = 19$$

$$z_2 = 0$$

$$z_1 = 14$$

$$z_2 = 29$$



$$AB : BD = 1,3$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{10}{13}$$

$$BD = \frac{10}{13} C \quad 6a + 16 =$$

$$AD = \frac{3}{13} C = 80 =$$

$$CD = \frac{\sqrt{30}}{13} C = 4\sqrt{5}$$

$$\operatorname{tg} \angle CBD = \frac{\frac{\sqrt{30}}{13} C}{\frac{10}{13} C} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

$$2a^5 = -8a - 1$$

$$CB = \sqrt{\frac{10}{13^2} C^2 + \frac{30}{13^2} C^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{40}{13^2} C^2} = \frac{\sqrt{10}}{13} C$$

$$\sin \angle CMA = \frac{\frac{\sqrt{30}}{13}}{\frac{\sqrt{10}}{13}} = \frac{\sqrt{3}}{13} = \frac{5}{8}$$

~~$$AC = \frac{\sqrt{3}}{13} C$$~~

$$AC = \frac{\sqrt{3}}{13} C \quad 90 + 45$$

$$10 \cdot 15 \cdot 9 = 1350$$

$$\operatorname{tg} \angle OM_1 K = \frac{20}{\frac{32}{5}} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

$$(x+7)^2 + y^2 - 4(x^2 + y^2 - 9) = 0$$

$$a = 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x$$

$$b = 2^y \cdot 3^y \cdot 5^y$$

$$c = 2^z \cdot 3^z \cdot 5^z$$

~~$$x + y + z = 7$$~~

$$x_1 + y_1 \geq 7$$

$$y_1 + z_1 \geq 13$$

$$z_1 + x_1 \geq 14$$

$$17 \cdot 22 \cdot 38$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$x_1 = 3$$

$$y_1 = 4$$

$$z_1 = 10$$



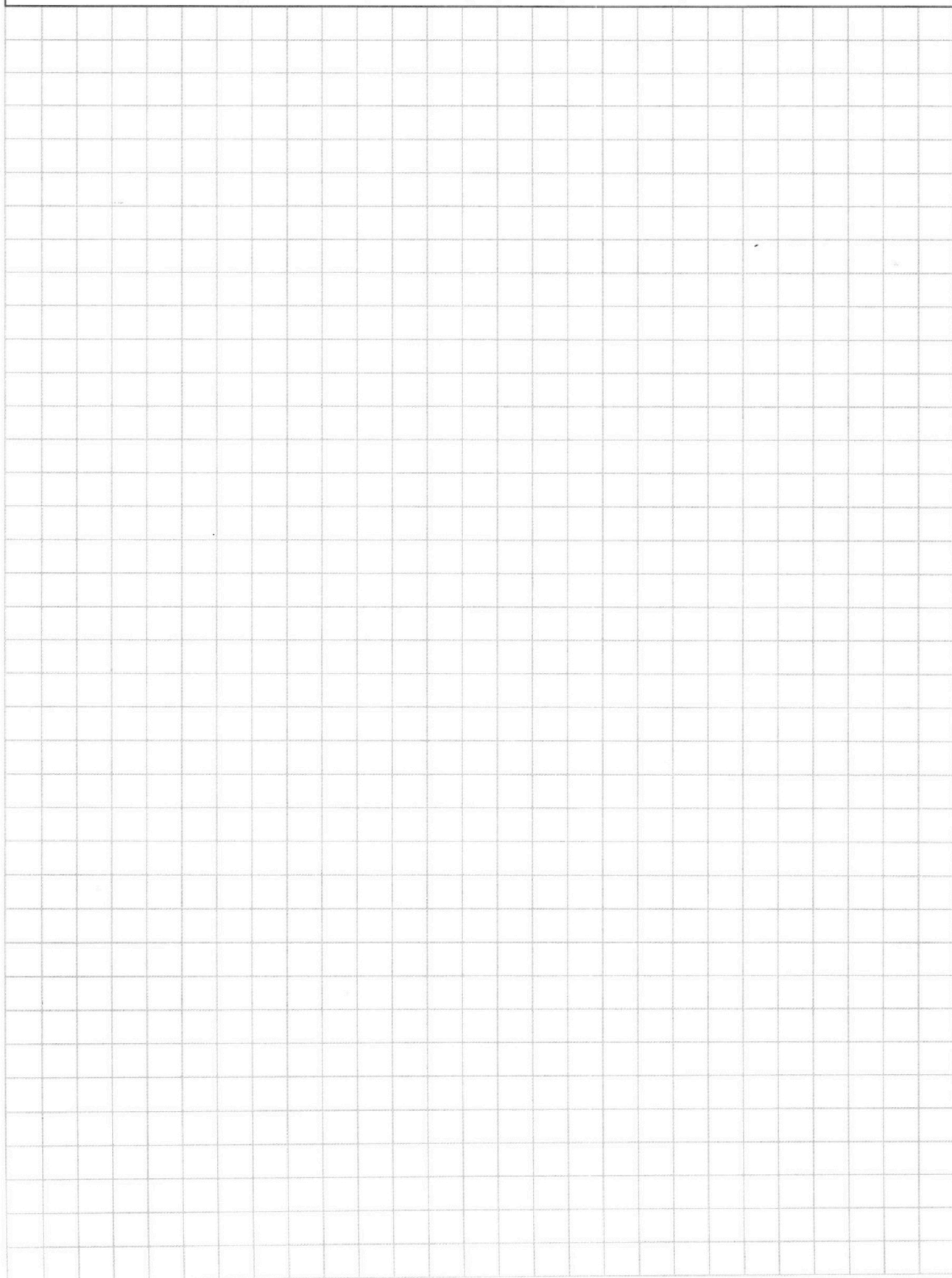
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.

Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

