МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам

$$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3, \quad \text{и} \quad \log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3.$$

Найдите все возможные значения произведения xy.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№1

Если $ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$, $bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$, $ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$. То можно сделать вывод, что $ab \geq 2^8 3^{14} 5^{12}$, ~~то же~~ $bc \geq 2^{12} 3^{20} 5^{17}$, $ac \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Т. к. числа a, b, c положительные, то мы можем перемножить эти неравенства получим $a^2 b^2 c^2 \geq 2^{34} 3^{55} 5^{68}$. Значит $abc \geq 2^{17} 3^{27} \sqrt{3} \cdot 5^{34}$. Заметим, что если показатели степеней меньше, то делимость из условия невозможна. Т. к. числа a, b, c натуральные, то минимальный возможный показатель при 3 это 28. Также заметим, что $abc \vdots \cancel{bc}\ ac$, а $\cancel{bc}\ ac \vdots 5^{39}$, значит $abc \vdots 5^{39}$, тогда минимальный показатель у abc при 5 это 39. Таким образом получено неравенство $abc \geq 2^{17} 3^{28} 5^{39}$. Приведём пример чисел для которых выполняется условие и их произведение будет $2^{17} 3^{28} 5^{39}$.

$$\begin{cases} a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \\ b = 2^3 \cdot 3^7 \\ c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{22} \end{cases}$$

Несложно заметить, что все делимости из условия выполняются, и $abc = 2^{17} 3^{28} 5^{39}$. То есть минимальное значение abc это $2^{17} 3^{28} 5^{39}$

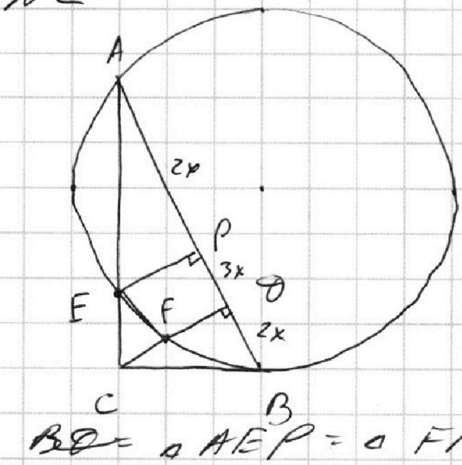
Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

№2



Точки A, E, F, B лежат на одной окружности, такие $AB \parallel EF$ и $EF > AD > AB$. Значит ABFE - трапеция и в силу вписанности, равнобедренная трапеция. Пусть $EP \perp AB$. Т.к трапеция равнобедренная, то $AE = FB$ и $\angle EAP = \angle FBD$. Следовательно ~~BD~~ $\triangle AEP = \triangle FBD$, значит $BD = AP$. Пусть $BD = 2x$, тогда по условию $AD = 5x$. Т. $AP = BD = 2x$, значит $PD = 3x$. EFDP - прямоугольник, значит $EF = 3x$. Т.к. $EF \parallel AD$, то $\triangle CEF \sim \triangle CAD$, значит $\frac{S_{CEF}}{S_{CAD}} = \left(\frac{EF}{AD}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$. , $S_{CEF} = \frac{9}{25} S_{CAD}$.

$\triangle ACD$ и $\triangle ACB$ имеют общую сторону, значит $\frac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{7}$ $S_{ACD} = \frac{5}{7} S_{ABC}$, подставим это в ранее полученное равенство $S_{CEF} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{7} \cdot S_{ABC} = \frac{9}{35} S_{ABC}$. Таким образом

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ECF}} = \frac{35}{9}.$$

Ответ: $\frac{35}{9}$.

№3

$$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x$$

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

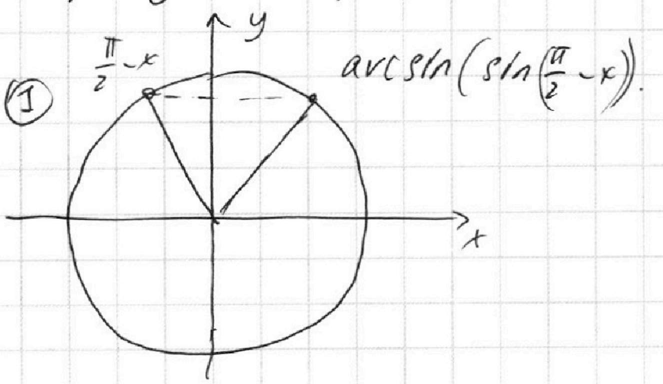
$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi - 2x}{10}$$

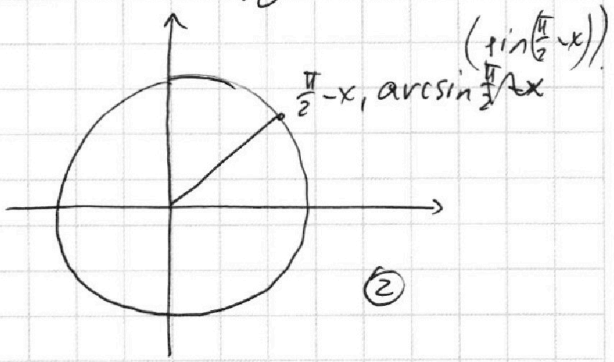
Заметим, что $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin t \le \frac{\pi}{2}$. Значит

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi - 2x}{10} \le \frac{\pi}{2}$, $-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi$,

$-6\pi \le -2x \le 4\pi$, $6\pi \ge 2x \ge -4\pi$, $3\pi \ge x \ge -2\pi$.

Нарисуем тригонометрическую окружность





Возможно два случая в зависимости от того, попадает ли $\frac{\pi}{2} - x$ на промежуток $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ или нет. Они изображены на картинке, значит уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3\pi \ge x \ge -2\pi \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10} = (2n+1)\pi \text{ — 1 случай } n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi - 2x}{10} = 2k\pi \text{ — 2 случай } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №3. (1 листок)

$$\begin{cases} 3\pi \geq x \geq -2\pi \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10} = (2n+1)\pi \quad (1) \\ \frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi - 2x}{10} = 2k\pi \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим систему.

1) $\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi - 2x}{10} = (2n+1)\pi.$

$5\pi - 10x + \pi - 2x = 10(2n+1)\pi.$

$6\pi - 12x = 10(2n+1)\pi$

$12x = 6\pi - 10(2n+1)\pi$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}(2n+1)\pi.$

$3\pi \geq \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}(2n+1)\pi \geq -2\pi.$

$3 \geq \frac{1}{2} - \frac{5}{6}(2n+1) \geq -2$

$18 \geq 3 - 5(2n+1) \geq -12.$

$15 \geq -5(2n+1) \geq -15.$

~~$\leq 2n+1 \leq 3$~~

$3 \geq 2n+1 \geq -3.$

$-3 \leq -2n - 1 \leq 3.$

$-2 \leq -2n \leq 4$

$-2 \leq n \leq 1$

~~$n=0$~~ $n=-1$

$n=0$

$n=1$

$n=-2$

При $n=-1$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi = \frac{8}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi.$

При $n=0.$

$x = \frac{\pi}{2}$

При $n=1$

$x = \frac{\pi}{2} - \frac{5}{2}\pi = -2\pi.$

При $n=-2.$

$x = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6} \cdot 3\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{2}\pi = 3\pi.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи №3 (2 листок)

2) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi - 2x}{10} = 2\pi k$

$5\pi - 10x - (\pi - 2x) = 20\pi k$

$5\pi - 10x - \pi + 2x = 20\pi k$

$4\pi - 8x = 20\pi k$

$\pi - 2x = 5\pi k$

$2x = \pi(1 - 5k)$

$x = \frac{1-5k}{2}\pi$

$3\pi \geq \frac{1-5k}{2}\pi \geq -2\pi$

$3 \geq \frac{1-5k}{2} \geq -2$

$6 \geq 1 - 5k \geq -4$

$5 \geq -5k \geq -5$

$1 \geq -k \geq -1$

$-1 \leq k \leq 1$

$k = 0$

$k = 1$

$k = -1$

При $k = -1$

$x = \frac{1+5}{2}\pi = 3\pi$

При $k = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$

При $k = 1$

$x = \frac{1-5}{2}\pi = -2\pi$

Таким образом решениями системы являются числа -2π, $\cancel{\frac{4}{3}\pi}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{4}{3}\pi$, 3π

Ответ: -2π, $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4}{3}\pi$, 3π.

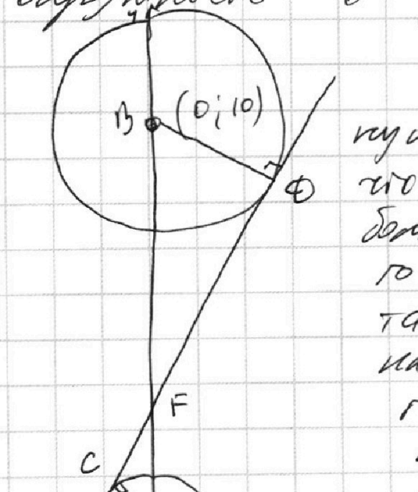
№4

$$\begin{cases} ax-3y+4b=0 \\ (x^2+y^2-5)(x^2+y^2-20y+64)=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = ax+4b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-5=0 \\ x^2+y^2-20y+64=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b \\ \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ (y-10)^2+x^2=36 \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим уравнения на схематичном графике, два уравнения из совокупности это две окружности с координатами центров $(0,0)$ и $(0;10)$, при → и радиусами 5 и 6. А первое уравнение это прямая. Прямая пересекает окружность в не более двух точках, то есть чтобы система имела ровно 4 решения прямая должна пересечь ~~одну~~ каждую окружность в двух точках.



Рассмотрим общую касательную двух окружностей. Заметим, что если тангенс угла наклона будет больше, чем у общей касательной, то мы сможем подобрать такое b, чтобы прямая пересекала каждую окружность в двух точках. Найдём ~~т~~ тангенс угла наклона этой касательной.

(см. обозначения на рисунке.

$\triangle ACF \sim \triangle BF\Phi$. $\frac{AF}{FB} = \frac{CA}{B\Phi} = \frac{1}{6}$.

$\frac{AF}{10-AF} = \frac{1}{6}$. $6AF = 10 - AF$, $7AF = 10$.

$AF = \frac{10}{7}$. По т. Пифагора найдём CF.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

Продолжение задачи 4.

$$CF = \sqrt{AF^2 - AC^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{7}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{100-49}}{7} = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

В силу подобия $\triangle AEF$ и $\triangle CAF$, $\angle CAF = \angle FEA$.

$\cancel{tg\angle FEA}$ $tg\angle CAF = \frac{CF}{CA} = \frac{\frac{\sqrt{51}}{7}}{1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$.

$tg\angle FEA = tg\angle CAF = \frac{\sqrt{51}}{7}$.

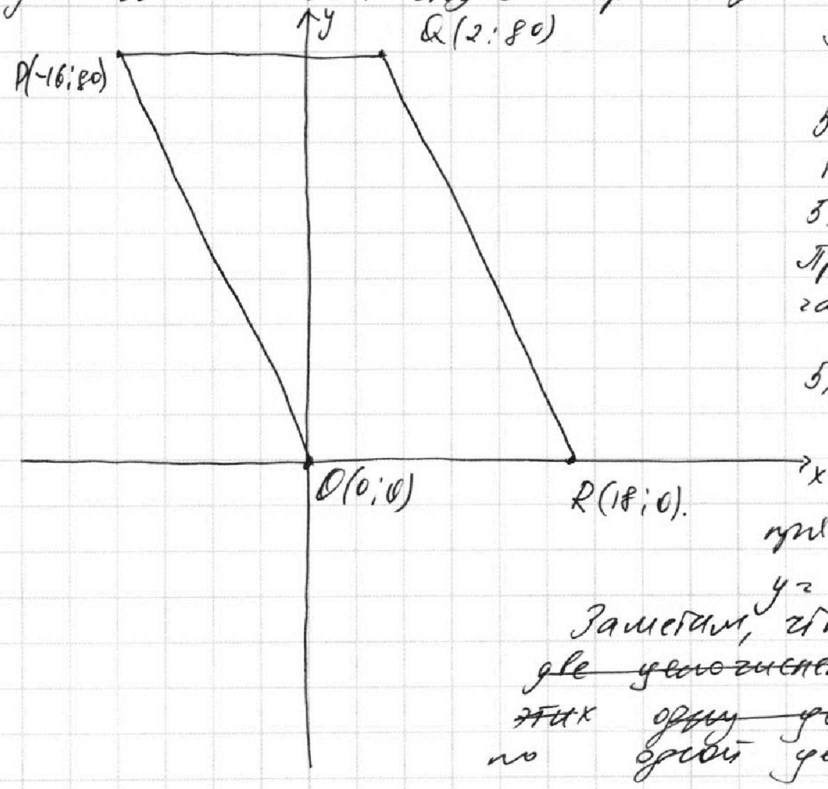
То есть если $\frac{a}{3} > \frac{\sqrt{51}}{7}$, то подберётся такое b, чтобы система имела ровно 4 решения

$a > \frac{3\sqrt{51}}{7}$. Также заметим, что т.к. параболы полностью симметричны относительно оси Oy, то при $a < -\frac{3\sqrt{51}}{7}$, также удастся подобрать b, чтобы ~~уравнение~~ система имела 4 решения. При остальных значениях др. ~~та~~ коэффициента прямой b не подберётся. Таким образом
$$\left[\begin{array}{l} a > \frac{3\sqrt{51}}{7} \\ a < -\frac{3\sqrt{51}}{7} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

№6

Сделаем схематичную картинку



Предположим, что

$5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$. тогда

$5x_2 + y_2 = 45 + 5x_1 + y_1$. Прибавим к обеим частям $-d$

$5x_2 + y_2 - d = 45 + 5x_1 + y_1 - d$

Рассмотрим две прямые $y = -5x + d$ и $y = -5x - 45 + d$.

Заметим, что если мы выберем ~~две целочисленные точки на этих~~ ~~одну целочисленную точку~~ по одной целочисленной точке на каждой из этих двух прямых, то для их координат будет выполняться условие. Заметим, что $d \in \mathbb{Z}$ т.к. $5x_2 + y_2 - d = 0$, а $5x_2 + y_2 \in \mathbb{Z}$ т.к. $x, y \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим все прямые вида $y = -5x + d$, где $d \in \mathbb{Z}$ и ~~прямые~~ прямая проходит хотя бы через одну точку нашего параллелограмма. Это происходит если $d = 0 .. 90$. (прямые PO и QR имеют тот же наклон, что и наши прямые).

Теперь ~~рассмотрим~~ выясним через сколько целых точек проходит прямая $y = -5x + d$, лежащую внутри параллелограмма. Понятно, что каждая пятая точка с целой ординатой имеет целую абсциссу. Значит, если $d \not\vdots 5$ то прямая содержит 17 точек параллелограмма, а если $d \vdots 5$, то прямая содержит 16 целочисленных точек параллелограмма.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

МФТИ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 6.

Разобьём прямые на пары вида $y=-5x+d$ $y=-5x+d-45$.

$y=-5x$ $y=-5x+45$.

$y=-5x+1$ $y=-5x+46$

⋮

$y=-5x+45$ $y=-5x+90$.

~~Заметим, что для~~ Получается ~~Ранее объяснено~~, что для $A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$ выполняется условие ~~только~~ тогда и только тогда, когда A и B лежат на разных прямых из одной пары. У нас есть 10 пар. $(\frac{45}{5}+1)$, где на каждой прямой внутри параллелограмма лежит по 17 точек. ~~Для этих~~ $(d \vdots 5)$. Для этих прямых существует ~~10·17·10~~ ~~10·17·10~~ ~~10·17·10~~ $17\cdot17\cdot10=2890$ способов выбрать две точки, чтобы выполнялось условие. Остальных пар 36, на каждой из них по 16 точек внутри параллелограмма, значит для них существует $36\cdot16\cdot16=9216$ пар точек удовлетворяющих условию. Значит всего существует $9216+2890=$ $=12106$.

Ответ: 12106.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

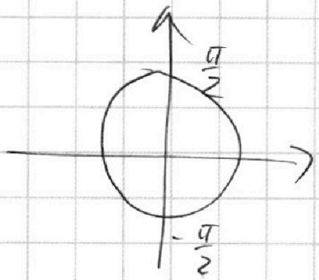
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

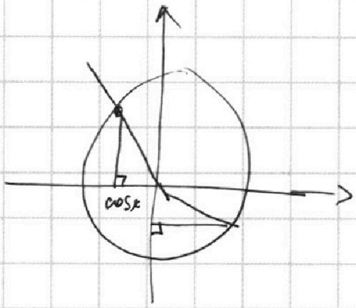
МФТИ

$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}.$



$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi - 2x}{10} < \frac{\pi}{2}$



$-5\pi < \pi - 2x < 5\pi.$

$-6\pi < -2x < 4\pi.$

$3\pi. \geq x \geq \cancel{-4\pi}\ -2\pi$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \sin x \cos\frac{\pi}{2} = 8\cos x$

$\cancel{10}\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{\pi - 2x}{10}.$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}.$

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\cancel{\log}\frac{1}{\log_5 2x} - 3.$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = \frac{1}{3}\log_y 0.2 - 3$

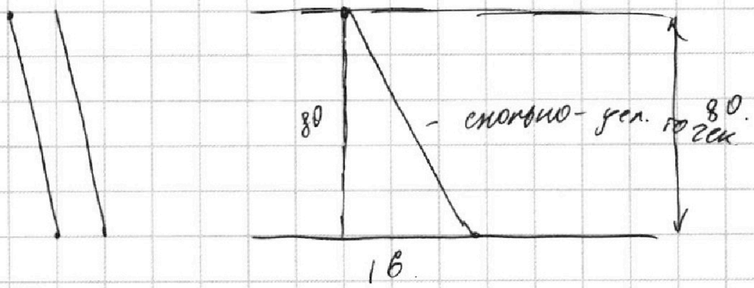
$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\cancel{\tfrac{1}{3}\log_y 0.2}\ -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3.$

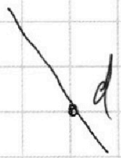
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!



80 /
80 / 5



~~d + 5x >~~

$80 > d + 5a > 0$

$80 - d > 5a > -d$

16 целых точек, если d ⋮ 5

15 целых точек, если d ⋮̸ 5.

~~$y = -5x + 18$~~

$y = -5x + a$

$a = -5x \cdot 18$

$18 \times 5 = 90$

16×16: 96, 16, 256

36×16: 216, 36, 576

576×16: 3456, 576, 9216

~~160 + 96 = 156.~~

256×36: 1536, 768, 9216

$9216 + 2890 = 12106$

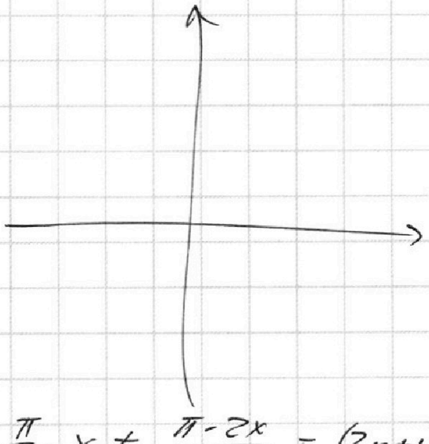
$9216 + 2890 = 12106$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$$\begin{cases} 3\pi \geq x \geq -2\pi \\ \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi-2x}{10}=(2n+1)\pi \quad (1) \\ \frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi-2x}{10}=2k\pi \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi-2x}{10}=(2n+1)\pi.$$

$n=$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}-\frac{6}{5}x=(2n+1)\pi.$$

$\cancel{9x^2-9=y^2+12}$

$$\frac{5\pi-\pi}{10}-(2n+1)\pi=\frac{6}{5}x.$$

$$\frac{4\pi}{10}-(2n+1)\pi=\frac{6}{5}x.$$

$n=0 \quad \frac{2-5}{6}\pi=$

$=\frac{1}{2}\pi.$

$$\frac{2\pi}{5}-(2n+1)\pi=\frac{6}{5}x.$$

$n=1$

$\frac{2-15}{6}\pi=-\frac{13}{6}\pi.$

$$2\pi-5(2n+1)\pi=6x.$$

$$x=\frac{2\pi-5\pi(2n+1)\pi}{6}=\frac{2-5(2n+1)}{6}\pi.$$

$n=-1 \quad \frac{2+5}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi.$

$$t^4-\frac{3}{t}=\frac{4}{3}t-3. \qquad t^4-\frac{3}{t}-\frac{4}{3}t+3$$

$n=-2 \quad \frac{2+25}{6}\pi=$

$$t^4+\frac{4}{t}=-\frac{1}{3}t-3. \qquad t^4+\frac{4}{t}+\frac{1}{3}t+3=0. \qquad =\frac{9}{2}\pi=4\frac{1}{2}\pi$$

$$3t^5-9-4t^2+9t=0. \qquad 3t^5-4t^2+9t-9$$

$$3t^5+12+t^2+9t \qquad 3t^5+t^2+9t+12$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x}5 = \log_{8x^3} 625 - 3$

$\log_5^4(2x) - 3\frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\log_{2x}5 - 3.$

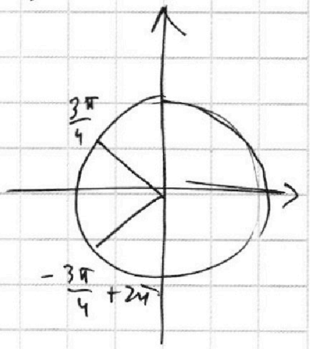
$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3.$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0.2 - 3.$

$\log_5^4 y + \cancel{\frac{4}{\log}} \; 4\log_y 5 = \frac{1}{3}\log_y \frac{1}{5} - 3.$

$\log_5^4 y + 4\log_y 5 = -\frac{1}{3}\log_y 5 - 3.$

$\log_5^4 y + \frac{4}{\log_5 y} = -\frac{1}{3\log_5 y} - 3.$

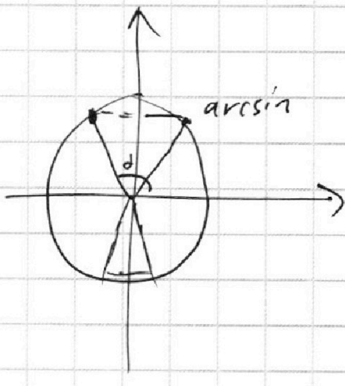


$10\arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$

$3\pi \geq x \geq -2\pi$

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = \frac{\pi-2x}{10}.$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \pm$



$3\pi \geq x \geq -2\pi$

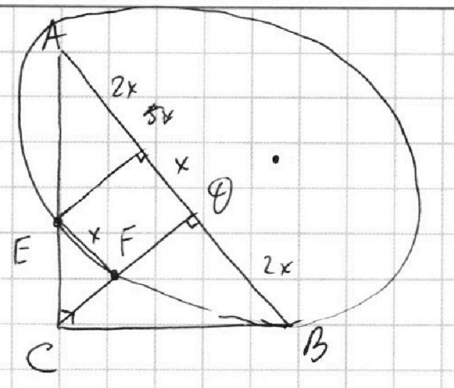
$\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi-2x}{10} = \pi(2n+1)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$AB \parallel EF$

$\frac{AO}{OB} = \frac{5}{2}.$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}$

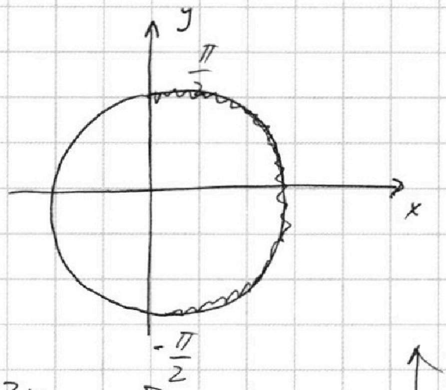
$S_{CEF} = \frac{1}{9} S_{ACO}$

$S_{ACO} = \frac{3}{5} S_{ABC}$

$S_{CEF} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5} S_{ABC} = \frac{1}{15} S_{ABC}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = 15.$

№3



$10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x.$

$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi - 2x}{10}.$

~~sin (arcsin x~~

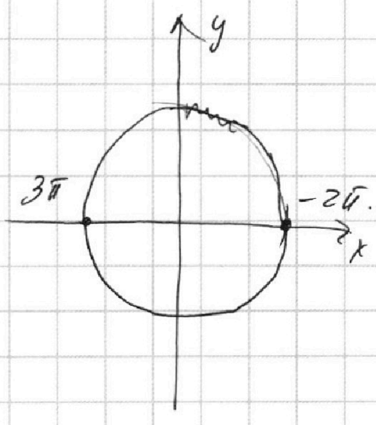
$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi - 2x}{10} \le \frac{\pi}{2}$

$-5\pi \le \pi - 2x \le 5\pi.$

$-6\pi \le -2x \le 4\pi.$

$-3\pi \le -x \le 2\pi$

$3\pi \ge x \ge -2\pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$ab \vdots 2^8 3^{14} 5^{12}$, $bc \vdots 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$8+12+14=34$

$ac \vdots 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$21+14+20=21+34=55$

$ab \geq 2^8 3^{14} 5^{12}$

$bc \geq 2^{12} 3^{20} 5^{17}$

$a^2b^2c^2 \geq 2^{34} 3^{55} 5^{68}$

$ac \geq 2^{14} 3^{21} 5^{39}$

$39-17=22$

$54/2$

$12+17+39=29+39=38+30=68$

$abc \geq 2^{17} \cdot 3^{27}\sqrt{3} \cdot 5^{34}$.

$2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{39}$

т.к. $abc \in \mathbb{Z}$ $abc \geq 2^{17} \cdot 3^{28} \cdot 5^{34}$.

$z=9$

$x=5$ $y=3$

$$\begin{cases} a = 2^5 \cdot 3^8 \cdot 5^{17} \\ b = 2^3 \cdot 3^7 \cdot \cancel{5} \\ c = 2^9 \cdot 3^{13} \cdot 5^{22} \end{cases}$$

$\frac{54}{2}=27$

$x+y=8$ ab

$x+z=14$ ac

$z+y=12$

$x+y=\cancel{14}\,15$

$x+z=21$

$z+y=20$

$\cancel{x=7.5}$

$\cancel{y=6.5}$

$\cancel{z=}$

$2x=8+14-12$

$2x=22-12$

$x=5$

$2x=14+21-20=15$

$x=\cancel{7.5}$

$2x=15+21-20$

$x=8$ $y=7$

$z=13$.

$x+y=12$

$x+z=39$

$z+y=17$

$2x=39-5=34$

$x=17$ $y=1$

$z=16$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

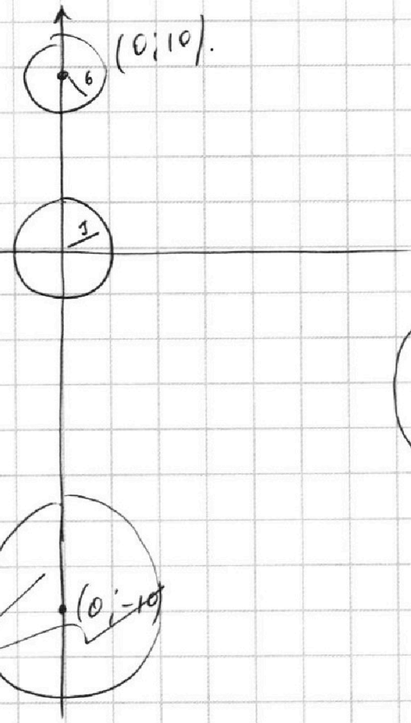
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0 \\ (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-20y+64) = 0 \end{cases}$$

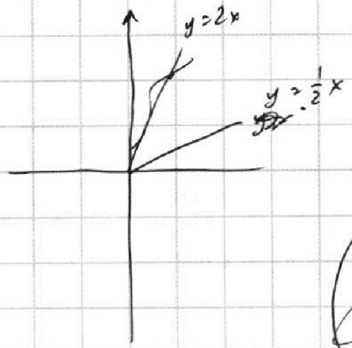
$x^2+y^2-20y+64 = \cancel{x^2-20y+100}\; y^2-20y+100+x^2-36 =$

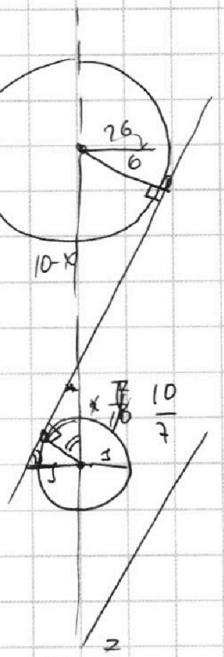
$= (y-10)^2 + x^2 - \cancel{36}6^2$



$3y = ax + 4b$

$y = \frac{a}{3}x + \frac{4}{3}b$





10.

$k > \frac{\sqrt{51}}{7}$

$k < -\frac{\sqrt{51}}{7}$

$\frac{6}{1} = \frac{10-x}{x}$

$x = \frac{10}{7}$

~~$10 - x = 6x$~~ ~~$10 = 7x$~~ ~~$x = \frac{2}{10}$~~

$6x = 10$ ~~tg~~ ~~$1 - \frac{49}{100}$~~

$10 - x = 6x$

$\sqrt{\frac{100}{49} - 1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

$x = \frac{10}{7}$

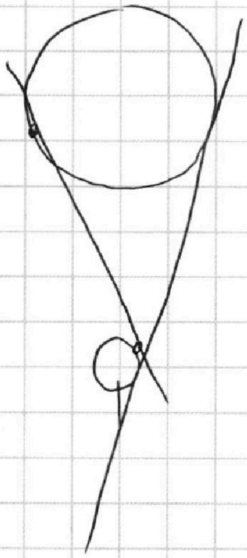
$tg = \frac{\frac{\sqrt{51}}{7}}{1} = \frac{\sqrt{51}}{7}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу.
Отметьте крестиком номер задачи,
решение которой представлено на странице:

1 2 3 4 5 6 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи,
страница считается черновиком и не проверяется. Порча QR-кода недопустима!

МФТИ



$\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 125 - 3$

$\log_5^4(2x) - 3 \cdot \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{4}{3}\log_{2x} 5 - 3$

$\log_5^4(2x) - \frac{3}{\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - 3$

$\frac{3\log_5^5(2x)}{3\log_5 2x} - \frac{9}{3\log_5 2x} = \frac{4}{3\log_5 2x} - \frac{9\log_5 2x}{3\log_5 2x}$

$\frac{3\log_5^5 2x + 9\log_5 2x - 9 - 4}{3\log_5 2x}$

$t = -1$

$3t^5 + 9t - 13.$

$17 \times 17 = 289$

~~$5x^2 - 5x + y_2$~~

$5x_2 - 5x_3 + y_2 - y_1 = 45.$

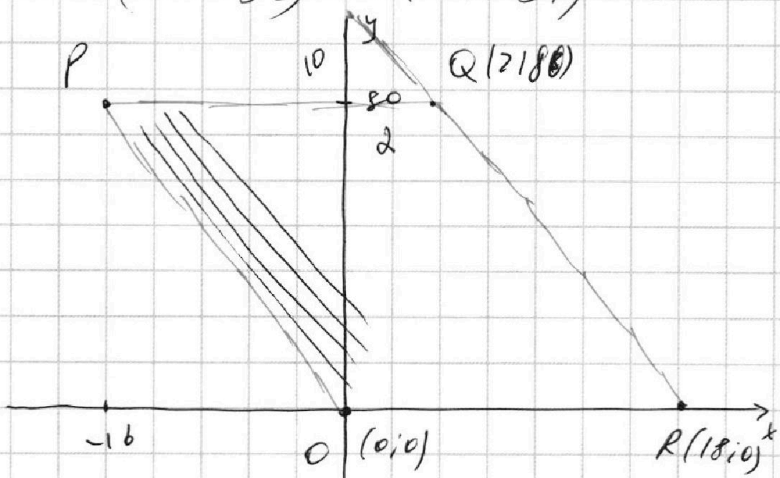
$45 + 5x_3 + y_1 - d = 0$

~~$5(x_2+y_2) - 5(x_3+y$~~

$y_3 = -5x_3 - 45 + d$

$(5x_2 + y_2) - 5(x_3 + y_1) = 45.$

$5x_2 + y_2 = 5x_3 + y_3 + 45.$



$5x_2 + y_2 + d = 5x_1 + y_1 + 45 + d$

$y_2 = -5x_2 - d$

$y_3 = -5x_3 - d - 45.$

(10)

0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45