10 февраля 2024 года Олимпиада Физтех 2024

Решения задач варианта 10-1.

Задача 1

Следуем второму закону Ньютона и определению веса

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}, \quad \vec{P} = -\vec{N}, \quad P = N = mg\sqrt{1+\left(\frac{V^2}{gR}\right)^2}, \quad \delta = \frac{P-mg}{mg}\cdot 100\%,$$

$$\delta = \left(\sqrt{1+\frac{V^2}{gR}} - 1\right)\cdot 100\% \approx 28\%.$$

Скорость правого самолета $\vec{V} = \vec{V}_{ПЕР} + \vec{U}$, $V_{ПЕР} = \omega(L-R)$, скорости $\vec{V}$ и $\vec{V}_{ПЕР}$ антипараллельны, тогда

$$U = \omega(L-R) + V = \frac{V}{R}L = 200\,\text{м/с},\ \vec{U}\uparrow\uparrow\vec{V}.$$

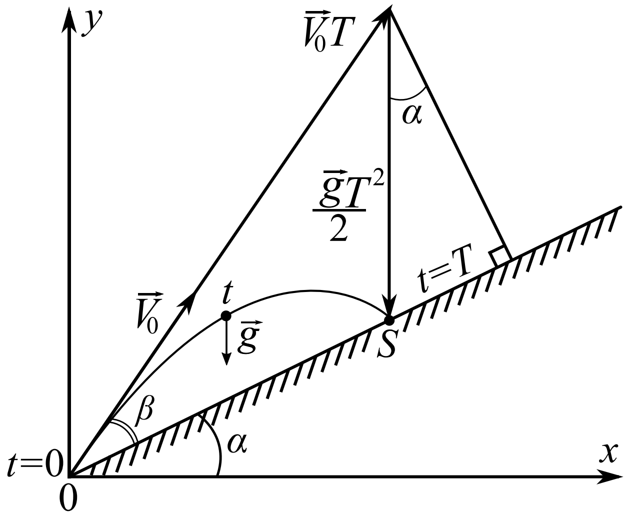
Задача 2

Наибольшая продолжительность полета наблюдается в случае $\vec{V}_0 \uparrow\downarrow \vec{g}$, тогда

$$V_0 = \frac{gT}{2} = 45\,\text{м/с}.$$

За время T полёта перемещение осколка, упавшего на склон, $\vec{r}(T) = \vec{v}_0 T + \frac{\vec{g}T^2}{2}$

Изобразим эти векторы на рисунке (см. рис.).



Проекции векторов $\vec{v}_0 T$ и $\frac{\vec{g}T^2}{2}$ на направление нормали к склону равны по величине

$$v_0 T \sin\beta = \frac{gT^2}{2}\cos\alpha .$$

Отсюда находим продолжительность T полёта

$$T = \frac{2v_0}{g}\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

Дальность S полёта равна алгебраической сумме проекций векторов $\vec{v}_0 T$ и $\frac{\vec{g}T^2}{2}$ на склон

$$S = v_0 T\cos\beta - \frac{gT^2}{2}\sin\alpha .$$

С учётом выражения для времени полёта последнее соотношение перепишем в виде

$$S = \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\left(\sin(\alpha+2\beta) - \sin\alpha\right).$$

Отсюда следует, что наибольшей дальности соответствует такой угол β при котором множитель в скобках в формуле для S принимает наибольшее значение, $\sin(\alpha+2\beta)=1,\ \alpha+2\beta=\frac{\pi}{2},\ \beta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$

т.е. наибольшая дальность достигается в том случае, когда вектор начальной скорости направлен по биссектрисе угла между склоном и вертикалью. Тогда наибольшая дальность полета равна

$$S=\frac{v_0^2\left(1-\sin\alpha\right)}{g\cos^2\alpha}=\frac{v_0^2}{g}\frac{1}{1+\sin\alpha}=135\,\text{м}.$$

Задача 3

По графику $a_1=2\,\text{м/с}^2$, $a_2=4$ м/с^2, при скольжении шайбы вниз $a_1=g\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)$, при скольжении шайбы вверх $a_2=g\left(\sin\alpha+\mu\cos\alpha\right)$, отсюда $\sin\alpha=\dfrac{a_1+a_2}{2g}=0{,}3$.

При качении цилиндра с идеальной жидкостью без проскальзывания потерь энергии нет. По закону сохранения энергии приращение кинетической энергии системы (цилиндр катится без проскальзывания, вода движется поступательно) равно убыли потенциальной

$$mV^2+\frac{MV^2}{2}=\left(m+M\right)gh,\quad V^2=\frac{m+M}{m+\dfrac{M}{2}}gh=\frac{1+n}{1+0{,}5n}gh,\quad n=\frac{M}{m},$$

здесь учтено, что при качении однородного тонкостенного цилиндра без проскальзывания его кинетическая энергия равна mV^2, здесь V – скорость центра масс цилиндра. Далее $V=\sqrt{\dfrac{1+n}{1+0{,}5n}gh}=2\,\text{м/с},\ \left(n=1\right)$.

Перемещения: h по вертикали и $\left(x-x_0\right)$ вдоль наклонной плоскости, связаны соотношением $h=\left(x-x_0\right)\sin\alpha$. Тогда в рассматриваемом случае

$$V^2=2\left(\frac{1+n}{2+n}g\sin\alpha\right)\left(x-x_0\right).$$

При равнопеременном движении с нулевой начальной скоростью

$$V_x^2=2a_x\left(x-x_0\right).$$

В рассматриваемом случае движение происходит в положительном направлении оси *OX*. Отсюда следует: центр масс системы движется с ускорением $a_x=\dfrac{1+n}{2+n}g\sin\alpha=2\,\text{м/с}^2$.

По теореме об изменении импульса системы

$$\frac{\Delta\left(\left(m+M\right)\vec{V}\right)}{\Delta t}=\left(m+M\right)\vec{a}=\left(m+M\right)\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{TP}.$$

Переходим к проекциям на перпендикуляр к наклонной плоскости и на наклонную плоскость $N=\left(m+M\right)g\cos\alpha$, $\left(m+M\right)a_x=\left(m+M\right)g\sin\alpha-F_{TP}$.

Из приведенных соотношений следует

$$F_{TP}=\frac{g\sin\alpha}{2+n}\left(m+M\right)\le\mu N=\mu\left(m+M\right)g\cos\alpha.$$

Качение без проскальзывания будет происходить при $\mu\ge\dfrac{tg\alpha}{2+n}\approx0{,}1$.

Задача 4.

Приращение внутренней энергии в изобарическом процессе

$$U_2 - U_1 = \frac{Q}{\Delta T_1}\Delta T_2 .$$

Первое начало термодинамики $Q = U_2 - U_1 + A$, отсюда находим работу газа в процессе изобарического расширения

$$A = Q\left(1 - \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right) = 200\,\text{Дж}.$$

Теплоемкость смеси газов:

в изохорическом процессе $C_V = \nu_1 1{,}5R + \nu_2 2{,}5R = \dfrac{Q}{\Delta T_1} = 40$ Дж/К,

в изобарическом процессе $C_P = \nu_1 2{,}5R + \nu_2 3{,}5R = \dfrac{Q}{\Delta T_2} = 60$ Дж/К.

Вычислим отношение теплоемкостей

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\nu_1 2{,}5R + \nu_2 3{,}5R}{\nu_1 1{,}5R + \nu_2 2{,}5R} = \frac{5x+7}{3x+5} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \beta = 1{,}5,\ \text{здесь}\ x = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{N_Г}{N_К}.$$

Решение уравнения $$\frac{5x+7}{3x+5} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \beta = 1{,}5$$

приводит к ответу $$\frac{N_Г}{N_К} = \frac{5\beta - 7}{5 - 3\beta} = 1.$$

Этот ответ можно получить иначе: для любого идеального газа разность <u>молярных теплоемкостей</u> $c_P - c_V = R$. Тогда для смеси идеальных газов

$$\frac{C_V}{C_P - C_V} = \frac{\nu_1 1{,}5R + \nu_2 2{,}5R}{(\nu_1 + \nu_2)R} = \frac{3x+5}{2(x+1)} = \frac{\dfrac{Q}{\Delta T_1}}{\dfrac{Q}{\Delta T_2} - \dfrac{Q}{\Delta T_1}} = \alpha,\ \text{здесь}\ x = \frac{\nu_1}{\nu_2},\ \alpha = \frac{1}{\dfrac{\Delta T_1}{\Delta T_2} - 1}.$$

Решение уравнения $\dfrac{3x+5}{2(x+1)} = \alpha$ приводит к ответу $x = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{N_Г}{N_К} = \dfrac{2\alpha - 5}{3 - 2\alpha} = 1$.

Задача 5.

В рассматриваемый момент времени скорость и ускорение частицы взаимно перпендикулярны, следовательно радиус кривизны траектории в малой окрестности $R = \dfrac{V_0^2}{a}$. Ускорение обусловлено действием силы $F = qE = q\dfrac{U}{d}$, так что $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{q}{m}\dfrac{U}{d}$. С учетом равенства $U = \dfrac{Q}{C}$ приходим к ответу

$$R = \frac{V_0^2 dC}{\gamma Q}.$$

Для ответа на второй вопрос заметим, что серединная плоскость конденсатора – это поверхность нулевого потенциала. В конденсаторе скорость убыли потенциала при смещении от положительно заряженной обкладки к отрицательно заряженной равна $E = \dfrac{U}{d}$. Тогда в рассматриваемый момент потенциальная энергия заряженной частицы $q\dfrac{U}{4}$

. Далее по закону сохранения энергии $\frac{mV_0^2}{2}+q\frac{U}{4}=\frac{mV^2}{2}$.

Искомая скорость $V=\sqrt{V_0^2+\frac{1}{2}\gamma U}$.

Решения задач варианта 10-2 (см. решение вар. 10-1).

Задача 1

1 $\frac{P}{mg}=\sqrt{1+\left(\frac{v^2}{gR}\right)^2}\approx 1{,}22$, **2** $U=\omega(L+R)+v=v\left(\frac{L}{R}+2\right)=350$ м/с, $\vec{U}\uparrow\uparrow\vec{V}$.

Задача 2

Максимальная дальность полета в случае, когда точки старта и финиша лежат в одной горизонтальной плоскости, $S_1=\frac{V_0^2}{g}$,

1 $V_0=\sqrt{gS_1}=40$ м/с, **2** $S_2=S_1\frac{1}{1+\sin\alpha}$, $\sin\alpha=\frac{S_1}{S_2}-1=\frac{1}{3}$, $\alpha\approx\frac{1}{3}$ рад.

Задача 3

1 По графику $a_1=8$ м/с^2, $a_2=4$ м/с^2, $\sin\alpha=\frac{a_1+a_2}{2g}=0{,}6$.

2 $V=\sqrt{\frac{1+n}{1+0{,}5n}gL\sin\alpha}\approx 2{,}3$ м/с,

3 $a_X=\frac{1+n}{2+n}g\sin\alpha=4{,}5$ м/с^2,

4 $\mu\geq\frac{tg\alpha}{2+n}=0{,}19$.

Задача 4

1 $A=Q\left(1-\frac{|\Delta T_2|}{|\Delta T_1|}\right)=280$ Дж,

2 $C_P=\frac{Q}{|\Delta T_2|}=39$ Дж/К.

Теплоемкость смеси:в процессе P=const $C_P=\nu_1 2{,}5R+\nu_2 3{,}5R=\frac{Q}{|\Delta T_2|}=39$ Дж/К,

в процессе V=const $C_V=\nu_1 1{,}5R+\nu_2 2{,}5R=\frac{Q}{|\Delta T_1|}=25$ Дж/К.

Далее $\frac{C_P}{C_V}=\frac{\nu_1 2{,}5R+\nu_2 3{,}5R}{\nu_1 1{,}5R+\nu_2 2{,}5R}=\frac{5x+7}{3x+5}=\frac{|\Delta T_1|}{|\Delta T_2|}=\beta=1{,}56$, $x=\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{N_1}{N_2}$,

3 $\frac{N_1}{N_2}=\frac{5\beta-7}{5-3\beta}=2{,}5$.

Задача 5

1 $m\frac{V_0^2}{R}=\frac{|q|U}{d}$, $V_0=\sqrt{|\gamma|R\frac{U}{d}}$,

2 $\dfrac{mV_0^2}{2}+q\left(-\dfrac{3U}{8}\right)=\dfrac{mV^2}{2}$, $V=\sqrt{|\gamma|U\left(\dfrac{R}{d}+\dfrac{3}{4}\right)}$.

Решения задач варианта 10-3 (см. решение вар. 10-1).

Задача 1

1 $P=mg\sqrt{1+\left(\dfrac{V^2}{gR}\right)^2}$, $\quad \delta=\dfrac{|mg-P|}{P}100\%=\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{V^2}{gR}\right)^2}}\right)100\%\approx 30\%$,

2 $U=\omega(L-R)-V=V\left(\dfrac{L}{R}-2\right)=180$ м/с, $\vec{U}\uparrow\downarrow\vec{V}$.

Задача 2

1 $H=\dfrac{V_0^2}{2g}$, $V_0=\sqrt{2gH}=30$ м/с, **2** $S=\dfrac{V_0^2}{g}\dfrac{1}{1+\sin\alpha}=2H\dfrac{1}{1+\sin\alpha}=50$ м.

Задача 3

1 По графику $a_1=4$ м/с^2, $a_2=6$ м/с^2, $\sin\alpha=\dfrac{a_1+a_2}{2g}=0{,}5$.

2 $V=\sqrt{\dfrac{1+n}{1+0{,}5n}g\cdot S\cdot tg\alpha}\approx 3$ м/с, **3** $a_x=\dfrac{1+n}{2+n}g\sin\alpha=4$ м/с^2,**4** $\mu\geq\dfrac{tg\alpha}{2+n}\approx 0{,}12$

Задача 4

1 $A=Q\left(1-\dfrac{\Delta T_2}{\Delta T_1}\right)=360$ Дж.

Теплоемкость смеси газов:

2 в изохорическом процессе $C_V=\nu_1 1{,}5R+\nu_2 2{,}5R=\dfrac{Q}{\Delta T_1}=20$ Дж/К,

в изобарическом процессе $C_P=\nu_1 2{,}5R+\nu_2 3{,}5R=\dfrac{Q}{\Delta T_2}=32$ Дж/К.

Вычислим отношение теплоемкостей

$$\frac{C_P}{C_V}=\frac{\nu_1 2{,}5R+\nu_2 3{,}5R}{\nu_1 1{,}5R+\nu_2 2{,}5R}=\frac{5x+7}{3x+5}=\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}=\beta=1{,}5,\ \text{здесь}\ x=\frac{\nu_1}{\nu_2}=\frac{N_Г}{N_К}.$$

Решение уравнения $\dfrac{5x+7}{3x+5}=\dfrac{\Delta T_1}{\Delta T_2}=\beta=1{,}6$ приводит к ответу

3 $\dfrac{N_Г}{N_К}=\dfrac{5\beta-7}{5-3\beta}=5$.

Задача 5

1 $m\dfrac{V_0^2}{R}=\dfrac{qU}{d}$, $\quad U=\dfrac{V_0^2}{\gamma}\dfrac{d}{R}$, $\quad$ **2** $\dfrac{mV_0^2}{2}+\dfrac{3}{8}qU=\dfrac{mV^2}{2}$, $\quad V=V_0\sqrt{1+\dfrac{3}{4}\dfrac{d}{R}}$.

Решения задач варианта 10-4 (см. решение вар. 10-1).

Задача 1

1 $\dfrac{N}{mg} = \sqrt{1+\left(\dfrac{V^2}{gR}\right)^2} \approx 2,24$,

2 $U = V\dfrac{L}{R} = 250$ м/с, $\vec{U} \uparrow\downarrow \vec{V}$, скорости второго самолета антипараллельны.

Задача 2

1 $T = 2\dfrac{V_0 \sin\alpha}{g}, \alpha = \dfrac{\pi}{4}, \quad V_0 = \dfrac{gT}{\sqrt{2}} \approx 35$ м/с,

2 $S = \dfrac{V_0^2}{g}\dfrac{1}{1+\sin\alpha}, \quad \sin\alpha = \dfrac{gT^2}{2S} - 1 = 0,25, \quad \alpha \approx 0,25$ рад.

Задача 3

1 По графику $a_1 = 6$ м/с^2, $a_2 = 3$ м/с^2, $\sin\alpha = \dfrac{a_1 + a_2}{2g} = 0,45$,

2 $V = \sqrt{\dfrac{1+n}{1+0,5n} gh} = 5$ м/с, **3** $a_X = \dfrac{1+n}{2+n} g\sin\alpha = 3,75$ м/с^2, **4** $\mu \geq \dfrac{tg\alpha}{2+n} \approx 0,084$.

Задача 4

1 $A = Q\left(1 - \dfrac{|\Delta T_2|}{|\Delta T_1|}\right) = 720$ Дж,

2 В процессе V=const $C_V = \nu_1 1,5R + \nu_2 2,5R = \dfrac{Q}{|\Delta T_1|} = 40$ Дж/К,

в процессе P=const $C_P = \nu_1 2,5R + \nu_2 3,5R = \dfrac{Q}{|\Delta T_2|} = 58$ Дж/К.

3. $\dfrac{C_P}{C_V} = \dfrac{\nu_1 2,5R + \nu_2 3,5R}{\nu_1 1,5R + \nu_2 2,5R} = \dfrac{5x+7}{3x+5} = \dfrac{|\Delta T_1|}{|\Delta T_2|} = \beta = 1,45,\ x = \dfrac{\nu_1}{\nu_2} = \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{5\beta - 7}{5 - 3\beta} = \dfrac{5}{13} \approx 0,38$,

Задача 5

1 $m\dfrac{V_0^2}{R} = \dfrac{|q|U}{d}, \quad \gamma = \dfrac{q}{m} = -\dfrac{d}{R}\dfrac{V_0^2}{U}$, **2** $\dfrac{mV_0^2}{2} + q\left(-\dfrac{U}{8}\right) = \dfrac{mV^2}{2}$, $V = V_0\sqrt{1+\dfrac{d}{4R}}$.